最適化手法 第 12 回
ネットワーク最適化 (5)：最大流問題の応用 (2)

岡本 吉央
okamotoy@uec.ac.jp

2013 年 7 月 5 日

最終更新：2013 年 7 月 4 日　11:41

今日の概要

今日の目標

- 最大流問題を使って，次の問題を解く
  - リーグ戦における優勝可能性判定問題
  - 露天掘り問題
  - 最密部分グラフ問題

[復習] 2 つの重要な定理：最大流最小カット定理，整数流定理

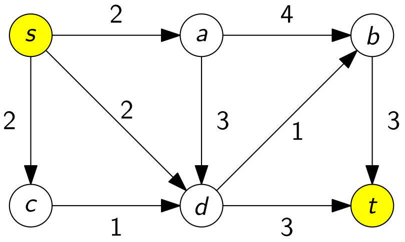
目次

最大流問題とは？ — 復習

最大流問題とは？

入力

- 有向グラフ $G = (V, E)$，各辺 $e \in E$ の**容量**，2 頂点 $s, t \in V$
  (辺の容量は非負実数)



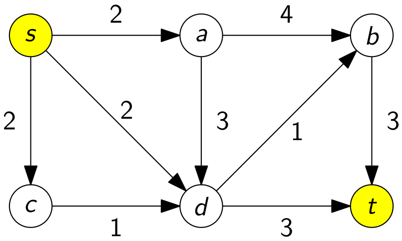
最大流問題とは？ — 復習

最大流問題とは？

出力

- s から t へ至る流れで，その流量が最大のもの

  (s から t への最大流)



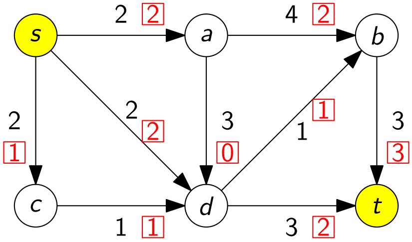
流れとは？ — 復習

s から t への流れ (flow) とは？

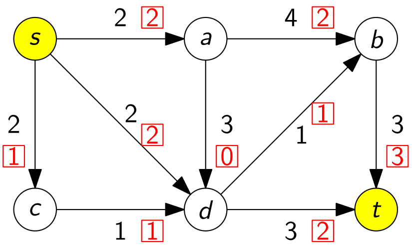
- s から湧き出る総量 $=$ t へ流れ込む総量 (流れの**流量**とよぶ)
- s, t 以外の頂点 v において，(流量保存制約)

  v から流れ出る総量 $=$ v へ流れ入る総量
- 各辺 e において，(容量制約)

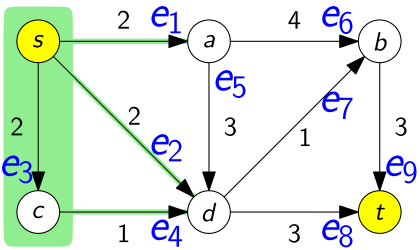
  $0 \leq e$ を流れる量 $\leq e$ の容量



最大流と最小カット — 復習



最大流量 ≥ 5



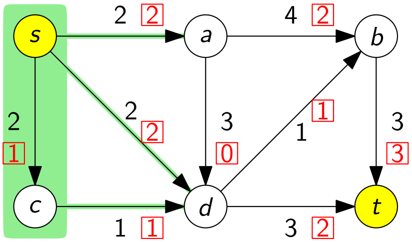
最大流量 ≤ 5

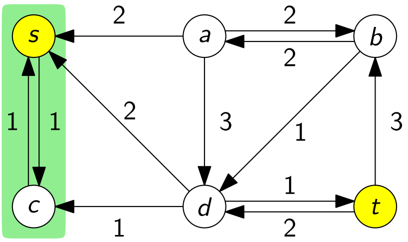
したがって

- 左の図にある流れは最大流であり，その流量は 5
- 右の図にあるカットは最小カットであり，その容量は 5

整数流定理 — 復習

増加道法で，流れを増加させるとき，その増加分は必ず整数だった





整数流定理

容量がすべて整数 $\Rightarrow$ どの辺に流れる量も整数である最大流が存在

目次

MLB (Major League Baseball) アメリカンリーグ東地区

MLB AL East 1996 年 8 月 30 日 金曜日

チーム名	勝	敗	残	NYY	BAL	BOS	TOR	DET	他地区
NYY	75	59	28	–	3	8	7	3	7
BAL	71	63	28	3	–	2	7	4	12
BOS	69	66	27	8	2	–	0	0	17
TOR	63	72	27	7	7	0	–	0	13
DET	49	86	27	3	4	0	0	–	20

NYY = ニューヨーク・ヤンキース，BAL = ボルティモア・オリオールズ，
BOS = ボストン・レッドソックス，TOR = トロント・ブルージェイズ，
DET = デトロイト・タイガース

質問

DET はまだ地区優勝が可能か？ (注：引き分けはない)

http://lyle.smu.edu/~olinick/riot/detroit.html

ちょっと観察

MLB AL East 1996 年 8 月 30 日 金曜日

チーム名	勝	敗	残	NYY	BAL	BOS	TOR	DET	他地区
NYY	75	59	28	–	3	8	7	3	7
BAL	71	63	28	3	–	2	7	4	12
BOS	69	66	27	8	2	–	0	0	17
TOR	63	72	27	7	7	0	–	0	13
DET	49	86	27	3	4	0	0	–	20

仮定：DET が残り試合すべてで勝ち，NYY が残り試合すべてで負ける

- **最終的に，DET は 76 勝 86 敗で全日程終了**
- **最終的に，NYY は 75 勝 87 敗で全日程終了**

この仮定が成り立たなくても，DET は優勝できるかもしれない !?

ちょっと観察

MLB AL East 1996 年 8 月 30 日 金曜日

チーム名	勝	敗	残	NYY	BAL	BOS	TOR	DET	他地区
NYY	75	59	28	–	3	8	7	3	7
BAL	71	63	28	3	–	2	7	4	12
BOS	69	66	27	8	2	–	0	0	17
TOR	63	72	27	7	7	0	–	0	13
DET	49	86	27	3	4	0	0	–	20

仮定：DET **が残り試合すべてで勝ち，**NYY **が残り試合すべてで負ける**

- **最終的に，**DET **は** 76 **勝** 86 **敗で全日程終了**
- **最終的に，**NYY **は** 75 **勝** 87 **敗で全日程終了**
- **しかし，このとき，**BOS **は** NYY **から** 8 **勝している**
- **つまり，**BOS **の最終成績は** 77 **勝以上**
- $\therefore$ DET **は優勝できない**

この仮定が成り立たなくても，DET **は優勝できるかもしれない !?**

ここからの目標

MLB AL East 1996 年 8 月 30 日 金曜日

チーム名	勝	敗	残	NYY	BAL	BOS	TOR	DET	他地区
NYY	75	59	28	–	3	8	7	3	7
BAL	71	63	28	3	–	2	7	4	12
BOS	69	66	27	8	2	–	0	0	17
TOR	63	72	27	7	7	0	–	0	13
DET	49	86	27	3	4	0	0	–	20

ここからの目標

TOR と DET が優勝できるかどうか，最大流問題を使って判定する

最大流問題としての定式化：着眼点

MLB AL East 1996 年 8 月 30 日 金曜日

チーム名	勝	敗	残	NYY	BAL	BOS	TOR	DET	他地区
NYY	75	59	28	–	3	8	7	3	7
BAL	71	63	28	3	–	2	7	4	12
BOS	69	66	27	8	2	–	0	0	17
TOR	63	72	27	7	7	0	–	0	13
DET	49	86	27	3	4	0	0	–	20

アイディア：「割り当てる」ことを「流す」ことに対応させる

例えば，NYY と BAL に対して「8」という勝利を割り当てる

TOR の優勝可能性判定 (1)

MLB AL East 1996 年 8 月 30 日 金曜日

チーム名	勝	敗	残	NYY	BAL	BOS	TOR	DET	他地区
NYY	75	59	28	–	3	8	7	3	7
BAL	71	63	28	3	–	2	7	4	12
BOS	69	66	27	8	2	–	0	0	17
TOR	63	72	27	7	7	0	–	0	13
DET	49	86	27	3	4	0	0	–	20

TOR は残り全部に勝ち，他チームは他地区で全部負けると仮定できる

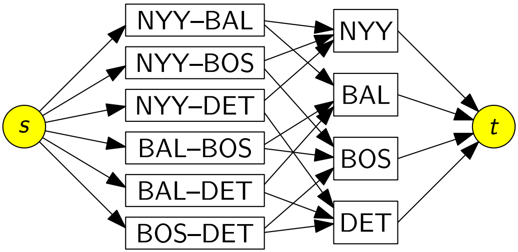
その仮定が成り立ったときの状況

チーム名	勝	敗	残	NYY	BAL	BOS	TOR	DET	他地区
NYY	75	73	14	–	3	8	0	3	0
BAL	71	82	9	3	–	2	0	4	0
BOS	69	83	10	8	2	–	0	0	0
TOR	90	72	0	0	0	0	–	0	0
DET	49	106	7	3	4	0	0	–	0

