最適化手法 第 6 回
整数計画法 (5)：切除平面法

岡本 吉央
okamotoy@uec.ac.jp

2013 年 5 月 24 日

最終更新：2013 年 5 月 24 日　17:28

今日の概要

今日の目標

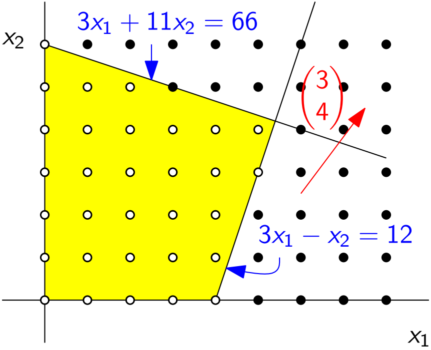
- **切除平面法の原理を理解する**
- Gomory–Chvátal **カットを用いて整数計画問題が解けるようになる**

今日考えたい問題：整数計画問題を解く

例題

$$\begin{array}{ll} \underset{x_1,x_2}{\textbf{最大化}} & 3x_1 + 4x_2 \\ \textbf{条　件} & 3x_1 - x_2 \leq 12, 3x_1 + 11x_2 \leq 66, x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, \\ & x_1, x_2 \in \mathbb{Z} \end{array}$$

図を描いてみる

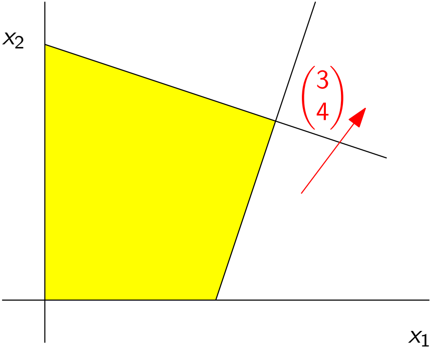


今日考えたい問題：整数計画問題を解く

線形計画緩和

$$\begin{array}{ll} \underset{x_1,x_2}{\textbf{最大化}} & 3x_1 + 4x_2 \\ \textbf{条　件} & 3x_1 - x_2 \leq 12, 3x_1 + 11x_2 \leq 66, x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, \\ & x_1, x_2 \in \mathbb{R} \end{array}$$

図を描いてみる



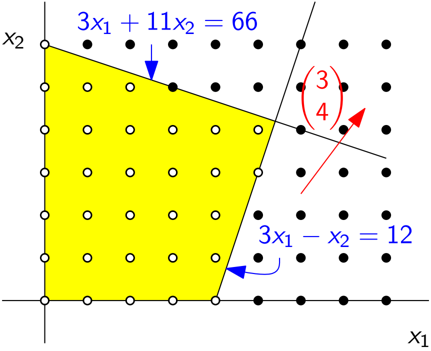
目次

今日考えたい問題：整数計画問題を解く（再掲）

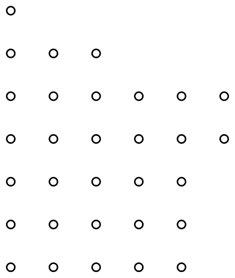
例題

$$\begin{array}{lll} \underset{x_1,x_2}{\textbf{最大化}} & 3x_1 + 4x_2 \\ \textbf{条　件} & 3x_1 - x_2 \leq 12, 3x_1 + 11x_2 \leq 66, x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, \\ & x_1, x_2 \in \mathbb{Z} \end{array}$$

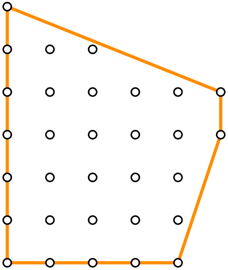
図を描いてみる



整数計画問題の許容領域を見てみる

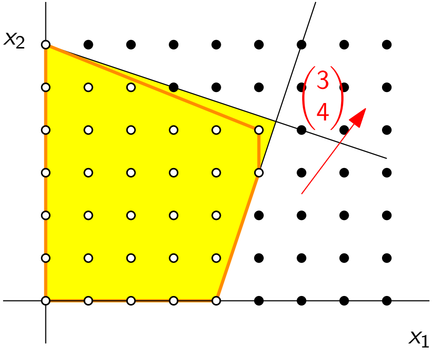


この点全部を囲むような最小の凸多角形を描いてみる

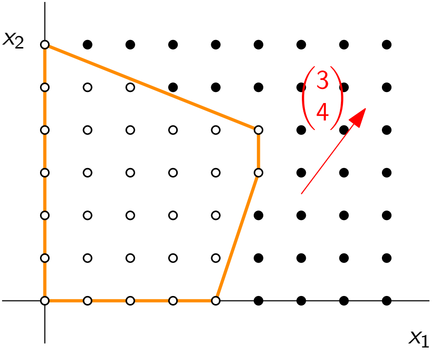


この点集合の凸包（とつほう）と呼ばれる

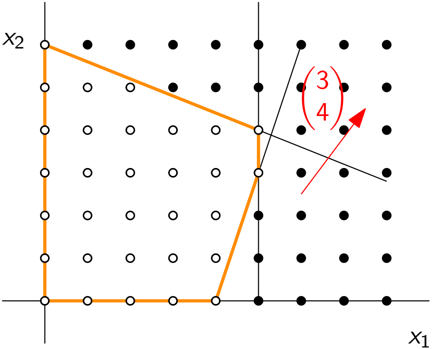
この凸多角形は線形計画緩和の許容領域に含まれる



この凸包だけに注目する



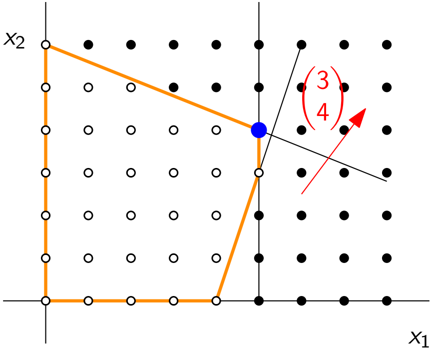
凸包を不等式で表現する



この操作によって得られた線形計画問題

$$\begin{aligned}
&\textbf{最大化}_{x_1,x_2} && 3x_1 + 4x_2\\
&\textbf{条　件} && 3x_1 - x_2 \le 12, 2x_1 + 5x_2 \le 30, x_1 \le 5, x_1 \ge 0, x_2 \ge 0,\\
& && x_1, x_2 \in \mathbb{R}
\end{aligned}$$

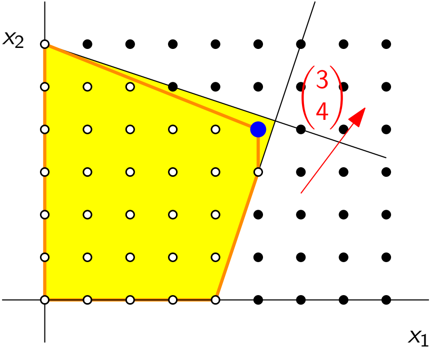
得られた線形計画問題を解く



この操作によって得られた線形計画問題

$$\begin{array}{ll} \underset{x_1,x_2}{\textbf{最大化}} & 3x_1 + 4x_2 \\ \textbf{条　件} & 3x_1 - x_2 \leq 12, 2x_1 + 5x_2 \leq 30, x_1 \leq 5, x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, \\ & x_1, x_2 \in \mathbb{R} \end{array}$$

これは解きたかった整数計画問題の最適解



この操作によって得られた線形計画問題

$$\begin{aligned} \underset{x_1,x_2}{\textbf{最大化}} \quad & 3x_1 + 4x_2 \\ \textbf{条\quad 件} \quad & 3x_1 - x_2 \leq 12, 2x_1 + 5x_2 \leq 30, x_1 \leq 5, x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, \\ & x_1, x_2 \in \mathbb{R} \end{aligned}$$

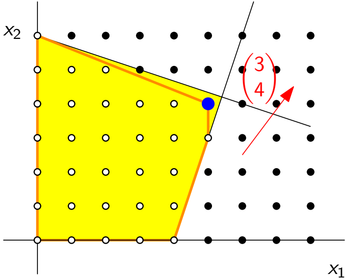
切除平面法が行いたいこと

必ず成り立つこと

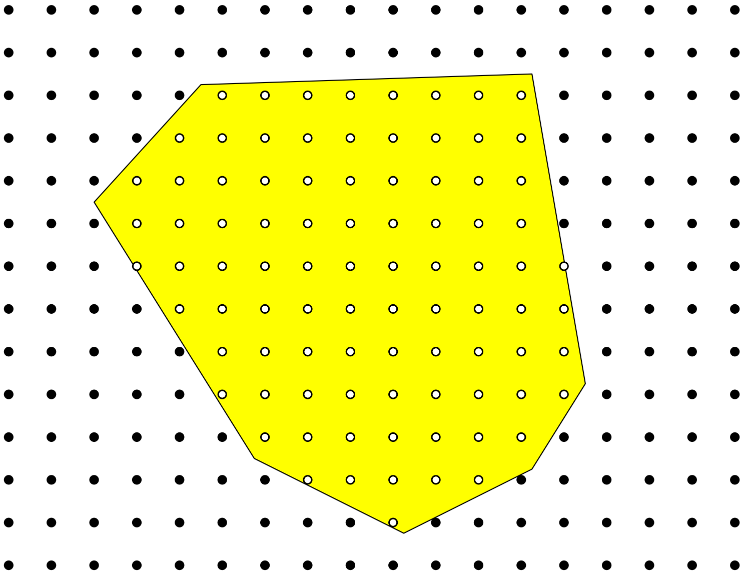
整数計画問題の許容領域の凸包 $\subseteq$ 線形計画緩和の許容領域

行いたいこと

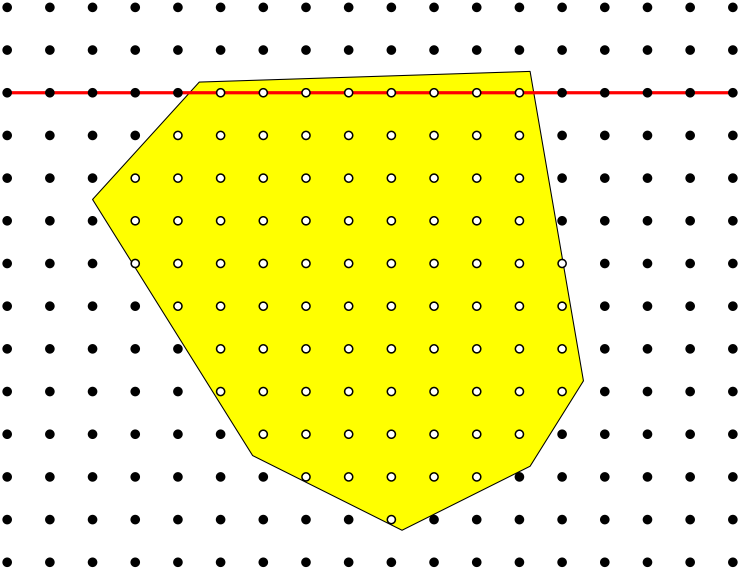
線形計画緩和の許容領域を切っていくことで，
整数計画問題の許容領域の凸包を作ること



