最適化手法 第 1 回
整数計画法 (1)：線形計画法の復習，整数計画法の導入

岡本 吉央
okamotoy@uec.ac.jp

2013 年 4 月 12 日

最終更新：2013 年 4 月 16 日　16:06

概要

「最適化手法」の目標

離散最適化に関する理解を深める．具体的には，

- 各種意思決定問題を離散最適化問題として定式化ができる
- 整数計画問題に対する代表的な解法である分枝限定法と切除平面法を理解する
- ネットワーク上の代表的な数理最適化問題に対する基本的なアルゴリズムを理解する

最適化に関するここまでの授業とこの授業

「最適化手法」までの道のり

- OR 第 1：最適化を用いた数理モデル
- OR 第 2：線形計画法 (最適化の基本)
- OR 演習：最適化による問題解決，Excel を用いた解法

「最適化手法」でやりたいこと

これらを基礎にして，より実践的な内容を扱う

- 例題重視，直感重視
- 一般性軽視，証明軽視

スケジュール 前半 (予定)

整数計画法

1. 線形計画法の復習，整数計画法の導入 (4 月 12 日)
2. 整数計画法によるモデリング (4 月 19 日)
3. 緩和問題とその威力 (4 月 26 日)

★ 祝日 (5 月 3 日)

4. 復習テスト 1 と解説 (5 月 10 日)
5. 切除平面法 (5 月 17 日)
6. 分枝限定法 (5 月 24 日)

ネットワーク最適化

7. ネットワークの導入，ネットワークによるモデリング (5 月 31 日)

注意：予定の変更もありうる

スケジュール 後半 (予定)

ネットワーク最適化 (続)

8	最短路問題 (幅優先探索，ダイクストラ法)	(6 月 7 日)
9	最大流問題 (線形計画法，補助ネットワーク)	(6 月 14 日)
10	最大流問題 (増加道法，最大流最小カット定理)	(6 月 21 日)
11	復習テスト 2 と解説	(6 月 28 日)
12	最大流問題 (応用例)	(7 月 5 日)
13	最小費用流問題 (線形計画法，補助ネットワーク)	(7 月 12 日)
14	最小費用流問題 (負閉路消去法，最適性規準)	(7 月 19 日)
15	最小費用流問題 (応用例)	(7 月 26 日)

⋆ 期末試験 (未定)

注意：予定の変更もありうる

情報

教員

- 岡本 吉央 (おかもと よしお)
- 普段いるところ：電気通信大学 西 4 号館 2 階 206 号室
- E-mail：okamotoy@uec.ac.jp
- Web：http://dopal.cs.uec.ac.jp/okamotoy/

講義資料

- Web：http://dopal.cs.uec.ac.jp/okamotoy/lect/2013/opt/
- 注意：資料の印刷・入手等は各学生が自ら行う
- 講義前日の夜 20 時までに，ここに準備される

講義資料

http://dopal.cs.uec.ac.jp/okamotoy/lect/2013/opt/

- スライド
- 印刷用スライド：8 枚のスライドを 1 ページに収めたもの
- 演習問題

「印刷用スライド」と「演習問題」は各自印刷して持参すると便利

授業の進め方

講義 (70 **分**)

- スライドと板書で進める
- スライドのコピーに重要事項のメモを取る

演習 (20 **分**)

- 演習問題に取り組む
- 不明な点は教員に質問する

退室 (0 **分**)

- 授業の感想，質問などを出席カードに書いて提出 (匿名推奨！)
- (感想，質問などの回答は講義の Web ページに掲載)

オフィスアワー：授業終了後

- 質問など

演習問題

演習問題の進め方

- 授業の後半 20 分は演習問題を解く時間
- 残った演習問題は復習・試験対策用
- 注意：「模範解答」のようなものは存在しない

評価

復習テスト 2 回，期末試験 1 回による

- 出題形式
  - 演習問題と同じ形式の問題を複数出題する
  - 復習テストは 2 問，期末テストは 4 問出題
  - 全問に解答する
- 配点：復習テスト 1 回 25 点，期末試験 60 点 (計 110 点)
- 成績において，100 点以上は 100 点で打ち切り
- 注意：A4 用紙裏表自筆書き込みのみ持ち込み可
- 注意：復習テスト，期末試験ともに解答は返却されない