TOR の優勝可能性判定 (2)

その仮定が成り立ったときの状況

チーム名	勝	敗	残	NYY	BAL	BOS	TOR	DET	他地区
NYY	75	73	14	–	3	8	0	3	0
BAL	71	82	9	3	–	2	0	4	0
BOS	69	83	10	8	2	–	0	0	0
TOR	90	72	0	0	0	0	–	0	0
DET	49	106	7	3	4	0	0	–	0

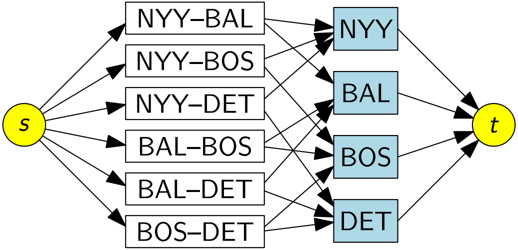


有向グラフの構成

TOR の優勝可能性判定 (3)

その仮定が成り立ったときの状況

チーム名	勝	敗	残	NYY	BAL	BOS	TOR	DET	他地区
NYY	75	73	14	–	3	8	0	3	0
BAL	71	82	9	3	–	2	0	4	0
BOS	69	83	10	8	2	–	0	0	0
TOR	90	72	0	0	0	0	–	0	0
DET	49	106	7	3	4	0	0	–	0

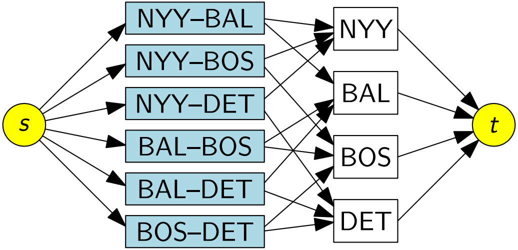


各チームに対応する頂点

TOR の優勝可能性判定 (4)

その仮定が成り立ったときの状況

チーム名	勝	敗	残	NYY	BAL	BOS	TOR	DET	他地区
NYY	75	73	14	–	3	8	0	3	0
BAL	71	82	9	3	–	2	0	4	0
BOS	69	83	10	8	2	–	0	0	0
TOR	90	72	0	0	0	0	–	0	0
DET	49	106	7	3	4	0	0	–	0

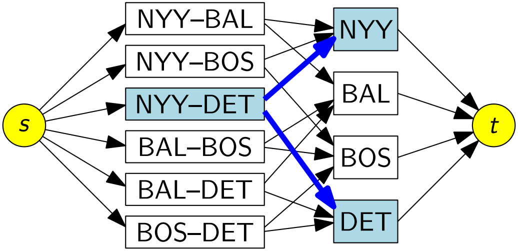


各対戦に対応する頂点

TOR の優勝可能性判定 (5)

その仮定が成り立ったときの状況

チーム名	勝	敗	残	NYY	BAL	BOS	TOR	DET	他地区
NYY	75	73	14	–	3	8	0	3	0
BAL	71	82	9	3	–	2	0	4	0
BOS	69	83	10	8	2	–	0	0	0
TOR	90	72	0	0	0	0	–	0	0
DET	49	106	7	3	4	0	0	–	0

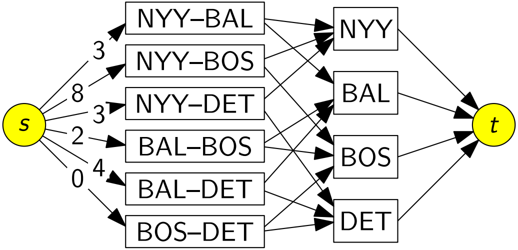


対戦を行うチームに向かって辺を引く

TOR の優勝可能性判定 (6)

その仮定が成り立ったときの状況

チーム名	勝	敗	残	NYY	BAL	BOS	TOR	DET	他地区
NYY	75	73	14	–	3	8	0	3	0
BAL	71	82	9	3	–	2	0	4	0
BOS	69	83	10	8	2	–	0	0	0
TOR	90	72	0	0	0	0	–	0	0
DET	49	106	7	3	4	0	0	–	0

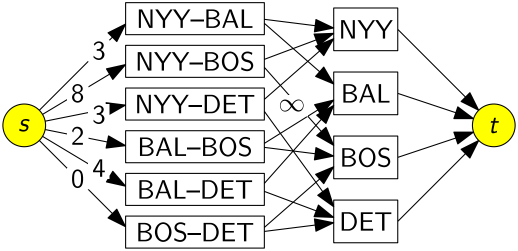


残り対戦数

TOR の優勝可能性判定 (7)

その仮定が成り立ったときの状況

チーム名	勝	敗	残	NYY	BAL	BOS	TOR	DET	他地区
NYY	75	73	14	–	3	8	0	3	0
BAL	71	82	9	3	–	2	0	4	0
BOS	69	83	10	8	2	–	0	0	0
TOR	90	72	0	0	0	0	–	0	0
DET	49	106	7	3	4	0	0	–	0

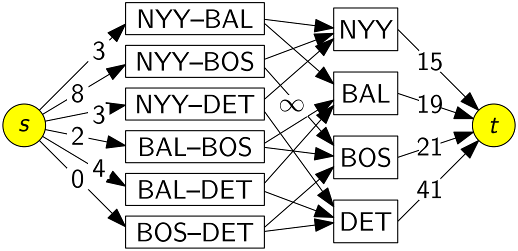


「真ん中」の辺の容量はどれも ∞

TOR の優勝可能性判定 (8)

その仮定が成り立ったときの状況

チーム名	勝	敗	残	NYY	BAL	BOS	TOR	DET	他地区
NYY	75	73	14	–	3	8	0	3	0
BAL	71	82	9	3	–	2	0	4	0
BOS	69	83	10	8	2	–	0	0	0
TOR	90	72	0	0	0	0	–	0	0
DET	49	106	7	3	4	0	0	–	0

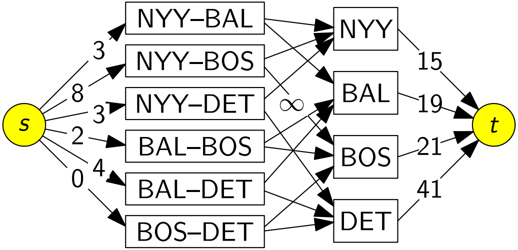


TOR が優勝するとき，そのチームがあとどれだけ勝ってもよいか

TOR の優勝可能性判定 (9)

その仮定が成り立ったときの状況

チーム名	勝	敗	残	NYY	BAL	BOS	TOR	DET	他地区
NYY	75	73	14	–	3	8	0	3	0
BAL	71	82	9	3	–	2	0	4	0
BOS	69	83	10	8	2	–	0	0	0
TOR	90	72	0	0	0	0	–	0	0
DET	49	106	7	3	4	0	0	–	0

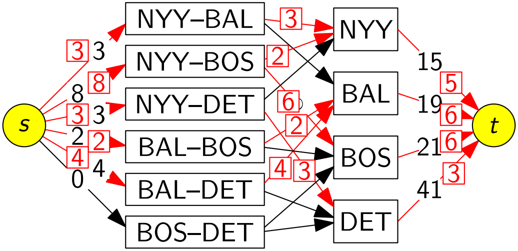


最大流の流量が $3+8+3+2+4+0=20 \Leftrightarrow$ TOR **は優勝可能**

TOR の優勝可能性判定 (10)

その仮定が成り立ったときの状況

チーム名	勝	敗	残	NYY	BAL	BOS	TOR	DET	他地区
NYY	75	73	14	–	3	8	0	3	0
BAL	71	82	9	3	–	2	0	4	0
BOS	69	83	10	8	2	–	0	0	0
TOR	90	72	0	0	0	0	–	0	0
DET	49	106	7	3	4	0	0	–	0

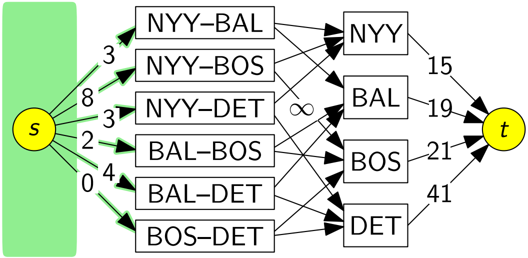


これが最大流で，その流量は 20

TOR の優勝可能性判定 (11)

その仮定が成り立ったときの状況

チーム名	勝	敗	残	NYY	BAL	BOS	TOR	DET	他地区
NYY	75	73	14	–	3	8	0	3	0
BAL	71	82	9	3	–	2	0	4	0
BOS	69	83	10	8	2	–	0	0	0
TOR	90	72	0	0	0	0	–	0	0
DET	49	106	7	3	4	0	0	–	0