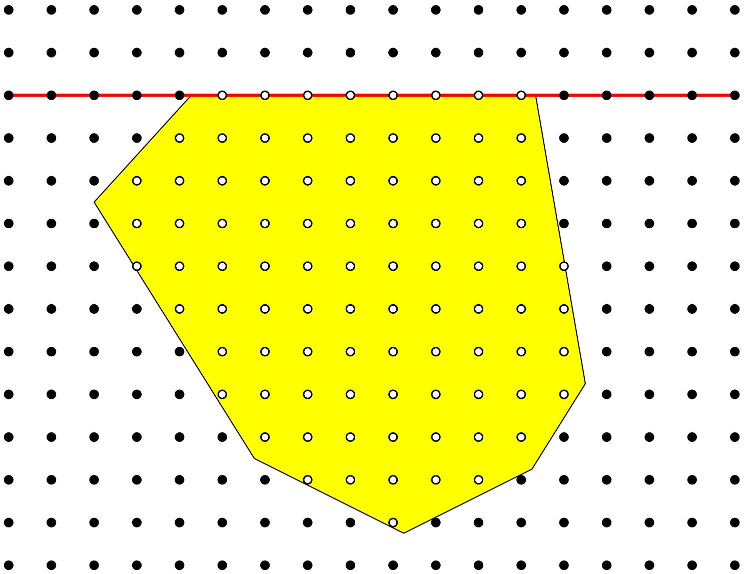
「切っていく」イメージ ⇝ 切除平面 (cutting plane)



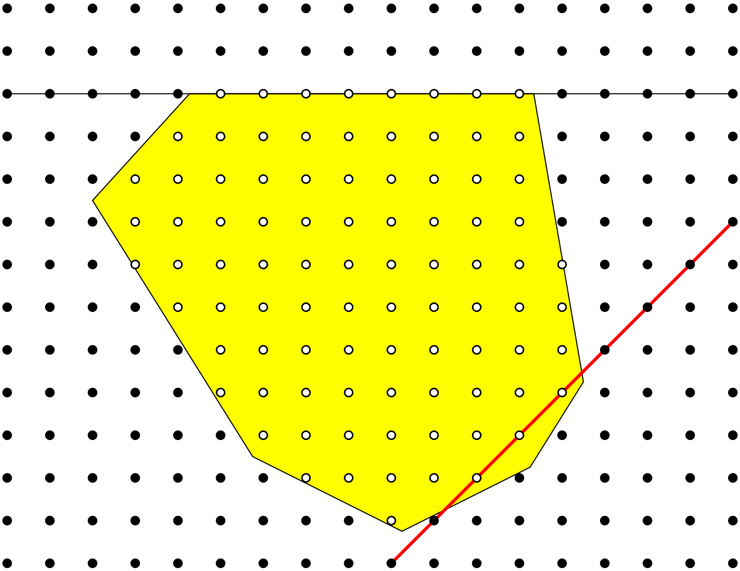
「切っていく」イメージ ⇝ 切除平面 (cutting plane)



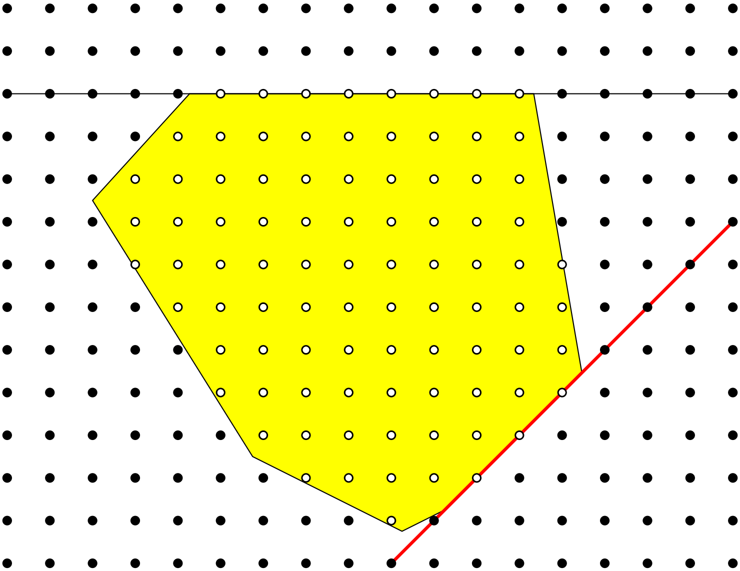
「切っていく」イメージ ⇝ 切除平面 (cutting plane)



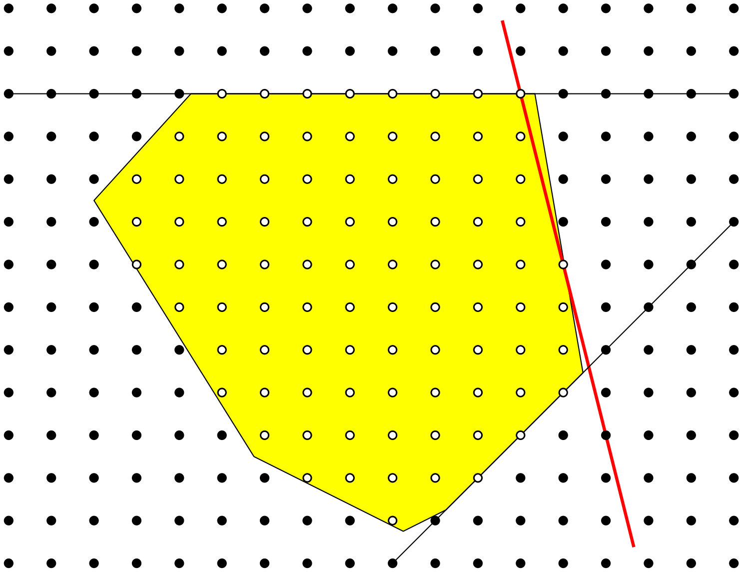
「切っていく」イメージ ⇝ 切除平面 (cutting plane)



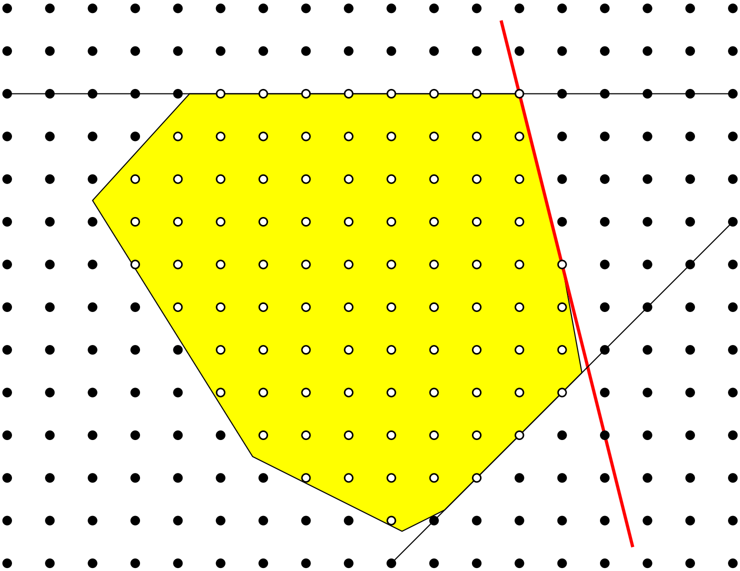
「切っていく」イメージ ⇝ 切除平面 (cutting plane)



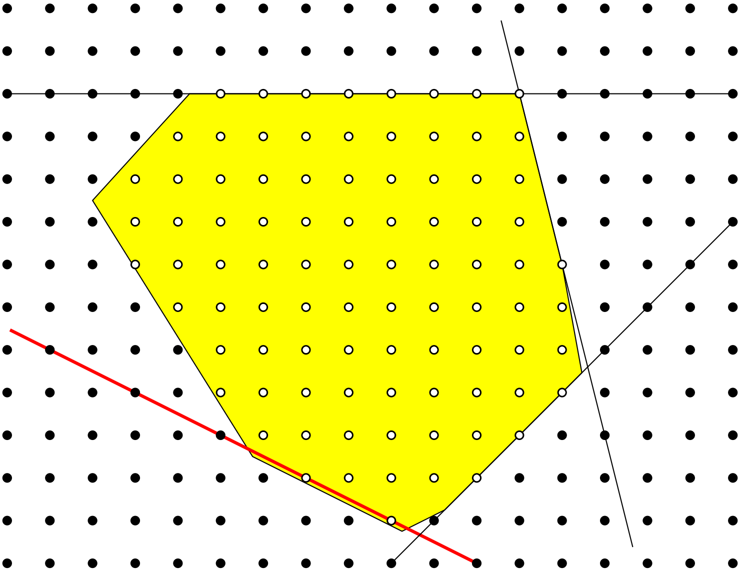
「切っていく」イメージ ⇝ 切除平面 (cutting plane)