この講義の約束

- 私語はしない (ただし，演習時間の相談は OK)
- 携帯電話はマナーモードにする
- 携帯電話は使わない
- 音を立てて睡眠しない

約束が守られない場合は退席してもらう場合あり

今日の概要

今日の目標

- 線形計画法の復習 (特に，双対性と相補性を思い出す)
- 整数計画法，混合整数計画法が何であるのか理解する
- 簡単な整数計画問題，混合整数計画問題が解けるようになる

目次

線形計画問題

線形計画問題 (linear program) とは次のような数理計画問題

$$
\begin{array}{|ll}
\underset{x_1, x_2}{\textbf{最小化}} & -2x_1 + x_2 \\
\textbf{条\quad件} & -2x_1 - 3x_2 \geq -6, \\
 & x_1 - 2x_2 \geq -2, \\
 & x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, \\
 & x_1, x_2 \in \mathbb{R}
\end{array}
$$

- **変数は実数値を取る**
- **目的関数は線形関数**
- **制約式は線形式 (等式，または，等号付きの不等式)**

線形計画法 (linear programming) とは？

- **線形計画問題を用いた数理モデル化による問題解決**
- **それに関する研究分野**

「線形計画法」の定義

線形計画法 (linear programming)：JISZ8121 D5

条件付き極値問題で目的関数が 1 次関数であり，制約が 1 次不等式または等式から成るもの。
通常は各変数が非負であるという条件がついている。
備考 LP と略称されることがある。

線形計画問題と線形計画法：岩波数学辞典第 4 版

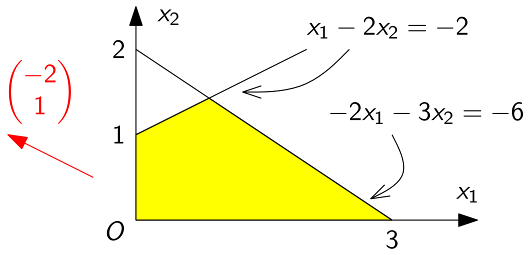
線形等式・不等式系の解集合，すなわち凸多面体上で線形関数を最適化 (最大化・最小化) する問題を線形計画問題といい，その理論，応用，解法に関する分野を総称して線形計画法と呼ぶ．

線形計画問題：図を描いて解く

この線形計画問題を解く

$$
\begin{array}{|ll}
\underset{x_1, x_2}{\textbf{最小化}} & -2x_1 + x_2 \\
\textbf{条　件} & -2x_1 - 3x_2 \geq -6, \\
 & x_1 - 2x_2 \geq -2, \\
 & x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, \\
 & x_1, x_2 \in \mathbb{R}
\end{array}
$$

図を描いてみる



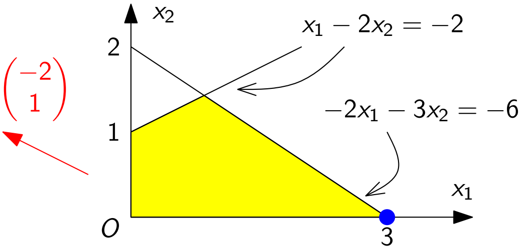
線形計画問題：図を描いて解く

この線形計画問題を解く

$$
\begin{aligned}
\underset{x_1, x_2}{\text{最小化}} \quad & -2x_1 + x_2 \\
\text{条　件} \quad & -2x_1 - 3x_2 \geq -6, \\
& x_1 - 2x_2 \geq -2, \\
& x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, \\
& x_1, x_2 \in \mathbb{R}
\end{aligned}
$$

図を描いてみる

そして解いてみる：$x_1 = 3, x_2 = 0$ **は最適解で，最適値は** -6

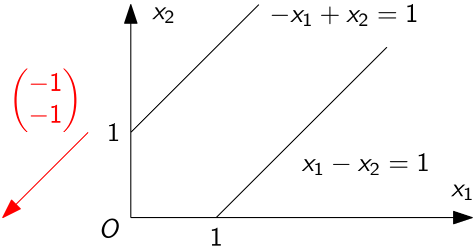


非許容である線形計画問題

許容解を持たない線形計画問題の例

$$
\begin{array}{ll}
\underset{x_1,x_2}{\text{最小化}} & -x_1 - x_2 \\
\text{条　件} & x_1 - x_2 \geq 1, \\
 & -x_1 + x_2 \geq 1, \\
 & x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, \\
 & x_1, x_2 \in \mathbb{R}
\end{array}
$$