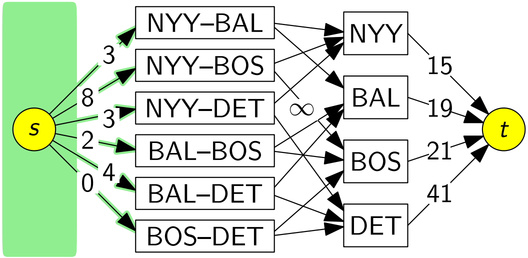


なぜならば，容量が 20 のカットが存在するから

TOR の優勝可能性判定 (12)

その仮定が成り立ったときの状況

チーム名	勝	敗	残	NYY	BAL	BOS	TOR	DET	他地区
NYY	75	73	14	–	3	8	0	3	0
BAL	71	82	9	3	–	2	0	4	0
BOS	69	83	10	8	2	–	0	0	0
TOR	90	72	0	0	0	0	–	0	0
DET	49	106	7	3	4	0	0	–	0



結論：TOR は優勝できる

DET の優勝可能性判定 (1)

MLB AL East 1996 年 8 月 30 日 金曜日

チーム名	勝	敗	残	NYY	BAL	BOS	TOR	DET	他地区
NYY	75	59	28	–	3	8	7	3	7
BAL	71	63	28	3	–	2	7	4	12
BOS	69	66	27	8	2	–	0	0	17
TOR	63	72	27	7	7	0	–	0	13
DET	49	86	27	3	4	0	0	–	20

DET **は残り全部に勝ち，他チームは他地区で全部負けると仮定できる**

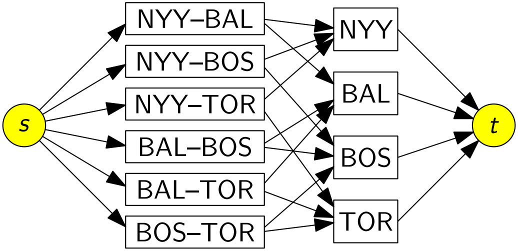
その仮定が成り立ったときの状況

チーム名	勝	敗	残	NYY	BAL	BOS	TOR	DET	他地区
NYY	75	69	18	–	3	8	7	0	0
BAL	71	79	12	3	–	2	7	0	0
BOS	69	83	10	8	2	–	0	0	0
TOR	63	85	14	7	7	0	–	0	0
DET	76	86	0	0	0	0	0	–	0

DET の優勝可能性判定 (2)

その仮定が成り立ったときの状況

チーム名	勝	敗	残	NYY	BAL	BOS	TOR	DET	他地区
NYY	75	69	18	–	3	8	7	0	0
BAL	71	79	12	3	–	2	7	0	0
BOS	69	83	10	8	2	–	0	0	0
TOR	63	85	14	7	7	0	–	0	0
DET	76	86	0	0	0	0	0	–	0

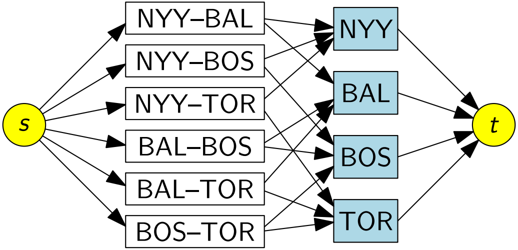


有向グラフの構成

DET の優勝可能性判定 (3)

その過程が成り立ったときの状況

チーム名	勝	敗	残	NYY	BAL	BOS	TOR	DET	他地区
NYY	75	69	18	–	3	8	7	0	0
BAL	71	79	12	3	–	2	7	0	0
BOS	69	83	10	8	2	–	0	0	0
TOR	63	85	14	7	7	0	–	0	0
DET	76	86	0	0	0	0	0	–	0

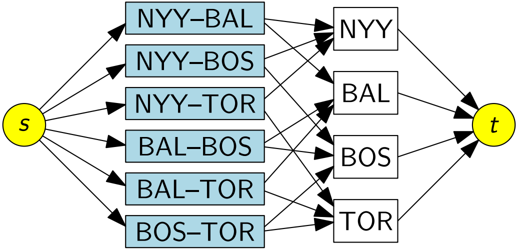


各チームに対応する頂点

DET の優勝可能性判定 (4)

その過程が成り立ったときの状況

チーム名	勝	敗	残	NYY	BAL	BOS	TOR	DET	他地区
NYY	75	69	18	–	3	8	7	0	0
BAL	71	79	12	3	–	2	7	0	0
BOS	69	83	10	8	2	–	0	0	0
TOR	63	85	14	7	7	0	–	0	0
DET	76	86	0	0	0	0	0	–	0

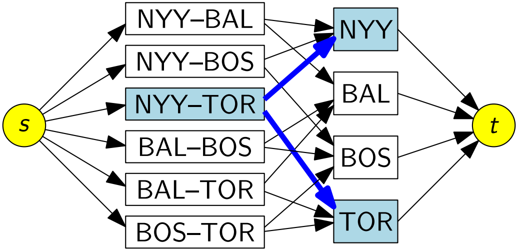


各対戦に対応する頂点

DET の優勝可能性判定 (5)

その過程が成り立ったときの状況

チーム名	勝	敗	残	NYY	BAL	BOS	TOR	DET	他地区
NYY	75	69	18	–	3	8	7	0	0
BAL	71	79	12	3	–	2	7	0	0
BOS	69	83	10	8	2	–	0	0	0
TOR	63	85	14	7	7	0	–	0	0
DET	76	86	0	0	0	0	0	–	0

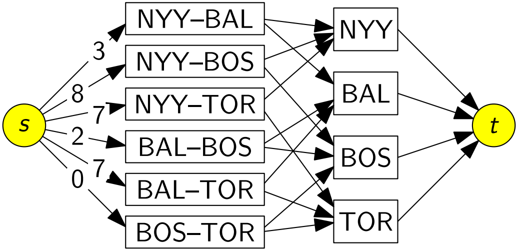


対戦を行うチームに向かって辺を引く

DET の優勝可能性判定 (6)

その過程が成り立ったときの状況

チーム名	勝	敗	残	NYY	BAL	BOS	TOR	DET	他地区
NYY	75	69	18	–	3	8	7	0	0
BAL	71	79	12	3	–	2	7	0	0
BOS	69	83	10	8	2	–	0	0	0
TOR	63	85	14	7	7	0	–	0	0
DET	76	86	0	0	0	0	0	–	0

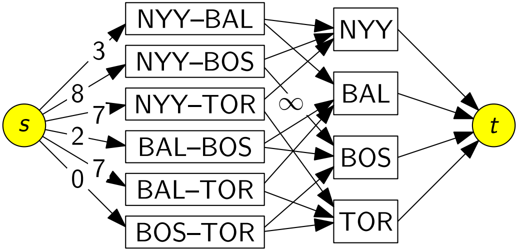


残り対戦数

DET の優勝可能性判定 (7)

その過程が成り立ったときの状況

チーム名	勝	敗	残	NYY	BAL	BOS	TOR	DET	他地区
NYY	75	69	18	–	3	8	7	0	0
BAL	71	79	12	3	–	2	7	0	0
BOS	69	83	10	8	2	–	0	0	0
TOR	63	85	14	7	7	0	–	0	0
DET	76	86	0	0	0	0	0	–	0

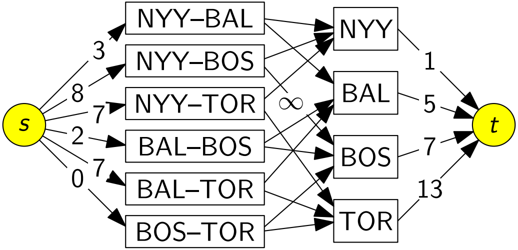


「真ん中」の辺の容量はどれも ∞

DET の優勝可能性判定 (8)

その過程が成り立ったときの状況

チーム名	勝	敗	残	NYY	BAL	BOS	TOR	DET	他地区
NYY	75	69	18	–	3	8	7	0	0
BAL	71	79	12	3	–	2	7	0	0
BOS	69	83	10	8	2	–	0	0	0
TOR	63	85	14	7	7	0	–	0	0
DET	76	86	0	0	0	0	0	–	0

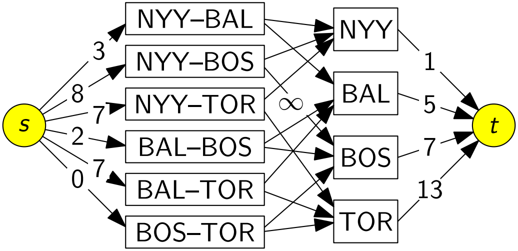


DET が優勝するとき，そのチームがあとどれだけ勝ってもよいか

DET の優勝可能性判定 (9)