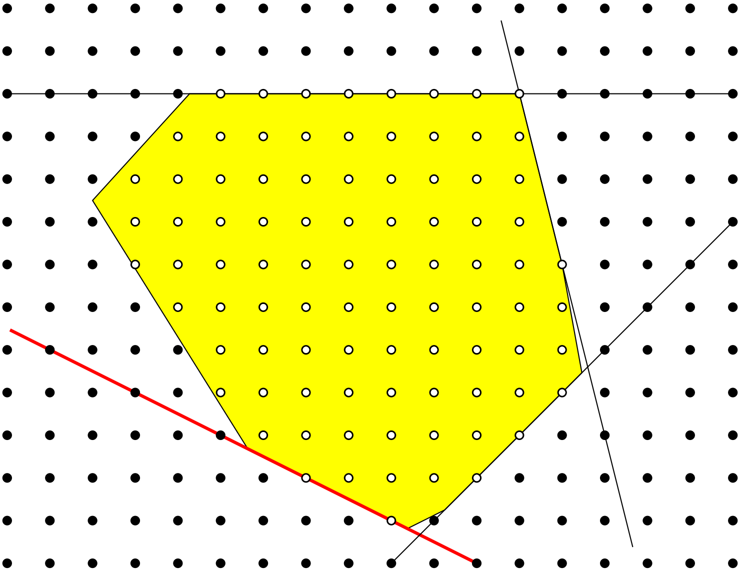
「切っていく」イメージ ⇝ 切除平面 (cutting plane)



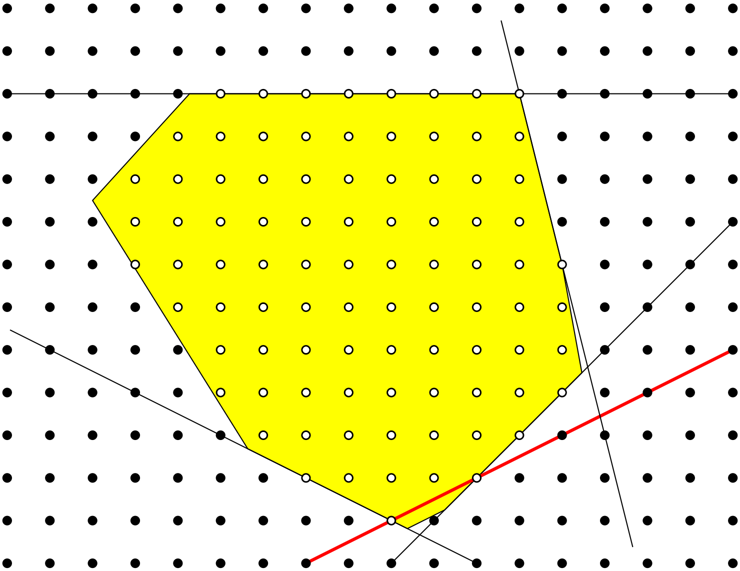
「切っていく」イメージ ⇝ 切除平面 (cutting plane)



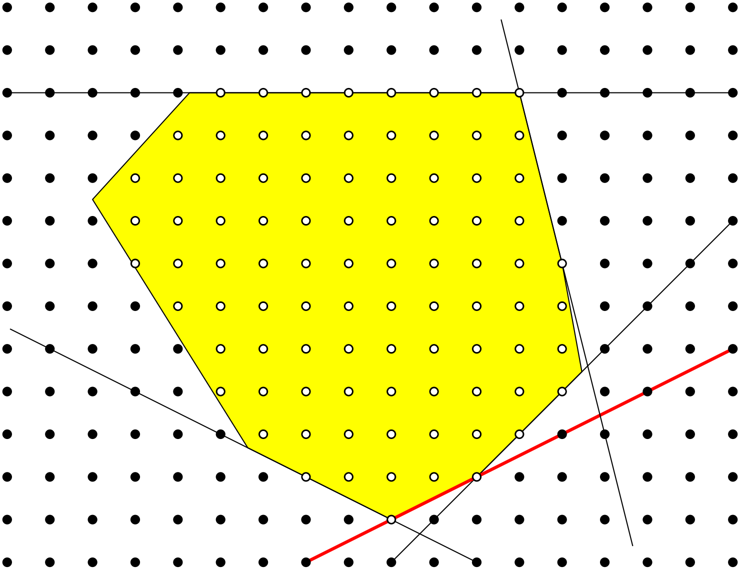
「切っていく」イメージ ⇝ 切除平面 (cutting plane)



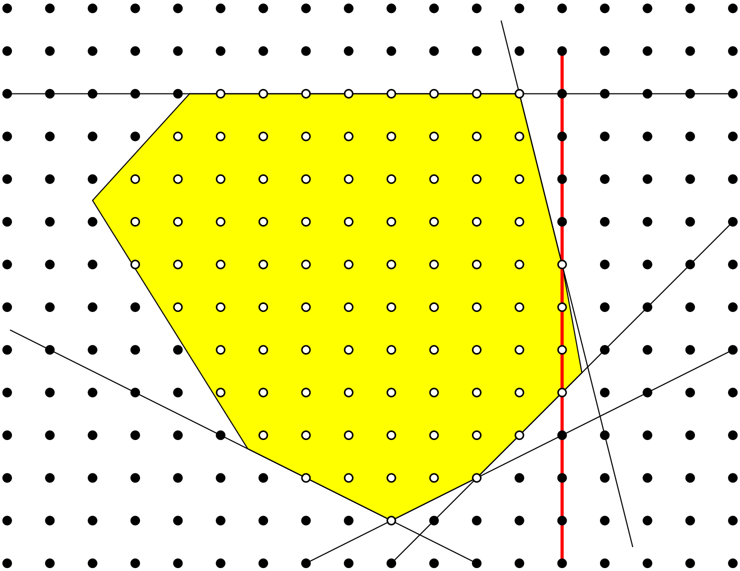
「切っていく」イメージ ⇝ 切除平面 (cutting plane)



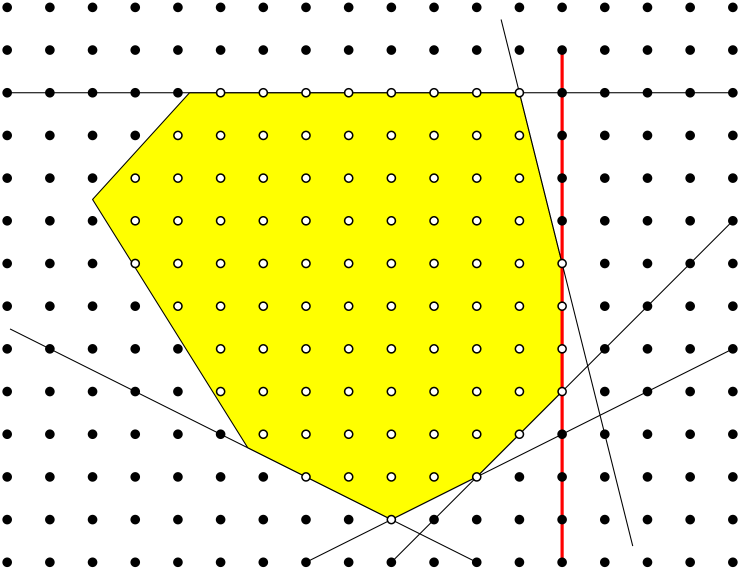
「切っていく」イメージ ⇝ 切除平面 (cutting plane)



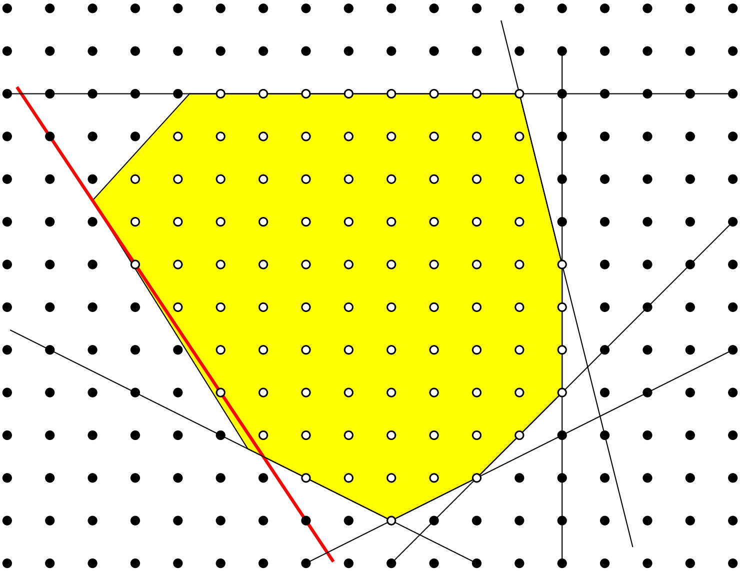
「切っていく」イメージ ⇝ 切除平面 (cutting plane)



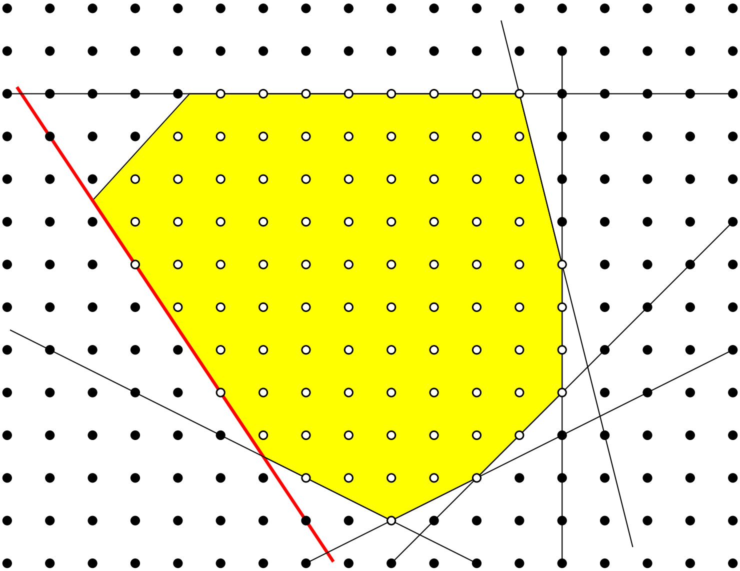
「切っていく」イメージ ⇝ 切除平面 (cutting plane)