図を描いてみる

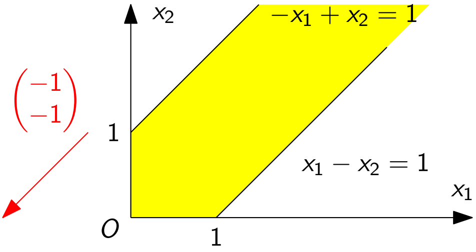


非有界である線形計画問題

任意に目的関数値を小さくできる線形計画問題の例

$$
\begin{array}{ll}
\underset{x_1, x_2}{\text{最小化}} & -x_1 - x_2 \\
\text{条　件} & x_1 - x_2 \geq -1, \\
 & -x_1 + x_2 \geq -1, \\
 & x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, \\
 & x_1, x_2 \in \mathbb{R}
\end{array}
$$

図を描いてみる

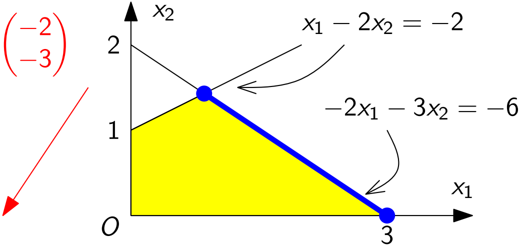


最適解が複数ある線形計画問題

最適解が複数ある線形計画問題の例

$$
\begin{array}{ll}
\underset{x_1, x_2}{\text{最小化}} & -2x_1 - 3x_2 \\
\text{条　件} & -2x_1 - 3x_2 \geq -6, \\
 & x_1 - 2x_2 \geq -2, \\
 & x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, \\
 & x_1, x_2 \in \mathbb{R}
\end{array}
$$

図を描いてみる

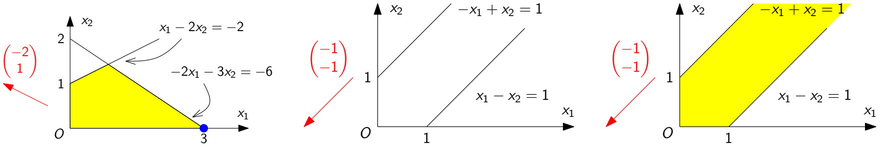


線形計画問題の重要な性質 1

線形計画問題の重要な性質 1

線形計画問題は次のどれかを必ず満たす

- **最適解が存在する**
- **非許容**
- **非有界**



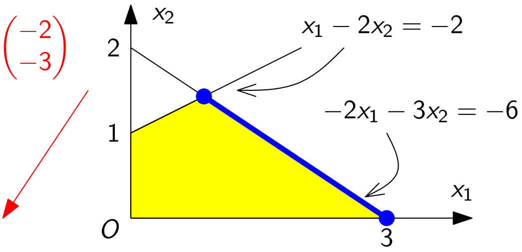
線形計画問題の重要な性質 2

線形計画問題の許容領域は凸多面体であることに注意

線形計画問題の重要な性質 2

許容領域が端点を持つ線形計画問題に対して

$$\text{最適解が存在する} \Rightarrow \text{端点最適解が存在する}$$



線形計画問題を解くには

線形計画問題を解くアルゴリズム

単体法 (simplex methods)

- Dantzig によって発明され，その後多くの研究者が改良
- 実用上，高速
- 理論上，指数時間アルゴリズム (指数時間かかる例がある)

内点法 (interior-point methods)

- Karmarkar によって (再) 発明され，その後多くの研究者が改良
- 実用上，高速
- 理論上，多項式時間アルゴリズム

線形計画問題を解くソフトウェアが数多く存在して，
「大規模」な問題も簡単に解けるようになってきている

目次

線形計画問題：最適解であることの判定

次の線形計画問題を考える

$$
\begin{array}{ll}
\underset{x_1, x_2}{\text{最小化}} & x_1 + 2x_2 \\
\text{条　件} & -x_1 \geq -2, \\
& x_2 \geq -1, \\
& x_1 - x_2 \geq -4, \\
& -x_1 - x_2 \geq -3, \\
& 2x_1 + 3x_2 \geq -6, \\
& x_1, x_2 \in \mathbb{R}
\end{array}
$$