その過程が成り立ったときの状況

チーム名	勝	敗	残	NYY	BAL	BOS	TOR	DET	他地区
NYY	75	69	18	–	3	8	7	0	0
BAL	71	79	12	3	–	2	7	0	0
BOS	69	83	10	8	2	–	0	0	0
TOR	63	85	14	7	7	0	–	0	0
DET	76	86	0	0	0	0	0	–	0

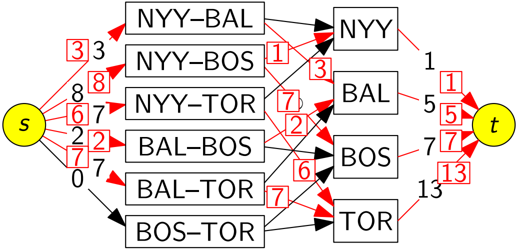


最大流の流量が $3+8+7+2+7+0=27 \Leftrightarrow$ DET **は優勝可能**

DET の優勝可能性判定 (10)

その過程が成り立ったときの状況

チーム名	勝	敗	残	NYY	BAL	BOS	TOR	DET	他地区
NYY	75	69	18	–	3	8	7	0	0
BAL	71	79	12	3	–	2	7	0	0
BOS	69	83	10	8	2	–	0	0	0
TOR	63	85	14	7	7	0	–	0	0
DET	76	86	0	0	0	0	0	–	0

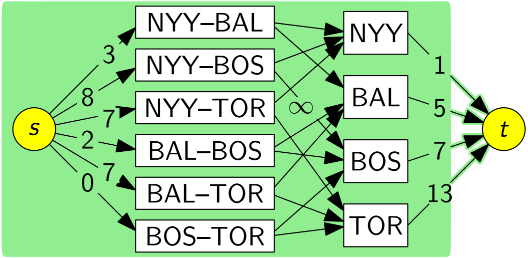


これが最大流で，その流量は 26

DET の優勝可能性判定 (11)

その過程が成り立ったときの状況

チーム名	勝	敗	残	NYY	BAL	BOS	TOR	DET	他地区
NYY	75	69	18	–	3	8	7	0	0
BAL	71	79	12	3	–	2	7	0	0
BOS	69	83	10	8	2	–	0	0	0
TOR	63	85	14	7	7	0	–	0	0
DET	76	86	0	0	0	0	0	–	0

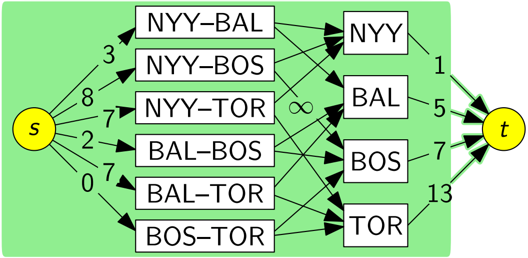


なぜならば，容量が 26 のカットが存在するから

DET の優勝可能性判定 (12)

その過程が成り立ったときの状況

チーム名	勝	敗	残	NYY	BAL	BOS	TOR	DET	他地区
NYY	75	69	18	–	3	8	7	0	0
BAL	71	79	12	3	–	2	7	0	0
BOS	69	83	10	8	2	–	0	0	0
TOR	63	85	14	7	7	0	–	0	0
DET	76	86	0	0	0	0	0	–	0



結論：DET は優勝できない

優勝可能性判定問題：歴史と結果 (1)

- **最大流問題を用いた優勝可能性判定**
  - Schwartz (1966)
- t **位以上になれるか，の判定は** NP **困難** (**難しい**)
  - McCormick (1999)
- **優勝可能性判定のための高速アルゴリズム**
  - Wayne (2001)
  - Adler, Erera, Hochbaum, Olinick (2002)
  - Gusfield, Martel (2002)

優勝可能性判定問題：歴史と結果 (2)

(a, b, c)-規則：勝ち a 点，引き分け b 点，負け c 点

(MLB は $(1, 0, 0)$-規則)

- $(2, 1, 0)$-規則 $\rightsquigarrow$ 最大流問題 (1990 年までの FIFA)
  - Schwartz (1966)
- $(3, 1, 0)$-規則 $\rightsquigarrow$ NP 困難 (1990 年以降の FIFA)
  - Kern, Paulusma (2001)
  - Bernholt, Gülich, Hofmeister, Schmitt (1999)
- $a = b$ または $b = c$ または $a + c = 2b$ $\rightsquigarrow$ 最大流問題
  そうでないとき $\rightsquigarrow$ NP 困難
  - Kern, Paulusma (2001)

目次

サンライズ・ダム鉱山 (オーストラリア)

http://en.wikipedia.org/wiki/File:Sunrise_Dam_Mill.jpg

サンライズ・ダム鉱山 (オーストラリア)

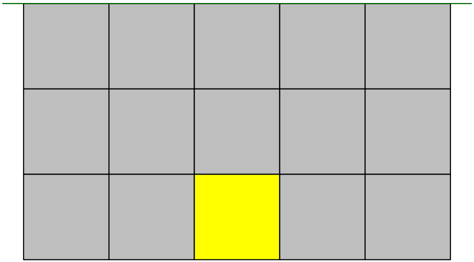
http://en.wikipedia.org/wiki/File:Sunrise_Dam_open_pit.jpg

サンライズ・ダム鉱山 (オーストラリア)

http://en.wikipedia.org/wiki/File:Sunrisegoldmine.jpg

露天掘り問題 (open-pit mining problem)

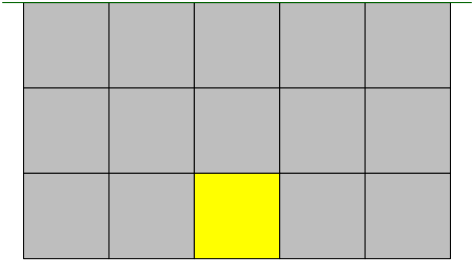
簡単にするため，深さと幅だけの設定で



金が地下の奥底にある状況

露天掘り問題 (open-pit mining problem)

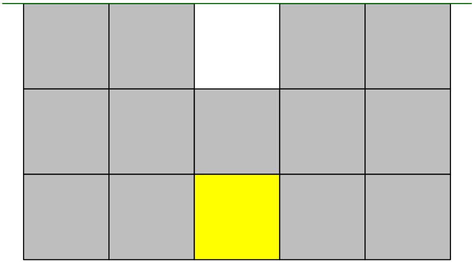
簡単にするため，深さと幅だけの設定で



深く掘ろうと思うと，上の部分をもっと掘る必要がある

露天掘り問題 (open-pit mining problem)

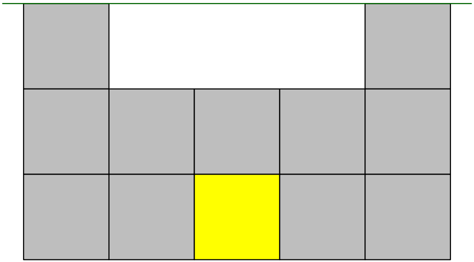
簡単にするため，深さと幅だけの設定で



深く掘ろうと思うと，上の部分をもっと掘る必要がある

露天掘り問題 (open-pit mining problem)

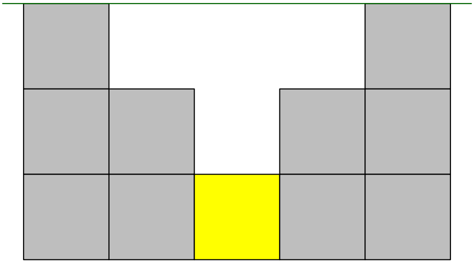
簡単にするため，深さと幅だけの設定で



深く掘ろうと思うと，上の部分をもっと掘る必要がある

露天掘り問題 (open-pit mining problem)

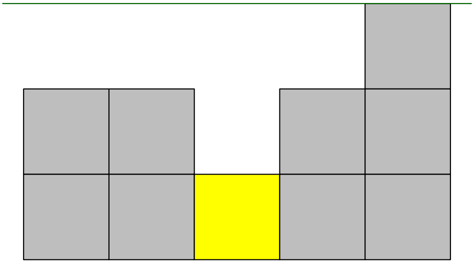
簡単にするため，深さと幅だけの設定で



深く掘ろうと思うと，上の部分をもっと掘る必要がある

露天掘り問題 (open-pit mining problem)

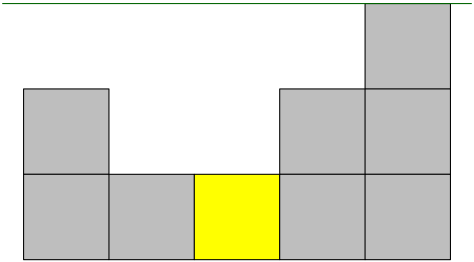
簡単にするため，深さと幅だけの設定で



深く掘ろうと思うと，上の部分をもっと掘る必要がある

露天掘り問題 (open-pit mining problem)