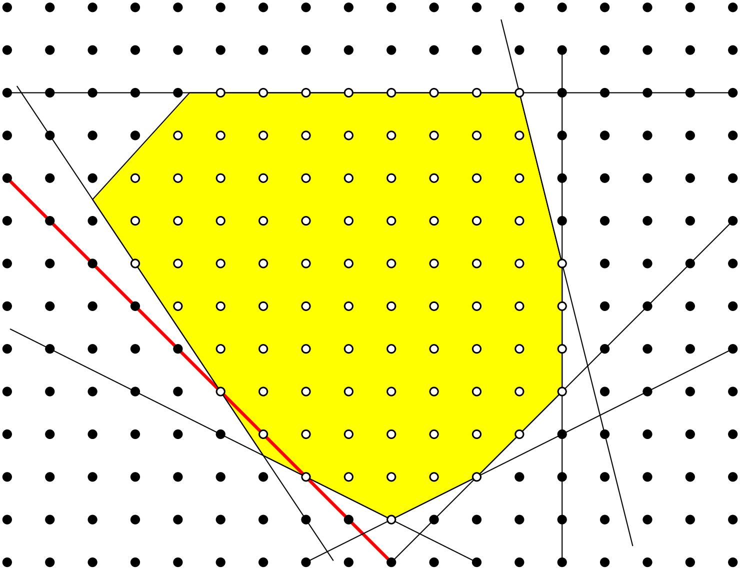
「切っていく」イメージ ⇝ 切除平面 (cutting plane)



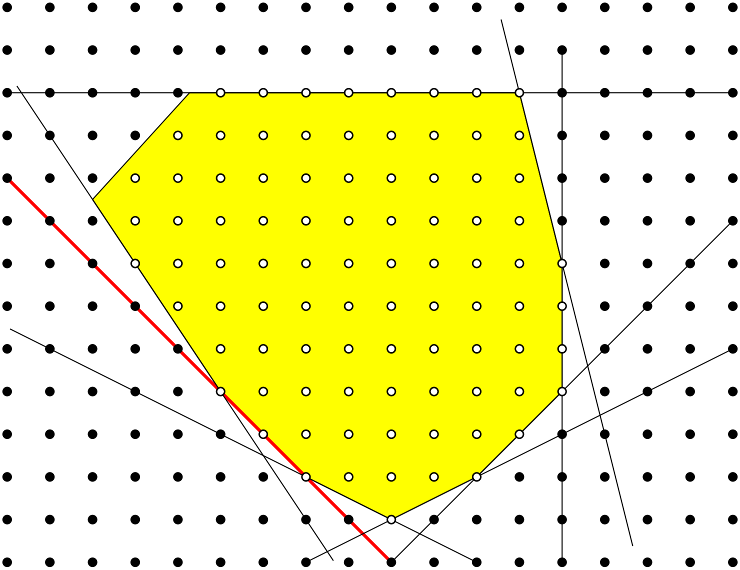
「切っていく」イメージ ⇝ 切除平面 (cutting plane)



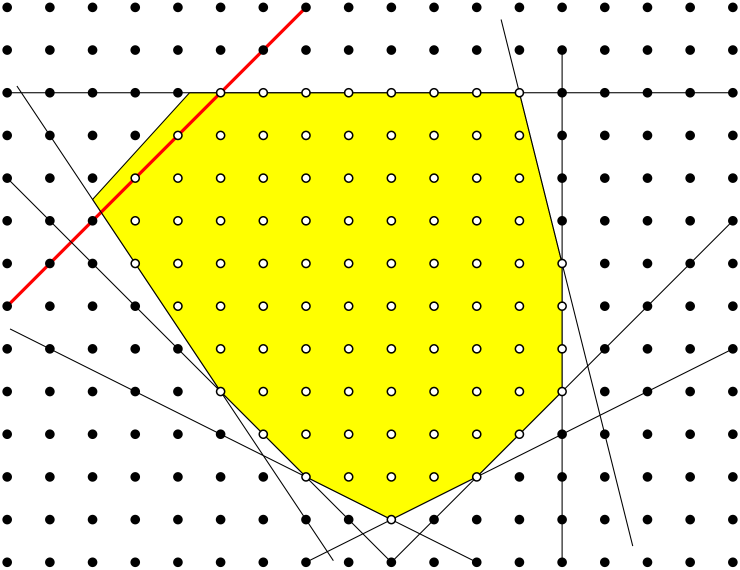
「切っていく」イメージ ⇝ 切除平面 (cutting plane)



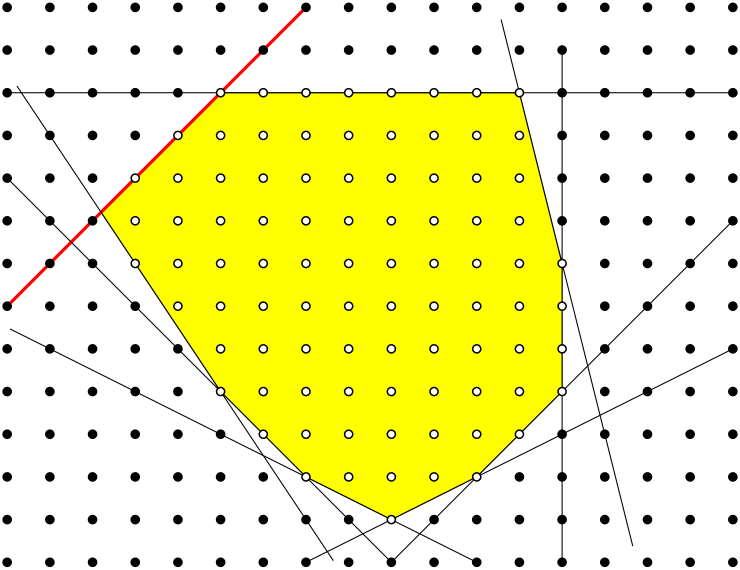
「切っていく」イメージ ⇝ 切除平面 (cutting plane)



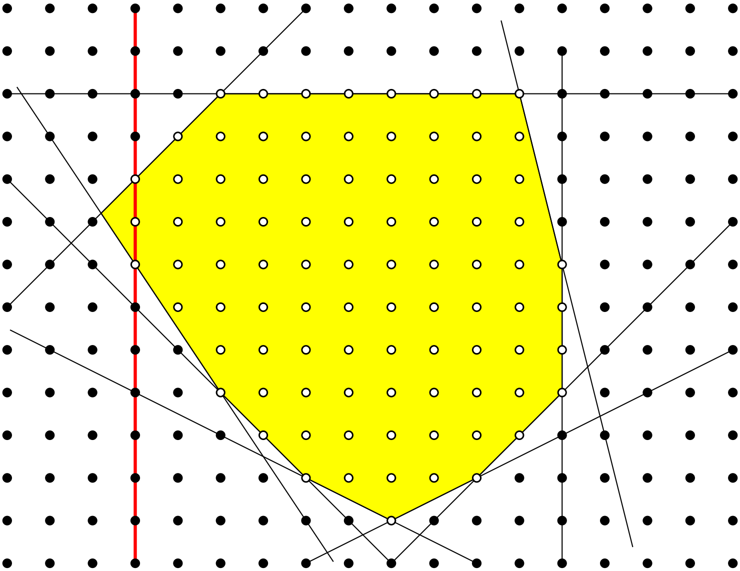
「切っていく」イメージ ⇝ 切除平面 (cutting plane)



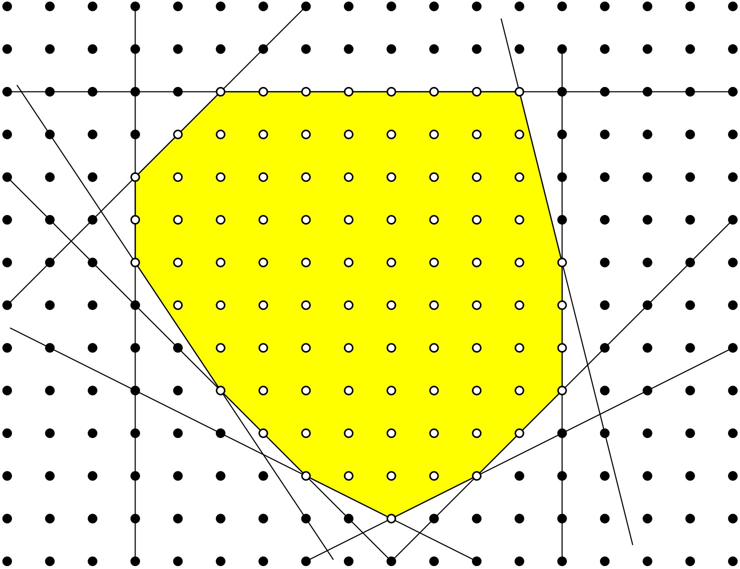
「切っていく」イメージ ⇝ 切除平面 (cutting plane)



「切っていく」イメージ ⇝ 切除平面 (cutting plane)



「切っていく」イメージ ⇝ 切除平面 (cutting plane)



目次

切除平面法のアイディア

切除平面法の基本的なアイディア

制約を追加することによって，線形計画緩和の許容領域を小さくする

制約を追加する方法

1. 解く前に追加する
2. 解きながら追加する

いまから見ていく方法

小数カット (fractional cut) を解く前に追加する

今日考えたい問題：整数計画問題を解く (再掲)

例題

$$\begin{array}{ll} \underset{x_1, x_2}{\textbf{最大化}} & 3x_1 + 4x_2 \\ \textbf{条　件} & 3x_1 - x_2 \le 12, 3x_1 + 11x_2 \le 66, x_1 \ge 0, x_2 \ge 0, \\ & x_1, x_2 \in \mathbb{Z} \end{array}$$

次に注意

- $x_1 \ge 0$, $x_2 \ge 0$ **(変数の非負性)**
- $x_1 \in \mathbb{Z}$, $x_2 \in \mathbb{Z}$ **(変数の整数性)**

小数カット (1)

例題

$$\begin{array}{ll} \underset{x_1,x_2}{\textbf{最大化}} & 3x_1 + 4x_2 \\ \textbf{条　件} & 3x_1 - x_2 \leq 12, 3x_1 + 11x_2 \leq 66, x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, \\ & x_1, x_2 \in \mathbb{Z} \end{array}$$

第 1 の制約と第 2 の制約を見てみる

$$\begin{aligned} 3x_1 - x_2 &\leq 12 \\ 3x_1 + 11x_2 &\leq 66 \end{aligned}$$

小数カット (2)