疑問

許容解 (x_1, x_2) が与えられたとき，
(x_1, x_2) がこの問題の最適解であるかどうかを簡単に判定できるか？

注：「最適解であるかどうかを判定できる」ことが簡単でないと
「最適化問題を解く」ことも簡単にはできない

線形計画問題：最適解であることの判定 — より具体的に

次の線形計画問題を考える

$$
\begin{array}{ll}
\underset{x_1, x_2}{\text{最小化}} & x_1 + 2x_2 \\
\text{条　件} & -x_1 \geq -2, \\
& x_2 \geq -1, \\
& x_1 - x_2 \geq -4, \\
& -x_1 - x_2 \geq -3, \\
& 2x_1 + 3x_2 \geq -6, \\
& x_1, x_2 \in \mathbb{R}
\end{array}
$$

疑問 — より具体的に

$x_1 = -3/2, x_2 = -1$ **はこの問題の最適解であるか？**

これは許容解であり，目的関数値は $-7/2$

式変形により最適値の下界を計算する (1)

(x_1, x_2) は許容解であるとする

- 第 1 式 + 第 2 式 + 第 3 式 + 第 4 式 + 第 5 式を計算すると

$$
\begin{array}{rrcr}
-x_1 & & \geq & -2 \\
 & x_2 & \geq & -1 \\
x_1 & -x_2 & \geq & -4 \\
-x_1 & -x_2 & \geq & -3 \\
2x_1 & +3x_2 & \geq & -6 \\
\hline
x_1 & +2x_2 & \geq & -16
\end{array}
$$

- $\therefore$ 任意の許容解の目的関数値 ≥ -16
- 特に，最適値 ≥ -16

式変形により最適値の下界を計算する (2)

(x_1, x_2) は許容解であるとする

- 第 4 式 + 第 5 式を計算すると

$$\begin{array}{rrcr} -x_1 & -x_2 & \geq & -3 \\ 2x_1 & +3x_2 & \geq & -6 \\ \hline x_1 & +2x_2 & \geq & -9 \end{array}$$

- $\therefore$ 任意の許容解の目的関数値 ≥ -9
- 特に，最適値 ≥ -9

式変形により最適値の下界を計算する (3)

(x_1, x_2) は許容解であるとする

- 第 2 式 $\times 3$ + 第 3 式を計算すると

$$
\begin{array}{rrrrcl}
3\times & (& & x_2 &) & \geq & -1 \ \times 3 \\
 & & x_1 & -x_2 & & \geq & -4 \\
\hline
 & & x_1 & +2x_2 & & \geq & -7
\end{array}
$$

- $\therefore$ 任意の許容解の目的関数値 ≥ -7
- 特に，最適値 ≥ -7

式変形により最適値の下界を計算する (4)

(x_1, x_2) は許容解であるとする

- 第 2 式 $\times 1/2$ + 第 5 式 $\times 1/2$ を計算すると

$$
\begin{array}{rrrrrr}
\frac{1}{2}\times (& & x_2 &) & \geq & -1 \times \frac{1}{2} \\
\frac{1}{2}\times (& 2x_1 & +3x_2 &) & \geq & -6 \times \frac{1}{2} \\
\hline
 & x_1 & +2x_2 & & \geq & -\frac{7}{2}
\end{array}
$$

- $\therefore$ 任意の許容解の目的関数値 $\geq -\frac{7}{2}$
- 特に，最適値 $\geq -\frac{7}{2}$
- $\therefore x_1 = -3/2, x_2 = -1$ はこの問題の最適解である！

次の疑問

どのように「第 2 式 $\times 1/2$ + 第 5 式 $\times 1/2$」を見つけるのか？

式変形により最適値の下界を計算する (5)