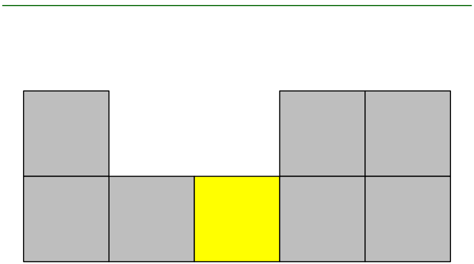
簡単にするため，深さと幅だけの設定で



深く掘ろうと思うと，上の部分をもっと掘る必要がある

露天掘り問題 (open-pit mining problem)

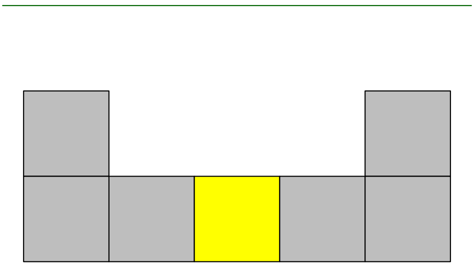
簡単にするため，深さと幅だけの設定で



深く掘ろうと思うと，上の部分をもっと掘る必要がある

露天掘り問題 (open-pit mining problem)

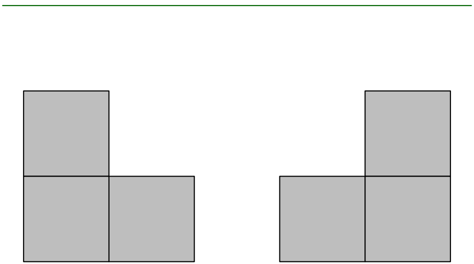
簡単にするため，深さと幅だけの設定で



深く掘ろうと思うと，上の部分をもっと掘る必要がある

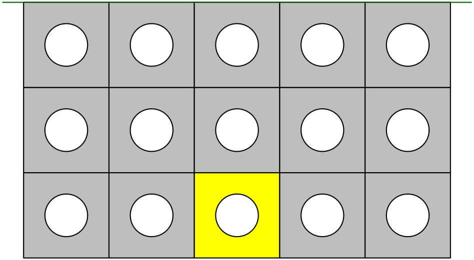
露天掘り問題 (open-pit mining problem)

簡単にするため，深さと幅だけの設定で



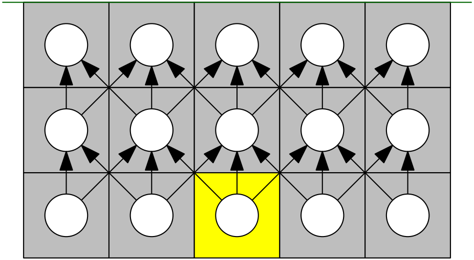
金が取れた！

露天掘り問題：グラフを用いて定式化



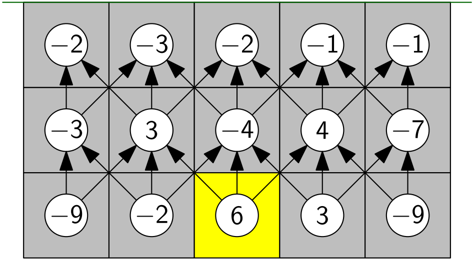
各部分を頂点に対応させる

露天掘り問題：グラフを用いて定式化



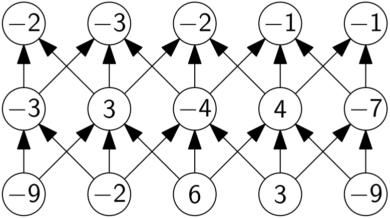
「辺の終点を掘らないと始点が掘れない」という関係を辺で表す

露天掘り問題：グラフを用いて定式化



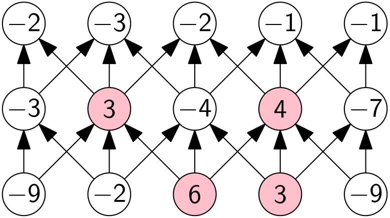
各頂点には，その部分を掘ったときに得られる利益が付いている

露天掘り問題：グラフを用いて定式化



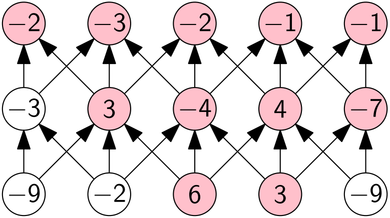
グラフだけを残す (本質的な情報を持っている部分だけ残った)

露天掘り問題：グラフを用いて定式化



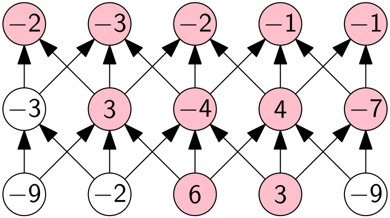
これは許されない掘り方

露天掘り問題：グラフを用いて定式化



これは許される掘り方で，総利益 $= -4$

ここからの目標



ここからの目標

どのように掘れば最も利益があがるか，最大流問題を使って定式化する

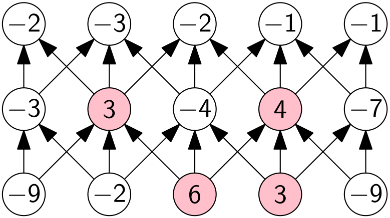
- 実際は，最小カット問題として定式化する

露天掘り問題：定式化のためのアイディア

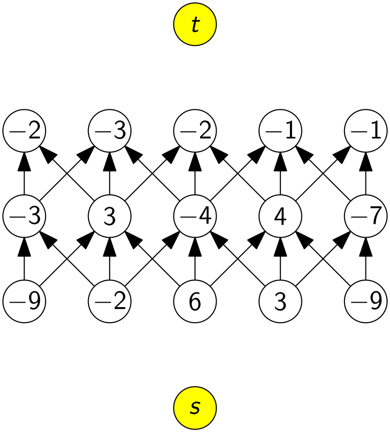
定式化のためのアイディア

自由に取れるならば，利益の合計を $3 + 4 + 6 + 3 = 16$ **にできる**

- -3 **を取る** $\equiv$ 3 **だけ損をする (と考える)**
- 6 **を取らない** $\equiv$ 6 **だけ損をする (と考える)**
- **目標：損の合計を最小化する**

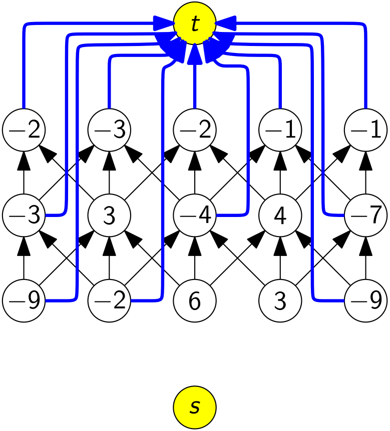


露天掘り問題：最小カット問題としての定式化 (1)



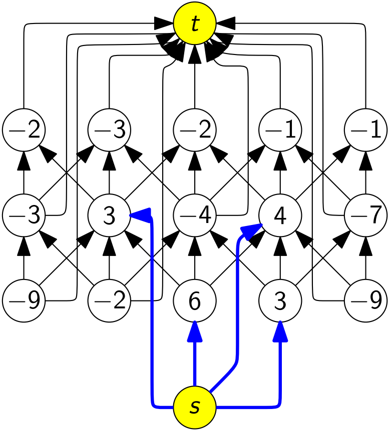
s と t を新たに付ける

露天掘り問題：最小カット問題としての定式化 (2)



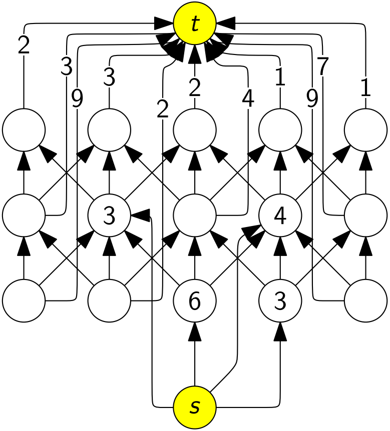
利益が負である頂点から t に向かって辺を付ける

露天掘り問題：最小カット問題としての定式化 (3)



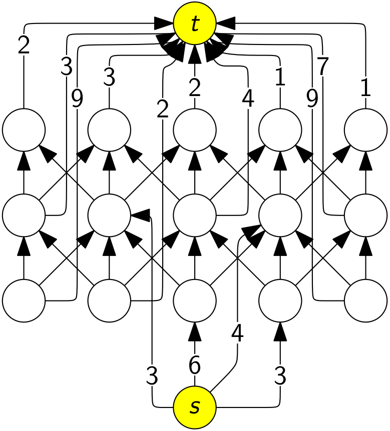
利益が正である頂点に向かって s から辺を付ける

露天掘り問題：最小カット問題としての定式化 (4)