例題

$$\begin{array}{ll} \displaystyle\mathop{\textbf{最大化}}_{x_1,x_2} & 3x_1 + 4x_2 \\ \textbf{条　件} & 3x_1 - x_2 \leq 12, 3x_1 + 11x_2 \leq 66, x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, \\ & x_1, x_2 \in \mathbb{Z} \end{array}$$

第 1 の制約を 10 倍する

$$\begin{aligned} 30x_1 - 10x_2 &\leq 120 \\ 3x_1 + 11x_2 &\leq 66 \end{aligned}$$

小数カット (3)

例題

$$\begin{array}{ll} \underset{x_1, x_2}{\textbf{最大化}} & 3x_1 + 4x_2 \\ \textbf{条　件} & 3x_1 - x_2 \leq 12, 3x_1 + 11x_2 \leq 66, x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, \\ & x_1, x_2 \in \mathbb{Z} \end{array}$$

この 2 式を足す

$$\begin{array}{rcl} 30x_1 - 10x_2 & \leq & 120 \\ 3x_1 + 11x_2 & \leq & 66 \\ \therefore 33x_1 + x_2 & \leq & 186 \end{array}$$

上の整数計画問題の許容解は，得られた不等式を満たす

小数カット (4)

例題

$$\max_{x_1,x_2} \quad 3x_1 + 4x_2$$

条　件　$3x_1 - x_2 \le 12, 3x_1 + 11x_2 \le 66, x_1 \ge 0, x_2 \ge 0,$
$x_1, x_2 \in \mathbb{Z}$

今得られた式

$$33x_1 + x_2 \quad \le \quad 186$$

小数カット (4)

例題

$$\begin{array}{ll} \underset{x_1, x_2}{\textbf{最大化}} & 3x_1 + 4x_2 \\ \textbf{条　件} & 3x_1 - x_2 \leq 12, 3x_1 + 11x_2 \leq 66, x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, \\ & x_1, x_2 \in \mathbb{Z} \end{array}$$

今得られた式の両辺を 33 **で割る** (x_1 **の係数が** 1 **になった**)

$$\begin{aligned} 33x_1 + x_2 &\leq 186 \\ x_1 + \frac{1}{33}x_2 &\leq \frac{186}{33} \end{aligned}$$

小数カット (5)

例題

$$\begin{array}{ll} \underset{x_1, x_2}{\textbf{最大化}} & 3x_1 + 4x_2 \\ \textbf{条　件} & 3x_1 - x_2 \leq 12, 3x_1 + 11x_2 \leq 66, x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, \\ & x_1, x_2 \in \mathbb{Z} \end{array}$$

今得られた式

$$x_1 + \frac{1}{33}x_2 \quad \leq \quad \frac{186}{33}$$

小数カット (5)

例題

$$\begin{array}{ll} \underset{x_1, x_2}{\textbf{最大化}} & 3x_1 + 4x_2 \\ \textbf{条　件} & 3x_1 - x_2 \leq 12, 3x_1 + 11x_2 \leq 66, x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, \\ & x_1, x_2 \in \mathbb{Z} \end{array}$$

今得られた式の左辺の係数を切り下げる

$$\begin{aligned} x_1 + \frac{1}{33}x_2 &\leq \frac{186}{33} \\ x_1 + \left\lfloor \frac{1}{33} \right\rfloor x_2 &\leq \frac{186}{33} \end{aligned}$$

変数の非負性から，
上の整数計画問題の許容解は，得られた不等式を満たす

小数カット (6)

例題

$$\begin{array}{ll} \underset{x_1, x_2}{\textbf{最大化}} & 3x_1 + 4x_2 \\ \textbf{条\quad件} & 3x_1 - x_2 \leq 12, 3x_1 + 11x_2 \leq 66, x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, \\ & x_1, x_2 \in \mathbb{Z} \end{array}$$

今得られた式

$$x_1 \leq \frac{186}{33}$$

小数カット (6)

例題

$$\begin{array}{ll} \displaystyle\mathop{\textbf{最大化}}_{x_1,x_2} & 3x_1 + 4x_2 \\ \textbf{条　件} & 3x_1 - x_2 \le 12, 3x_1 + 11x_2 \le 66, x_1 \ge 0, x_2 \ge 0, \\ & x_1, x_2 \in \mathbb{Z} \end{array}$$

今得られた式の右辺を切り下げる $(186/33 = 5.63...)$

$$\begin{aligned} x_1 &\le \frac{186}{33} \\ x_1 &\le \left\lfloor \frac{186}{33} \right\rfloor \end{aligned}$$

変数の整数性から，左辺は整数なので
上の整数計画問題の許容解は，得られた不等式を満たす

小数カット (7)

例題

$$\begin{array}{ll} \underset{x_1, x_2}{\textbf{最大化}} & 3x_1 + 4x_2 \\ \textbf{条　件} & 3x_1 - x_2 \leq 12, 3x_1 + 11x_2 \leq 66, x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, \\ & x_1, x_2 \in \mathbb{Z} \end{array}$$

今得られた式

$$x_1 \quad \leq \quad 5$$

これを線形計画緩和に追加する

小数カットによる緩和の強化 (1)

線形計画緩和

$$\begin{array}{ll} \underset{x_1,x_2}{\textbf{最大化}} & 3x_1 + 4x_2 \\ \textbf{条　件} & 3x_1 - x_2 \leq 12, 3x_1 + 11x_2 \leq 66, x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, \\ & x_1, x_2 \in \mathbb{R} \end{array}$$

得られた制約を付け加えた線形計画緩和

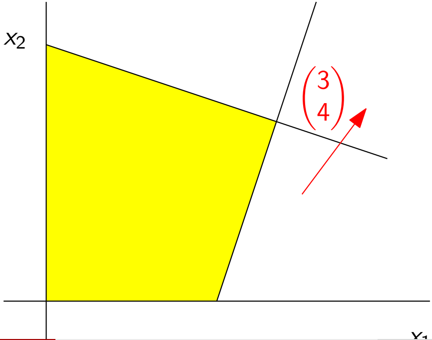
$$\begin{array}{ll} \underset{x_1,x_2}{\textbf{最大化}} & 3x_1 + 4x_2 \\ \textbf{条　件} & 3x_1 - x_2 \leq 12, 3x_1 + 11x_2 \leq 66, x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, \\ & x_1 \leq 5, \\ & x_1, x_2 \in \mathbb{R} \end{array}$$

小数カットによる緩和の強化 (2)

線形計画緩和

$$\begin{array}{ll} \underset{x_1,x_2}{\textbf{最大化}} & 3x_1 + 4x_2 \\ \textbf{条　件} & 3x_1 - x_2 \leq 12, 3x_1 + 11x_2 \leq 66, x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, \\ & x_1, x_2 \in \mathbb{R} \end{array}$$

図を描いてみる

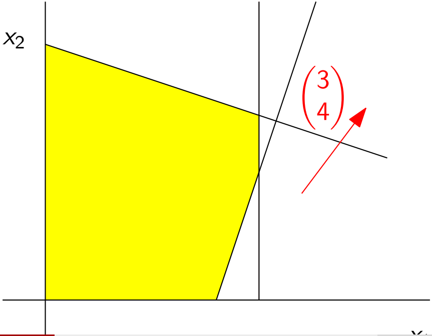


小数カットによる緩和の強化 (3)

得られた制約を付け加えた線形計画緩和

$$\begin{array}{ll}\underset{x_1,x_2}{\textbf{最大化}} & 3x_1 + 4x_2 \\ \textbf{条　件} & 3x_1 - x_2 \leq 12, 3x_1 + 11x_2 \leq 66, x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, \\ & x_1 \leq 5, x_1, x_2 \in \mathbb{R}\end{array}$$

図を描いてみる (線形計画緩和の許容領域が切られた！)



小数カットによる緩和の強化：まとめ

仮定

変数の非負性，変数の整数性

小数カットを得る手続

1. 制約に適当な非負実数を掛けて，足し合わせる
2. 適当な非負実数で割る
3. 左辺の係数を切り下げる (変数の非負性を利用)
4. 右辺を切り下げる (変数の整数性を利用)

問題点

- 「適当な非負実数」をどのように見つければよいか定かではない
- うまく行わないと，線形計画緩和の許容領域が切られない

次に説明する Gomory–Chvátal カットは，必ず切れるように制約を作る

目次

切除平面法のアイディア

切除平面法の基本的なアイディア

制約を追加することによって，線形計画緩和の許容領域を小さくする

制約を追加する方法

1. **解く前に追加する**
2. **解きながら追加する**

いまから見ていく方法

Gomory–Chvátal **カット** (**ある種の小数カット**) **を解きながら追加する**

Ralph Gomory と Vašek Chvátal

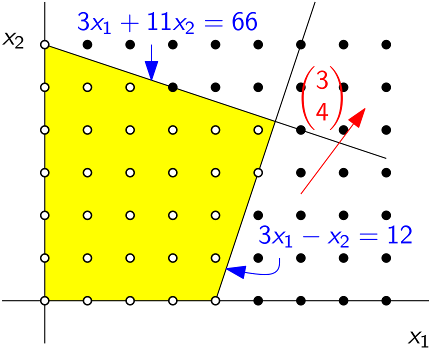
Ralph Gomory
ラルフ・ゴモリー
(1929–)

Vašek Chvátal
ヴァシェク・フヴァタル
(1946–)

Gomory–Chvátal カットによる解法

例題

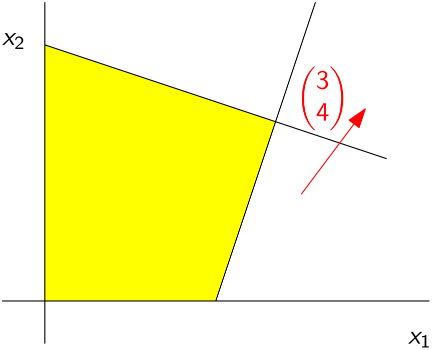
$$\begin{array}{ll} \underset{x_1,x_2}{\textbf{最大化}} & 3x_1 + 4x_2 \\ \textbf{条　件} & 3x_1 - x_2 \leq 12, 3x_1 + 11x_2 \leq 66, x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, \\ & x_1, x_2 \in \mathbb{Z} \end{array}$$