(x_1, x_2) は許容解であるとして，$y_1, y_2, y_3, y_4, y_5 \geq 0$ とする

- 第 i 式に y_i を掛けて，和を計算すると

$$
\begin{array}{llrrll}
y_1 \times & (& -x_1 & &) & \geq & -2 \times y_1 \\
y_2 \times & (& & x_2 &) & \geq & -1 \times y_2 \\
y_3 \times & (& x_1 & -x_2 &) & \geq & -4 \times y_3 \\
y_4 \times & (& -x_1 & -x_2 &) & \geq & -3 \times y_4 \\
y_5 \times & (& 2x_1 & +3x_2 &) & \geq & -6 \times y_5 \\
\hline
\multicolumn{3}{l}{(-y_1 + y_3 - y_4 + 2y_5)x_1} & \multicolumn{2}{l}{+(y_2 - y_3 - y_4 + 3y_5)x_2} & \geq & -2y_1 - y_2 - 4y_3 - 3y_4 - 6y_5
\end{array}
$$

- 仮に，$-y_1 + y_3 - y_4 + 2y_5 = 1$，$y_2 - y_3 - y_4 + 3y_5 = 2$ とすると

$$
\begin{aligned}
x_1 + 2x_2 &= (-y_1 + y_3 - y_4 + 2y_5)x_1 + (y_2 - y_3 - y_4 + 3y_5)x_2 \\
&\geq -2y_1 - y_2 - 4y_3 - 3y_4 - 6y_5
\end{aligned}
$$

- $\therefore$ 任意の許容解の目的関数値 $\geq -2y_1 - y_2 - 4y_3 - 3y_4 - 6y_5$

「$-2y_1 - y_2 - 4y_3 - 3y_4 - 6y_5$」をできるだけ大きくしたい

「できるだけ大きな下界を得る」という線形計画問題

できるだけ大きな下界を得る，という問題

$$
\begin{array}{ll}
\underset{y_1,y_2,y_3,y_4,y_5}{\textbf{最大化}} & -2y_1 - y_2 - 4y_3 - 3y_4 - 6y_5 \\
\textbf{条　件} & -y_1 + y_3 - y_4 + 2y_5 = 1, \\
 & y_2 - y_3 - y_4 + 3y_5 = 2, \\
 & y_1 \geq 0, y_2 \geq 0, y_3 \geq 0, y_4 \geq 0, y_5 \geq 0, \\
 & y_1, y_2, y_3, y_4, y_5 \in \mathbb{R}
\end{array}
$$

- **この問題も線形計画問題**
- **この問題をもとの問題の双対問題** (dual problem) **と呼ぶ**

主問題と双対問題

主問題 (primal problem)

$$
\begin{array}{ll}
\underset{x_1, x_2}{\textbf{最小化}} & x_1 + 2x_2 \\
\textbf{条　件} & -x_1 \geq -2, x_2 \geq -1, \\
& x_1 - x_2 \geq -4, -x_1 - x_2 \geq -3, \\
& 2x_1 + 3x_2 \geq -6, \\
& x_1, x_2 \in \mathbb{R}
\end{array}
$$

双対問題 (dual problem)

$$
\begin{array}{ll}
\underset{y_1, y_2, y_3, y_4, y_5}{\textbf{最大化}} & -2y_1 - y_2 - 4y_3 - 3y_4 - 6y_5 \\
\textbf{条　件} & -y_1 + y_3 - y_4 + 2y_5 = 1, \\
& y_2 - y_3 - y_4 + 3y_5 = 2, \\
& y_1 \geq 0, y_2 \geq 0, y_3 \geq 0, y_4 \geq 0, y_5 \geq 0, \\
& y_1, y_2, y_3, y_4, y_5 \in \mathbb{R}
\end{array}
$$

主問題と双対問題の目的関数値

- (x_1, x_2) が主許容解，$(y_1, y_2, y_3, y_4, y_5)$ が双対許容解 $\Rightarrow$

$$\begin{aligned} x_1 + 2x_2 &= (-y_1 + y_3 - y_4 + 2y_5)x_1 + (y_2 - y_3 - y_4 + 3y_5)x_2 \\ &= -x_1y_1 + x_2y_2 + (x_1 - x_2)y_3 + (-x_1 - x_2)y_4 \\ &\quad +(2x_1 + 3x_2)y_5 \\ &\geq -2y_1 - y_2 - 4y_3 - 3y_4 - 6y_5 \end{aligned}$$