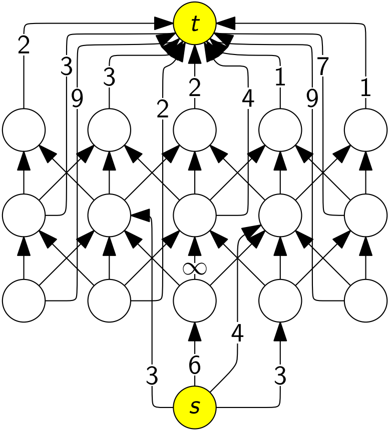
t を終点とする辺の容量はその始点を取ったときの損

露天掘り問題：最小カット問題としての定式化 (5)



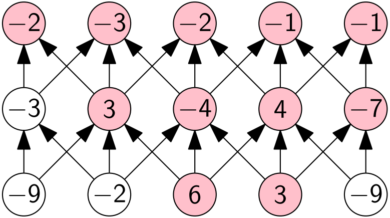
s を始点とする辺の容量はその終点を取らなかったときの損

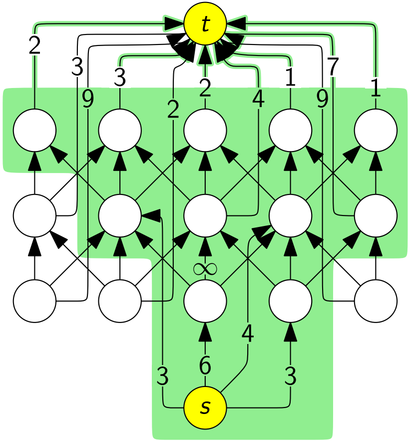
露天掘り問題：最小カット問題としての定式化 (6)



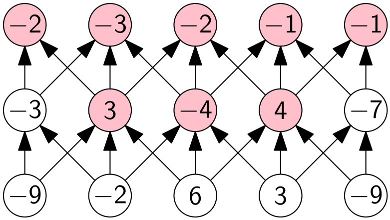
他の辺の容量は ∞ (無限大)

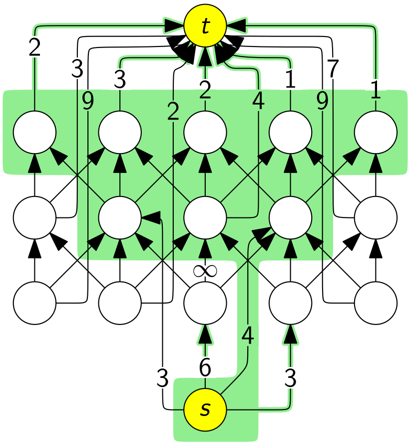
露天掘り問題：掘り方とカットの対応 (1)



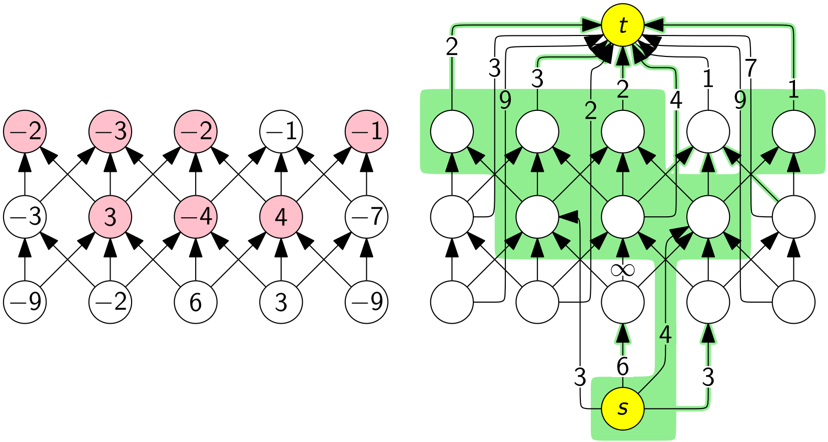


露天掘り問題：掘り方とカットの対応 (2)





露天掘り問題：掘り方とカットの対応 (3)

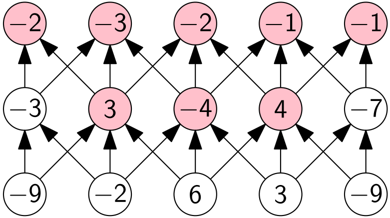


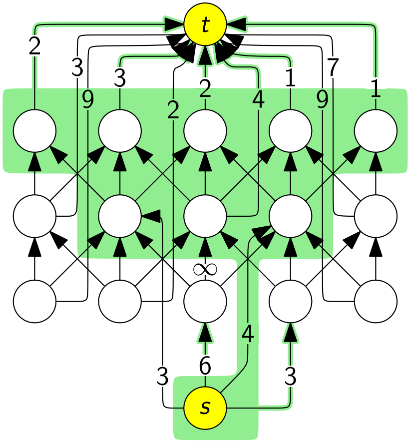
許されない掘り方に対応するカットの容量は無限大

露天掘り問題：ここまでのまとめ

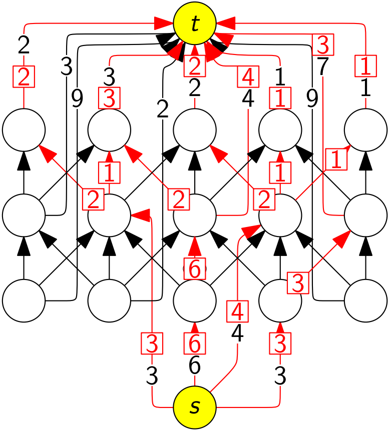
最小カットから，損が最も小さい掘り方が分かる (Picard '76)

最小カットを計算するために，最大流を計算する



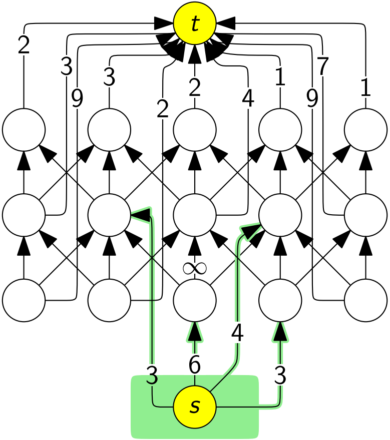


露天掘り問題：最大流



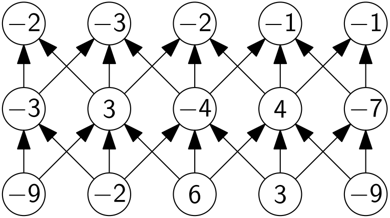
計算された最大流 (流量 $= 16$)

露天掘り問題：最小カット



対応する最小カット (**容量** $= 16$)