Gomory–Chvátal カットによる解法：第 1 段階 (1)

線形計画緩和

$$\begin{array}{ll} \underset{x_1, x_2}{\textbf{最大化}} & 3x_1 + 4x_2 \\ \textbf{条　件} & 3x_1 - x_2 \leq 12, 3x_1 + 11x_2 \leq 66, x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, \\ & x_1, x_2 \in \mathbb{R} \end{array}$$



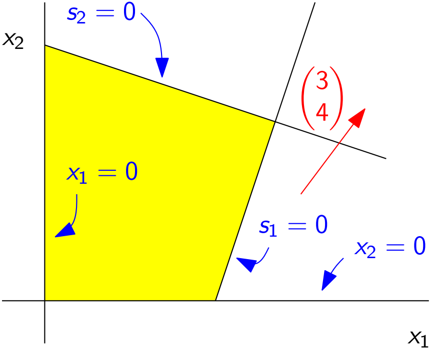
これを解いてみる

Gomory–Chvátal カットによる解法：第 1 段階 (2)

線形計画緩和：スラック変数の導入

$$\begin{array}{ll} \underset{x,s}{\textbf{最大化}} & 3x_1 + 4x_2 \\ \textbf{条　件} & 3x_1 - x_2 + s_1 = 12, \\ & 3x_1 + 11x_2 + s_2 = 66, \\ & x_1, x_2, s_1, s_2 \geq 0 \end{array}$$

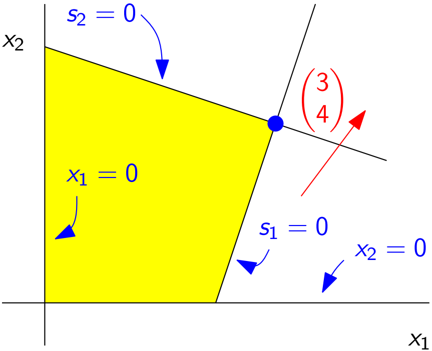
注： $x_1, x_2 \in \mathbb{Z} \Rightarrow s_1, s_2 \in \mathbb{Z}$



Gomory–Chvátal カットによる解法：第 1 段階 (3)

線形計画緩和：スラック変数の導入

$$\begin{array}{ll} \underset{x,s}{\textbf{最大化}} & 3x_1 + 4x_2 \\ \textbf{条　件} & 3x_1 - x_2 + s_1 = 12, \\ & 3x_1 + 11x_2 + s_2 = 66, \\ & x_1, x_2, s_1, s_2 \geq 0 \end{array}$$



最適解は

$x_1 = \frac{11}{2}, x_2 = \frac{9}{2}, s_1 = 0, s_2 = 0$

これは元の整数計画問題の許容解ではない

線形計画緩和の重要な性質 2 (再掲)

線形計画緩和の最適解が元の整数計画問題の許容解 ⇒
それは元の整数計画問題の最適解

Gomory–Chvátal カットによる解法：第 1 段階 (4)

Gomory–Chvátal カットの生成法

最適解において非整数が割り当てられた変数を，
0 が割り当てられた変数 (より正確には非基底変数) と定数の線形結合で書く

線形計画緩和：スラック変数の導入

$$\begin{array}{|ll} \text{最大化}_{x,s} & 3x_1 + 4x_2 \\ \text{条　件} & 3x_1 - x_2 + s_1 = 12, 3x_1 + 11x_2 + s_2 = 66, x_1, x_2, s_1, s_2 \geq 0 \end{array}$$

例えば，x_1 を s_1, s_2 と定数の線形結合で書く

$$\begin{array}{rrcl} \text{第 1 式の 11 倍} & 33x_1 - 11x_2 + 11s_1 & = & 132 \\ \text{第 2 式} & 3x_1 + 11x_2 + s_2 & = & 66 \\ \text{足すと} & 36x_1 + 11s_1 + s_2 & = & 198 \\ \text{整理して} & x_1 & = & \frac{11}{2} - \frac{11}{36}s_1 - \frac{1}{36}s_2 \end{array}$$

Gomory–Chvátal カットによる解法：第 1 段階 (5)

得られた式

$$x_1 = \frac{11}{2} - \frac{11}{36}s_1 - \frac{1}{36}s_2$$

Gomory–Chvátal カットによる解法：第 1 段階 (5)

得られた式の変数と定数を分離

$$\begin{aligned} x_1 &= \frac{11}{2} - \frac{11}{36}s_1 - \frac{1}{36}s_2 \\ x_1 + \frac{11}{36}s_1 + \frac{1}{36}s_2 &= \frac{11}{2} \end{aligned}$$

Gomory–Chvátal カットによる解法：第 1 段階 (5)

得られた式の変数と定数を分離

$$\begin{aligned} x_1 &= \frac{11}{2} - \frac{11}{36}s_1 - \frac{1}{36}s_2 \\ x_1 + \frac{11}{36}s_1 + \frac{1}{36}s_2 &= \frac{11}{2} \\ x_1 + \left\lfloor \frac{11}{36} \right\rfloor s_1 + \left\lfloor \frac{1}{36} \right\rfloor s_2 &\leq \frac{11}{2} \end{aligned}$$

- **変数の非負性から，左辺の係数を切り下げると不等式が得られる**

Gomory–Chvátal カットによる解法：第 1 段階 (5)

得られた式の変数と定数を分離

$$\begin{aligned} x_1 &= \frac{11}{2} - \frac{11}{36}s_1 - \frac{1}{36}s_2 \\ x_1 + \frac{11}{36}s_1 + \frac{1}{36}s_2 &= \frac{11}{2} \\ x_1 + \left\lfloor \frac{11}{36} \right\rfloor s_1 + \left\lfloor \frac{1}{36} \right\rfloor s_2 &\leq \frac{11}{2} \\ x_1 &\leq \frac{11}{2} \end{aligned}$$

- 変数の非負性から，左辺の係数を切り下げると不等式が得られる

Gomory–Chvátal カットによる解法：第 1 段階 (5)

得られた式の変数と定数を分離

$$\begin{aligned}
x_1 &= \frac{11}{2} - \frac{11}{36}s_1 - \frac{1}{36}s_2 \\
x_1 + \frac{11}{36}s_1 + \frac{1}{36}s_2 &= \frac{11}{2} \\
x_1 + \left\lfloor \frac{11}{36} \right\rfloor s_1 + \left\lfloor \frac{1}{36} \right\rfloor s_2 &\leq \frac{11}{2} \\
x_1 &\leq \frac{11}{2} \\
x_1 &\leq \left\lfloor \frac{11}{2} \right\rfloor
\end{aligned}$$

- **変数の非負性から，左辺の係数を切り下げると不等式が得られる**
- **変数の整数性から，右辺を切り下げても，**
  整数計画問題の任意の許容解は得られた不等式を満たす

Gomory–Chvátal カットによる解法：第 1 段階 (5)

得られた式の変数と定数を分離

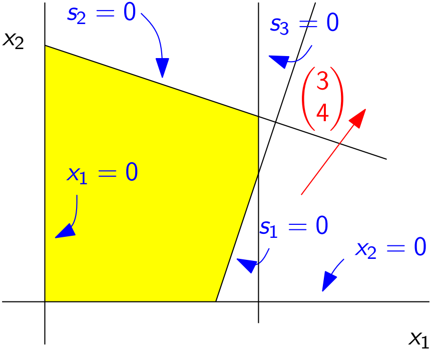
$$\begin{aligned} x_1 &= \frac{11}{2} - \frac{11}{36}s_1 - \frac{1}{36}s_2 \\ x_1 + \frac{11}{36}s_1 + \frac{1}{36}s_2 &= \frac{11}{2} \\ x_1 + \left\lfloor \frac{11}{36} \right\rfloor s_1 + \left\lfloor \frac{1}{36} \right\rfloor s_2 &\leq \frac{11}{2} \\ x_1 &\leq \frac{11}{2} \\ x_1 &\leq \left\lfloor \frac{11}{2} \right\rfloor \\ x_1 &\leq 5 \end{aligned}$$

- 変数の非負性から，左辺の係数を切り下げると不等式が得られる
- 変数の整数性から，右辺を切り下げても，
  整数計画問題の任意の許容解は得られた不等式を満たす
- これが欲しかった制約 $\rightsquigarrow$ 付け加える

Gomory–Chvátal カットによる解法：第 2 段階 (1)

制約を追加した線形計画緩和

$$\begin{array}{ll} \underset{x_1, x_2}{\textbf{最大化}} & 3x_1 + 4x_2 \\ \textbf{条　件} & 3x_1 - x_2 \leq 12, 3x_1 + 11x_2 \leq 66, x_1 \leq 5, x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, \\ & x_1, x_2 \in \mathbb{R} \end{array}$$

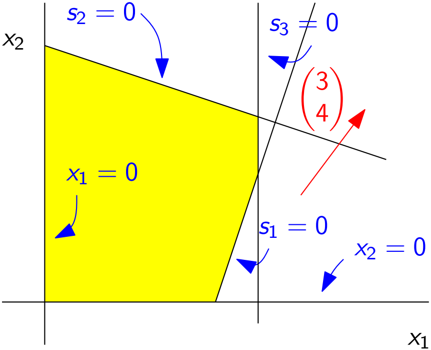


これを解いてみる

Gomory–Chvátal カットによる解法：第 2 段階 (2)

線形計画緩和：スラック変数の導入

$$\begin{array}{ll} \underset{x,s}{\textbf{最大化}} & 3x_1 + 4x_2 \\ \textbf{条　件} & 3x_1 - x_2 + s_1 = 12, \\ & 3x_1 + 11x_2 + s_2 = 66, \\ & x_1 + s_3 = 5, \\ & x_1, x_2, s_1, s_2, s_3 \geq 0 \end{array}$$

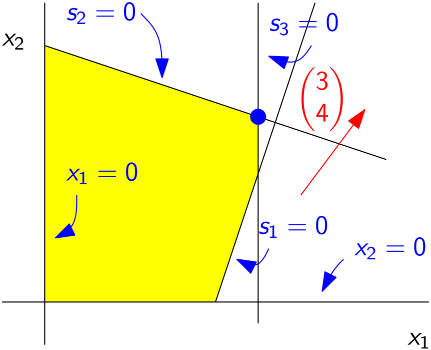


注：$x_1, x_2 \in \mathbb{Z} \Rightarrow s_1, s_2, s_3 \in \mathbb{Z}$

Gomory–Chvátal カットによる解法：第 2 段階 (3)