露天掘り問題：最小カットに対応する掘り方

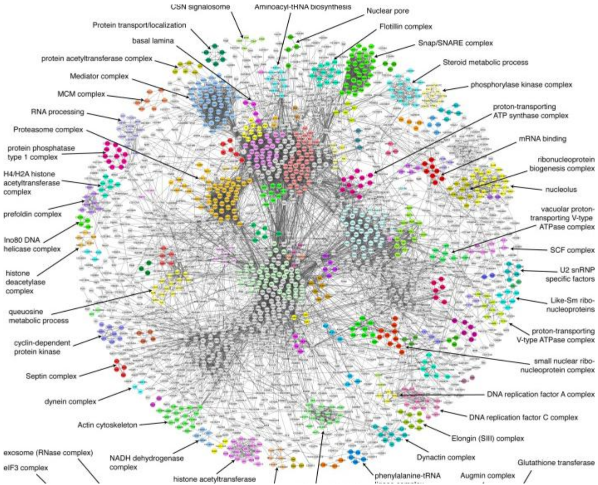


総利益 $= 0$

目次

蛋白質相互作用ネットワーク

密な部分グラフ $\rightsquigarrow$ クラスタ (という意味のある構造) $\rightsquigarrow$ 知識発見

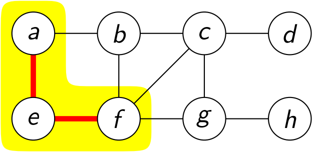


Guruharsha, et al., Cell 147 (2011) pp. 690–703

部分グラフの密度

部分グラフの密度とは？

$$\frac{\text{辺の数}}{\text{頂点の数}}$$

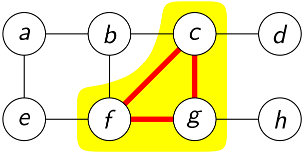


$$\text{密度} = \frac{2}{3}$$

部分グラフの密度

部分グラフの密度とは？

$$\frac{\textbf{辺の数}}{\textbf{頂点の数}}$$

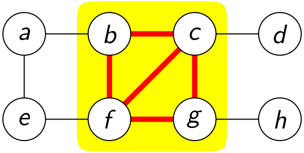


$$\textbf{密度} = \frac{3}{3} = 1$$

部分グラフの密度

部分グラフの密度とは？

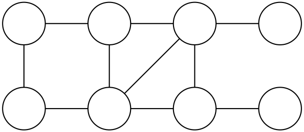
$$\frac{\textbf{辺の数}}{\textbf{頂点の数}}$$



$$\textbf{密度} = \frac{5}{4}$$

最密部分グラフ問題

このグラフの部分グラフで，密度 1.2 以上のものを見つけたい

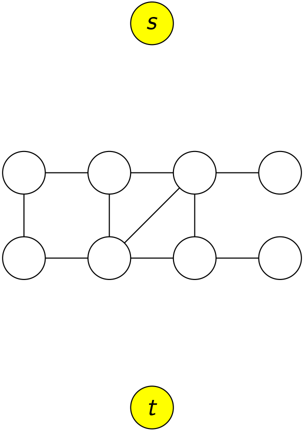


頂点数 $n = 8$，**辺数** $m = 10$，**密度保証** $= 1.2$

今から行うこと

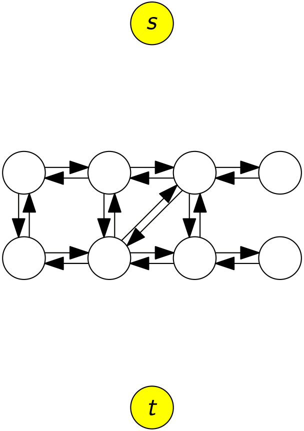
この問題を最小カット問題として定式化する

最密部分グラフ問題：最小カット問題としての定式化 (1)



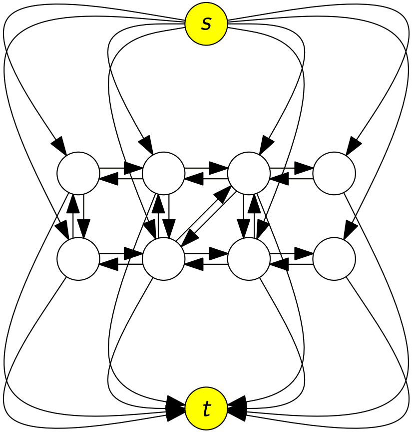
頂点 s と t を付け加える

最密部分グラフ問題：最小カット問題としての定式化 (2)



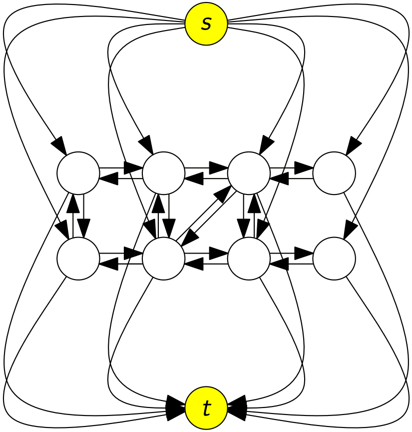
始めからある辺は，両向きの有向辺に変える

最密部分グラフ問題：最小カット問題としての定式化 (3)



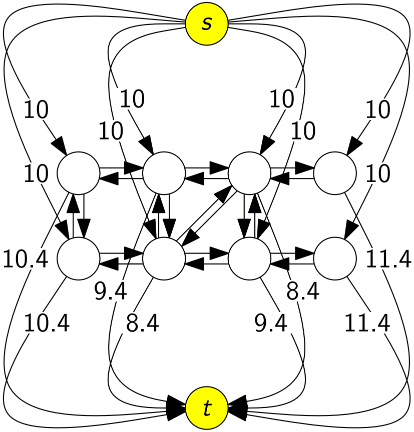
始めからある頂点に向かって s から辺を付ける

最密部分グラフ問題：最小カット問題としての定式化 (4)



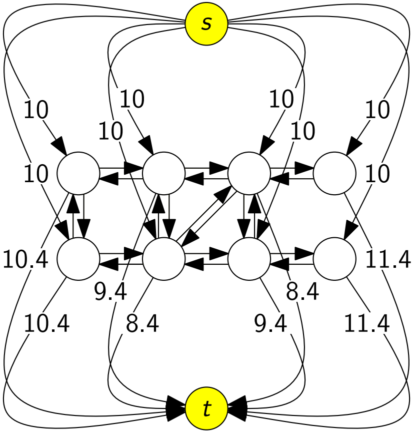
始めからある頂点から t に向かって辺を付ける

最密部分グラフ問題：最小カット問題としての定式化 (5)



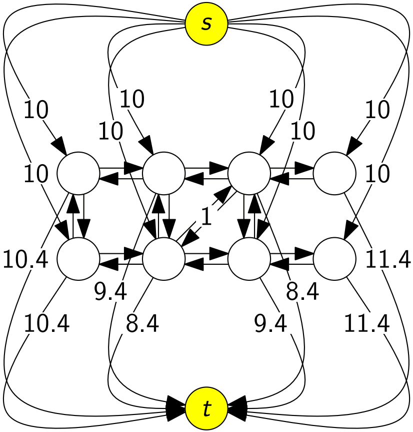
s を始点とする辺の容量 $= m \ (= 10)$

最密部分グラフ問題：最小カット問題としての定式化 (6)



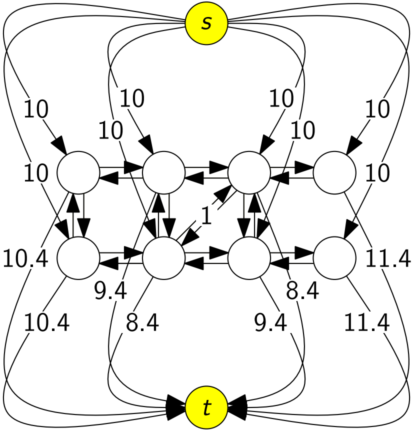
t を終点とする辺の容量 $= \underbrace{m + 2 \cdot \text{密度保証}}_{=12.4} -$ 始点に隣接する頂点数

最密部分グラフ問題：最小カット問題としての定式化 (7)



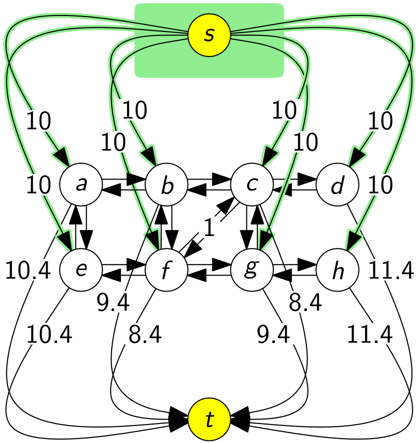
その他の辺の容量 $= 1$

最密部分グラフ問題：最小カット問題としての定式化 — 完了



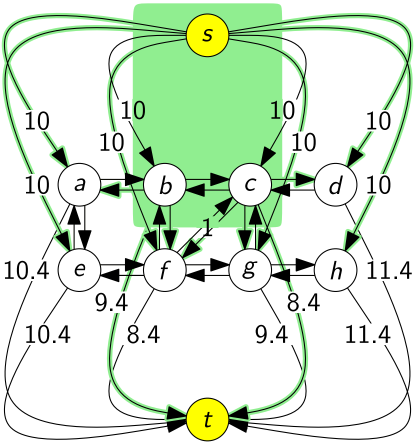
これで定式化が完了

最密部分グラフ問題：カットを見てみる (1)



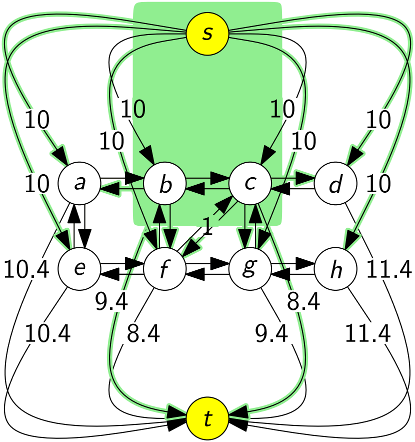
このカットの容量 $= 80 = mn$
よって，最小カットの容量 ≤ 80

最密部分グラフ問題：カットを見てみる (2)



このカットの容量 $= 82.8 > 80 = mn$

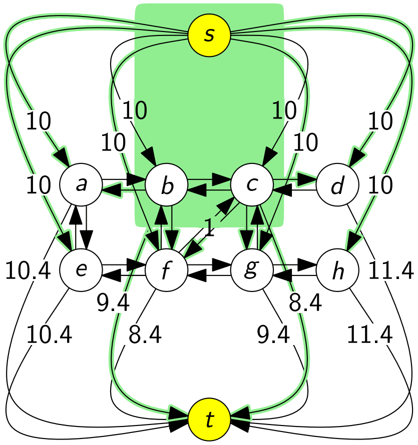
最密部分グラフ問題：カットを見てみる (2)



このカットの容量 $= 82.8 > 80 = mn$

このカットの容量 $= 80 + 2 \cdot 2 \cdot (1.2 - 0.5)$

最密部分グラフ問題：カットを見てみる (2)

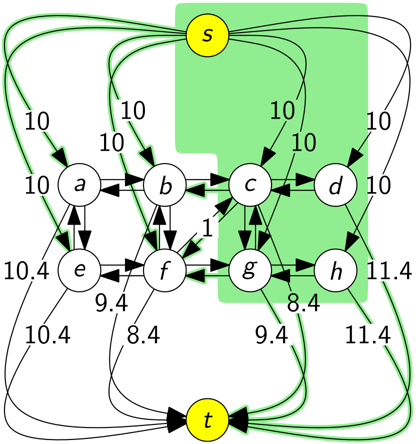


このカットの容量 $= 82.8 > 80 = mn$

このカットの容量 $= 80 + 2 \cdot 2 \cdot (1.2 - 0.5)$

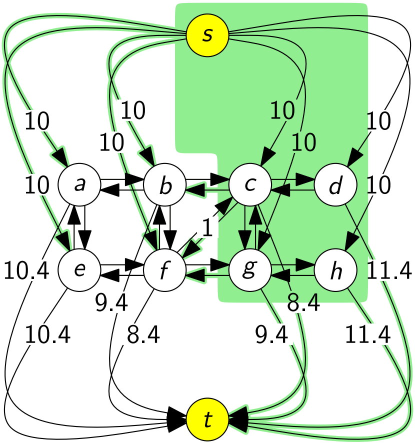
$= mn + 2 \cdot |\{b, c\}| \cdot$ (**密度保証** $- \{b, c\}$ **の密度**)

最密部分グラフ問題：カットを見てみる (3)



このカットの容量 $= 83.6 > 80 = mn$

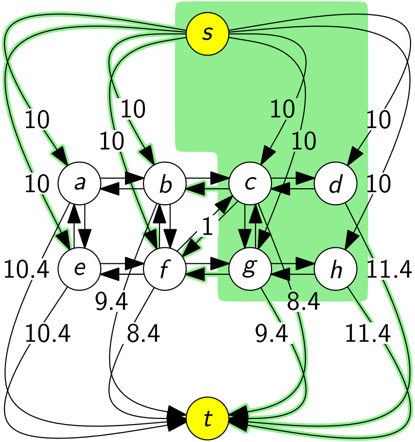
最密部分グラフ問題：カットを見てみる (3)



このカットの容量 $= 83.6 > 80 = mn$

このカットの容量 $= 80 + 2 \cdot 4 \cdot (1.2 - 0.75)$

最密部分グラフ問題：カットを見てみる (3)

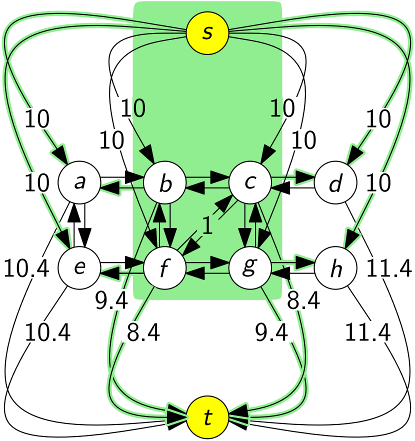


このカットの容量 $= 83.6 > 80 = mn$

このカットの容量 $= 80 + 2 \cdot 4 \cdot (1.2 - 0.75)$

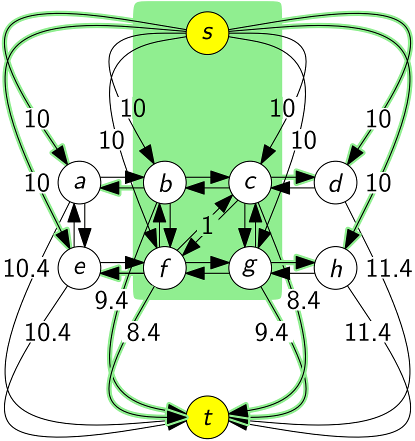
$= mn + 2 \cdot |\{c, d, g, h\}| \cdot$(**密度保証**$-\{c, d, g, h\}$ **の密度**)

最密部分グラフ問題：カットを見てみる (4)



このカットの容量 $= 79.6 < 80 = mn$

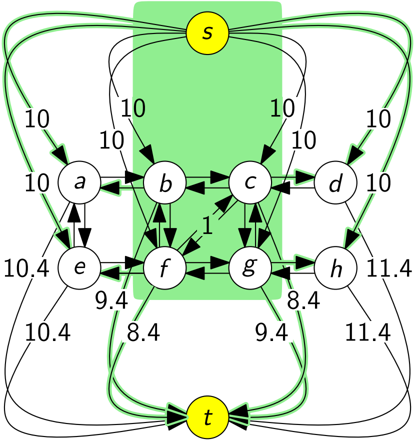
最密部分グラフ問題：カットを見てみる (4)



このカットの容量 $= 79.6 < 80 = mn$

このカットの容量 $= 80 + 2 \cdot 4 \cdot (1.2 - 1.25)$

最密部分グラフ問題：カットを見てみる (4)

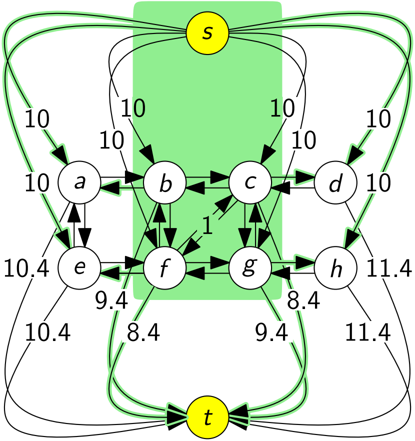


このカットの容量 $= 79.6 < 80 = mn$

このカットの容量 $= 80 + 2 \cdot 4 \cdot (1.2 - 1.25)$

$= mn + 2 \cdot |\{b, c, f, g\}| \cdot$(**密度保証**$-\{b, c, f, g\}$ **の密度**)

最密部分グラフ問題：カットを見てみる (4) 続き

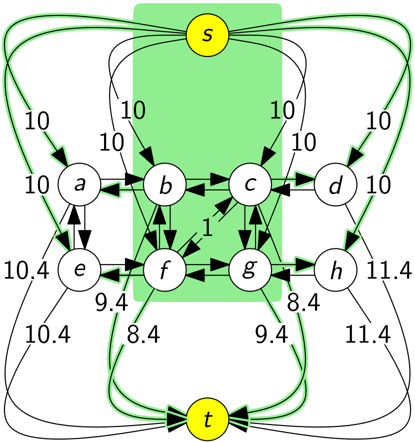


すなわち，密度保証$-\{b, c, f, g\}$ の密度 < 0

$\therefore \{b, c, f, g\}$ の密度 $>$ 密度保証

$\therefore \{b, c, f, g\}$ は密度の高い部分

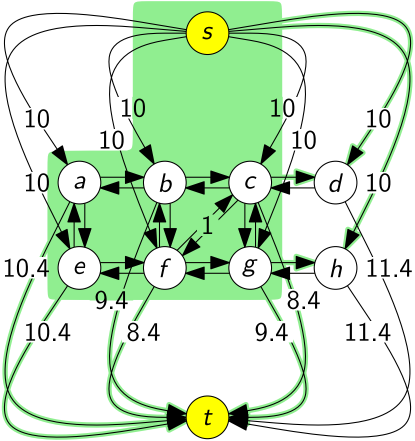
最密部分グラフ問題：カットを見てみる (4) 続きの続き



つまり，最小カットを計算して (Goldberg '84)

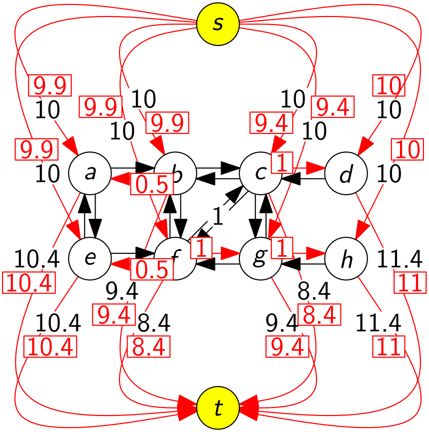
その容量 $< mn$ ならば，そこから密度の高い部分が見つかる

最密部分グラフ問題：最小カット



このカットの容量 $= 78.4 < 80 = mn$ **で，これは最小カット**

最密部分グラフ問題：最大流



なぜなら，この流れの流量 $= 78.4$ だから

目次

今日のまとめと今後の予告

今日の目標

- 最大流問題を使って，次の問題を解く
  - リーグ戦における優勝可能性判定問題
  - 露天掘り問題
  - 最密部分グラフ問題

[復習] 2 つの重要な定理：最大流最小カット定理，整数流定理

今後の予告：ネットワークに関わる 3 つの最適化問題

済 最短路問題

済 最大流問題

　済 最大流問題の応用
  - 注：最大流問題の応用は他にもたくさんある

- 最小費用流問題

注：ネットワークに関わる最適化問題は他にもたくさんある

目次