線形計画緩和：スラック変数の導入

$$\begin{array}{ll}\underset{x,s}{\textbf{最大化}} & 3x_1 + 4x_2 \\ \textbf{条　件} & 3x_1 - x_2 + s_1 = 12, \\ & 3x_1 + 11x_2 + s_2 = 66, \\ & x_1 + s_3 = 5, \\ & x_1, x_2, s_1, s_2, s_3 \geq 0\end{array}$$



- 最適解は $x_1 = 5, x_2 = \frac{51}{11}, s_1 = \frac{18}{11}, s_2 = 0, s_3 = 0$
- これは元の整数計画問題の許容解ではない
- $\rightsquigarrow$ x_2 を s_2, s_3 と定数の線形結合で表す

Gomory–Chvátal カットによる解法：第 2 段階 (4)

線形計画緩和：スラック変数の導入

$$\left|\begin{array}{ll} \mathop{\textbf{最大化}}\limits_{\mathbf{x,s}} & 3x_1 + 4x_2 \\ \textbf{条　件} & 3x_1 - x_2 + s_1 = 12, 3x_1 + 11x_2 + s_2 = 66, x_1 + s_3 = 5, \\ & x_1, x_2, s_1, s_2, s_3 \geq 0 \end{array}\right.$$

$$\begin{array}{rrcl} \textbf{第 2 式より} & 11x_2 & = & 66 - 3x_1 - s_2 \\ \textbf{第 3 式を使うと} & 11x_2 & = & 66 - 3(5 - s_3) - s_2 \\ & & = & 51 - s_2 + 3s_3 \\ \textbf{整理して} & x_2 & = & \frac{51}{11} - \frac{1}{11}s_2 + \frac{3}{11}s_3 \end{array}$$

変数と定数を分けると

$$x_2 + \frac{1}{11}s_2 - \frac{3}{11}s_3 = \frac{51}{11}$$

Gomory–Chvátal カットによる解法：第 2 段階 (5)

今得られた式

$$x_2 + \frac{1}{11}s_2 - \frac{3}{11}s_3 \quad = \quad \frac{51}{11}$$

Gomory–Chvátal カットによる解法：第 2 段階 (5)

今得られた式を使って

$$\begin{aligned} x_2 + \frac{1}{11}s_2 - \frac{3}{11}s_3 &= \frac{51}{11} \\ x_2 + \left\lfloor \frac{1}{11} \right\rfloor s_2 + \left\lfloor -\frac{3}{11} \right\rfloor s_3 &\leq \frac{51}{11} \end{aligned}$$

- **変数の非負性から，左辺の係数を切り下げると不等式が得られる**

Gomory–Chvátal カットによる解法：第 2 段階 (5)

今得られた式を使って

$$\begin{aligned} x_2 + \frac{1}{11}s_2 - \frac{3}{11}s_3 &= \frac{51}{11} \\ x_2 + \left\lfloor \frac{1}{11} \right\rfloor s_2 + \left\lfloor -\frac{3}{11} \right\rfloor s_3 &\leq \frac{51}{11} \\ x_2 - s_3 &\leq \frac{51}{11} \end{aligned}$$

- **変数の非負性から，左辺の係数を切り下げると不等式が得られる**

Gomory–Chvátal カットによる解法：第 2 段階 (5)

今得られた式を使って

$$\begin{aligned} x_2 + \frac{1}{11}s_2 - \frac{3}{11}s_3 &= \frac{51}{11} \\ x_2 + \left\lfloor \frac{1}{11} \right\rfloor s_2 + \left\lfloor -\frac{3}{11} \right\rfloor s_3 &\leq \frac{51}{11} \\ x_2 - s_3 &\leq \frac{51}{11} \\ x_2 - s_3 &\leq \left\lfloor \frac{51}{11} \right\rfloor \end{aligned}$$

- **変数の非負性から，左辺の係数を切り下げると不等式が得られる**
- **変数の整数性から，右辺を切り下げても，整数計画問題の任意の許容解は得られた不等式を満たす**

Gomory–Chvátal カットによる解法：第 2 段階 (5)

今得られた式を使って

$$
\begin{aligned}
x_2 + \frac{1}{11} s_2 - \frac{3}{11} s_3 &= \frac{51}{11} \\
x_2 + \left\lfloor \frac{1}{11} \right\rfloor s_2 + \left\lfloor -\frac{3}{11} \right\rfloor s_3 &\leq \frac{51}{11} \\
x_2 - s_3 &\leq \frac{51}{11} \\
x_2 - s_3 &\leq \left\lfloor \frac{51}{11} \right\rfloor \\
x_2 - s_3 &\leq 4
\end{aligned}
$$

- **変数の非負性から，左辺の係数を切り下げると不等式が得られる**
- **変数の整数性から，右辺を切り下げても，**
  整数計画問題の任意の許容解は得られた不等式を満たす

Gomory–Chvátal カットによる解法：第 2 段階 (6)

今得られた式

$$x_2 - s_3 \leq 4$$

Gomory–Chvátal カットによる解法：第 2 段階 (6)

今得られた式において

$$\begin{aligned} x_2 - s_3 &\leq 4 \\ x_2 - (5 - x_1) &\leq 4 \end{aligned}$$

- **制約** $x_1 + s_3 = 5$ **を使って書き直す**

Gomory–Chvátal カットによる解法：第 2 段階 (6)

今得られた式において

$$\begin{aligned} x_2 - s_3 &\leq 4 \\ x_2 - (5 - x_1) &\leq 4 \\ x_1 + x_2 &\leq 9 \end{aligned}$$

- **制約** $x_1 + s_3 = 5$ **を使って書き直す**

Gomory–Chvátal カットによる解法：第 2 段階 (6)

今得られた式において

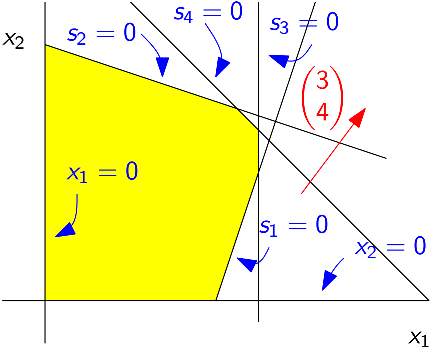
$$\begin{aligned} x_2 - s_3 &\leq 4 \\ x_2 - (5 - x_1) &\leq 4 \\ x_1 + x_2 &\leq 9 \end{aligned}$$

- **制約** $x_1 + s_3 = 5$ **を使って書き直す**
- **これが欲しかった制約** $\rightsquigarrow$ **付け加える**

Gomory–Chvátal カットによる解法：第 3 段階 (1)

制約を追加した線形計画緩和

$$\begin{array}{ll} \underset{x_1, x_2}{\textbf{最大化}} & 3x_1 + 4x_2 \\ \textbf{条　件} & 3x_1 - x_2 \leq 12, 3x_1 + 11x_2 \leq 66, x_1 \leq 5, x_1 + x_2 \leq 9, \\ & x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, x_1, x_2 \in \mathbb{R} \end{array}$$

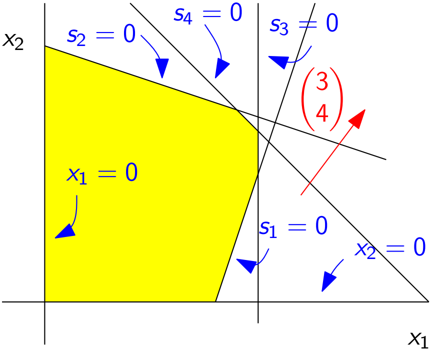


これを解いてみる

Gomory–Chvátal カットによる解法：第 3 段階 (2)

線形計画緩和：
スラック変数の導入

$$\begin{array}{ll} \underset{x,s}{\textbf{最大化}} & 3x_1 + 4x_2 \\ \textbf{条　件} & 3x_1 - x_2 + s_1 = 12, \\ & 3x_1 + 11x_2 + s_2 = 66, \\ & x_1 + s_3 = 5, \\ & x_1 + x_2 + s_4 = 9, \\ & x_1, x_2, s_1, s_2, s_3, s_4 \geq 0 \end{array}$$

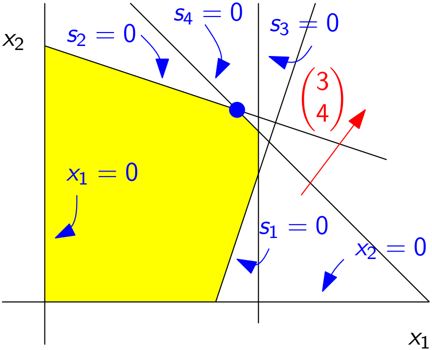


注： $x_1, x_2 \in \mathbb{Z} \Rightarrow s_1, s_2, s_3, s_4 \in \mathbb{Z}$

Gomory–Chvátal カットによる解法：第 3 段階 (3)

線形計画緩和：スラック変数の導入

$$\begin{aligned} \max_{x,s}\ & 3x_1 + 4x_2 \\ \text{条件}\ & 3x_1 - x_2 + s_1 = 12, \\ & 3x_1 + 11x_2 + s_2 = 66, \\ & x_1 + s_3 = 5, \\ & x_1 + x_2 + s_4 = 9, \\ & x_1, x_2, s_1, s_2, s_3, s_4 \geq 0 \end{aligned}$$



- 最適解は $x_1 = \frac{33}{8}, x_2 = \frac{39}{8}, s_1 = \frac{33}{8}, s_2 = 0, s_3 = \frac{7}{8}, s_4 = 0$
- これは元の整数計画問題の許容解ではない
- $\rightsquigarrow$ x_2 を s_2, s_4 と定数の線形結合で表す

Gomory–Chvátal カットによる解法：第 3 段階 (4)

線形計画緩和：スラック変数の導入

$$\begin{array}{ll} \underset{x,s}{\textbf{最大化}} & 3x_1 + 4x_2 \\ \textbf{条　件} & 3x_1 - x_2 + s_1 = 12, 3x_1 + 11x_2 + s_2 = 66, x_1 + s_3 = 5, \\ & x_1 + x_2 + s_4 = 9, x_1, x_2, s_1, s_2, s_3, s_4 \geq 0 \end{array}$$

$$\begin{array}{rrcl} \textbf{第 2 式より} & 3x_1 + 11x_2 & = & 66 - s_2 \\ \textbf{第 4 式の 3 倍より} & 3x_1 + 3x_2 & = & 27 - 3s_4 \\ \textbf{上から下を引くと} & 8x_2 & = & 39 - s_2 + 3s_4 \end{array}$$

全体を 8 で割って，変数と定数を分けると

$$x_2 + \frac{1}{8}s_2 - \frac{3}{8}s_4 = \frac{39}{8}$$

Gomory–Chvátal カットによる解法：第 3 段階 (5)

今得られた式

$$x_2 + \frac{1}{8}s_2 - \frac{3}{8}s_4 \quad = \quad \frac{39}{8}$$

Gomory–Chvátal カットによる解法：第 3 段階 (5)

今得られた式を使って

$$\begin{aligned} x_2 + \frac{1}{8}s_2 - \frac{3}{8}s_4 &= \frac{39}{8} \\ x_2 + \left\lfloor\frac{1}{8}\right\rfloor s_2 + \left\lfloor -\frac{3}{8}\right\rfloor s_4 &\leq \frac{39}{8} \end{aligned}$$

- **変数の非負性から，左辺の係数を切り下げると不等式が得られる**

Gomory–Chvátal カットによる解法：第 3 段階 (5)

今得られた式を使って

$$\begin{aligned} x_2 + \frac{1}{8}s_2 - \frac{3}{8}s_4 &= \frac{39}{8} \\ x_2 + \left\lfloor \frac{1}{8} \right\rfloor s_2 + \left\lfloor -\frac{3}{8} \right\rfloor s_4 &\leq \frac{39}{8} \\ x_2 - s_4 &\leq \frac{39}{8} \end{aligned}$$

- **変数の非負性から，左辺の係数を切り下げると不等式が得られる**

Gomory–Chvátal カットによる解法：第 3 段階 (5)

今得られた式を使って

$$\begin{aligned}
x_2 + \frac{1}{8}s_2 - \frac{3}{8}s_4 &= \frac{39}{8}\\
x_2 + \left\lfloor \frac{1}{8} \right\rfloor s_2 + \left\lfloor -\frac{3}{8} \right\rfloor s_4 &\leq \frac{39}{8}\\
x_2 - s_4 &\leq \frac{39}{8}\\
x_2 - s_4 &\leq \left\lfloor \frac{39}{8} \right\rfloor
\end{aligned}$$

- **変数の非負性から，左辺の係数を切り下げると不等式が得られる**
- **変数の整数性から，右辺を切り下げても，整数計画問題の任意の許容解は得られた不等式を満たす**

Gomory–Chvátal カットによる解法：第 3 段階 (5)

今得られた式を使って

$$\begin{aligned}
x_2 + \frac{1}{8}s_2 - \frac{3}{8}s_4 &= \frac{39}{8} \\
x_2 + \left\lfloor \frac{1}{8} \right\rfloor s_2 + \left\lfloor -\frac{3}{8} \right\rfloor s_4 &\leq \frac{39}{8} \\
x_2 - s_4 &\leq \frac{39}{8} \\
x_2 - s_4 &\leq \left\lfloor \frac{39}{8} \right\rfloor \\
x_2 - s_4 &\leq 4
\end{aligned}$$

- **変数の非負性から，左辺の係数を切り下げると不等式が得られる**
- **変数の整数性から，右辺を切り下げても，**
  整数計画問題の任意の許容解は得られた不等式を満たす

Gomory–Chvátal カットによる解法：第 3 段階 (6)

今得られた式

$$x_2 - s_4 \quad \leq \quad 4$$

Gomory–Chvátal カットによる解法：第 3 段階 (6)

今得られた式において

$$\begin{aligned} x_2 - s_4 &\leq 4 \\ x_2 - (9 - x_1 - x_2) &\leq 4 \end{aligned}$$

- **制約** $x_1 + x_2 + s_4 = 9$ **を使って書き直す**

Gomory–Chvátal カットによる解法：第 3 段階 (6)

今得られた式において

$$\begin{aligned} x_2 - s_4 &\leq 4 \\ x_2 - (9 - x_1 - x_2) &\leq 4 \\ x_1 + 2x_2 &\leq 13 \end{aligned}$$

- **制約** $x_1 + x_2 + s_4 = 9$ **を使って書き直す**

Gomory–Chvátal カットによる解法：第 3 段階 (6)

今得られた式において

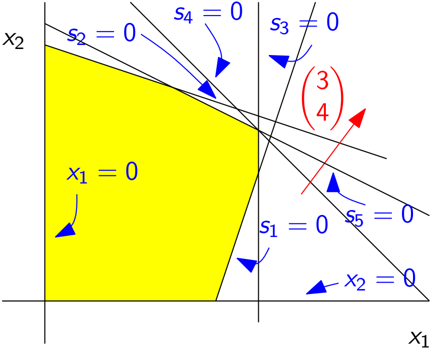
$$\begin{aligned} x_2 - s_4 &\leq 4 \\ x_2 - (9 - x_1 - x_2) &\leq 4 \\ x_1 + 2x_2 &\leq 13 \end{aligned}$$

- **制約** $x_1 + x_2 + s_4 = 9$ **を使って書き直す**
- **これが欲しかった制約** $\rightsquigarrow$ **付け加える**

Gomory–Chvátal カットによる解法：第 4 段階 (1)

制約を追加した線形計画緩和

$$\begin{aligned} \underset{x_1,x_2}{\textbf{最大化}} \quad & 3x_1 + 4x_2 \\ \textbf{条　件} \quad & 3x_1 - x_2 \le 12, 3x_1 + 11x_2 \le 66, x_1 \le 5, x_1 + x_2 \le 9, \\ & x_1 + 2x_2 \le 13, x_1 \ge 0, x_2 \ge 0, x_1, x_2 \in \mathbb{R} \end{aligned}$$

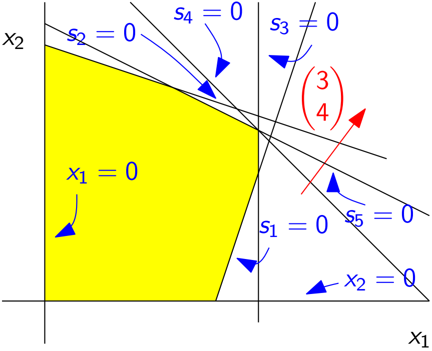


これを解いてみる

Gomory–Chvátal カットによる解法：第 4 段階 (2)

線形計画緩和：
スラック変数の導入

$$\begin{aligned} \max_{x,s}\quad & 3x_1 + 4x_2 \\ \text{条件}\quad & 3x_1 - x_2 + s_1 = 12, \\ & 3x_1 + 11x_2 + s_2 = 66, \\ & x_1 + s_3 = 5, \\ & x_1 + x_2 + s_4 = 9, \\ & x_1 + 2x_2 + s_5 = 13, \\ & x_1, x_2, s_1, s_2, s_3, s_4, s_5 \geq 0 \end{aligned}$$

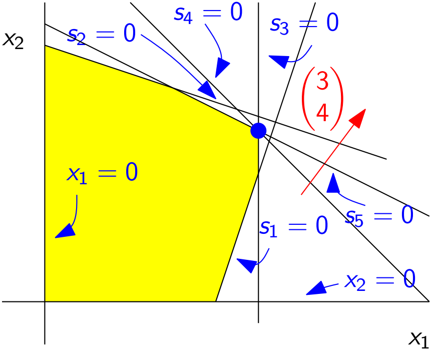


注： $x_1, x_2 \in \mathbb{Z} \Rightarrow s_1, s_2, s_3, s_4, s_5 \in \mathbb{Z}$

Gomory–Chvátal カットによる解法：第 4 段階 (3)

線形計画緩和：
スラック変数の導入

$$\begin{array}{ll} \underset{x,s}{\textbf{最大化}} & 3x_1 + 4x_2 \\ \textbf{条　件} & 3x_1 - x_2 + s_1 = 12, \\ & 3x_1 + 11x_2 + s_2 = 66, \\ & x_1 + s_3 = 5, \\ & x_1 + x_2 + s_4 = 9, \\ & x_1 + 2x_2 + s_5 = 13, \\ & x_1, x_2, s_1, s_2, s_3, s_4, s_5 \geq 0 \end{array}$$



- **最適解は** $x_1 = 5, x_2 = 4, s_1 = 1, s_2 = 7, s_3 = 0, s_4 = 0, s_5 = 0$
- **これは元の整数計画問題の許容解なので，元の問題の最適解！**

解きたかった整数計画問題が解けた！

Gomory–Chvátal カットの性質

定理 (Gomory 1958, 1963)

Gomory–Chvátal カットに基づいて制約を追加していくとき，
線形計画緩和の最適解として非整数が割り当てられた変数の中で，
添え字が最小の変数を常に選ぶことで制約を作成すると，
上記の手続きは有限回の反復の後に，必ず停止する

つまり，必ず最適解が見つかる (か，非許容性，非有界性が判定できる)

- しかし，理論上，実践上ともに，反復回数は多い

Gomory–Chvátal カット以外にも様々な切除平面に基づくアルゴリズムが提案されている

分枝切除法

現代的な整数計画問題ソルバーでは，次の 2 つを組み合わせている

- **分枝限定法**
- **切除平面法**

それらは，分枝切除法と呼ばれている

- **分枝限定法を開始する前に，制約を追加する**
- **分割でできた問題の線形計画緩和を解くときに，制約を追加する**
- **など**

目次

1. 凸包

2. 切除平面法の基本アイディア

3. Gomory–Chvátal カットによる整数計画問題の解法

4. **今日のまとめと今後の予告**

今日のまとめ

今日の目標

- **切除平面法の原理を理解する**
- Gomory–Chvátal **カットを用いて整数計画問題が解けるようになる**

今後の予告

- **整数計画法は今回で一旦終了**
- **次回から，ネットワーク最適化**

復習テスト 2 は 6 月 28 日

目次