- $\therefore$ 任意の主許容解と任意の双対許容解に対して

$$\boxed{\text{主問題の目的関数値}} \geq \boxed{\text{双対問題の目的関数値}}$$

- 特に

$$\boxed{\text{主問題の最適値}} \geq \boxed{\text{双対問題の最適値}}$$

許容解の最適性

- 仮に，主許容解 (x_1^*, x_2^*) と双対許容解 $(y_1^*, y_2^*, y_3^*, y_4^*, y_5^*)$ が

$$\underbrace{x_1^* + 2x_2^*}_{\boxed{\text{主問題の目的関数値}}} = \underbrace{-2y_1^* - y_2^* - 4y_3^* - 3y_4^* - 6y_5^*}_{\boxed{\text{双対問題の目的関数値}}}$$

  を満たすとする
- このとき，任意の主許容解 x_1, x_2 に対して

$$x_1^* + 2x_2^* = -2y_1^* - y_2^* - 4y_3^* - 3y_4^* - 6y_5^* \leq x_1 + 2x_2$$

- 任意の双対許容解 y_1, y_2, y_3, y_4, y_5 に対して

$$-2y_1^* - y_2^* - 4y_3^* - 3y_4^* - 6y_5^* = x_1^* + 2x_2^* \geq -2y_1 - y_2 - 4y_3 - 3y_4 - 6y_5$$

- $\therefore\ x_1^*, x_2^*$ は主最適解，$y_1^*, y_2^*, y_3^*, y_4^*.y_5^*$ は双対最適解

備忘録：任意の主許容解と任意の双対許容解に対して

$$\boxed{\text{主問題の目的関数値}} \geq \boxed{\text{双対問題の目的関数値}}$$

ここまでのまとめ

主問題 (primal problem)

$$
\begin{array}{ll}
\underset{x_1,x_2}{\text{最小化}} & x_1 + 2x_2 \\
\text{条　件} & -x_1 \geq -2, \\
& x_2 \geq -1, \\
& x_1 - x_2 \geq -4, \\
& -x_1 - x_2 \geq -3, \\
& 2x_1 + 3x_2 \geq -6, \\
& x_1, x_2 \in \mathbb{R}
\end{array}
$$

- $(x_1, x_2) = (-\frac{3}{2}, -1)$ は許容解
- 目的関数値 $= -7/2$

双対問題 (dual problem)

$$
\begin{array}{ll}
\underset{y_1,y_2,y_3,y_4,y_5}{\text{最大化}} & -2y_1 - y_2 - 4y_3 - 3y_4 - 6y_5 \\
\text{条　件} & -y_1 + y_3 - y_4 + 2y_5 = 1, \\
& y_2 - y_3 - y_4 + 3y_5 = 2, \\
& y_1 \geq 0, y_2 \geq 0, \\
& y_3 \geq 0, y_4 \geq 0, \\
& y_5 \geq 0, \\
& y_1, y_2, y_3, y_4, y_5 \in \mathbb{R}
\end{array}
$$

- $(y_1, y_2, y_3, y_4, y_5) = (0, \frac{1}{2}, 0, 0, \frac{1}{2})$ は許容解
- 目的関数値 $= -7/2$

いままでの議論から

$(x_1, x_2) = (-\frac{3}{2}, -1)$ は (主問題の) 最適解で，最適値は $-7/2$

主問題と双対問題の対応

主問題 (primal problem)

$$
\begin{aligned}
\min_{x_1,x_2}\ & x_1 + 2x_2 \\
\text{条件}\ & -x_1 \geq -2, \\
& x_2 \geq -1, \\
& x_1 - x_2 \geq -4, \\
& -x_1 - x_2 \geq -3, \\
& 2x_1 + 3x_2 \geq -6, \\
& x_1, x_2 \in \mathbb{R}
\end{aligned}
$$

(最小化 x_1,x_2)

双対問題 (dual problem)

$$
\begin{aligned}
\max_{y_1,y_2,y_3,y_4,y_5}\ & -2y_1 - y_2 - 4y_3 - 3y_4 - 6y_5 \\
\text{条件}\ & -y_1 + y_3 - y_4 + 2y_5 = 1, \\
& y_2 - y_3 - y_4 + 3y_5 = 2, \\
& y_1 \geq 0, y_2 \geq 0, \\
& y_3 \geq 0, y_4 \geq 0, \\
& y_5 \geq 0, \\
& y_1, y_2, y_3, y_4, y_5 \in \mathbb{R}
\end{aligned}
$$

(最大化 y_1,y_2,y_3,y_4,y_5)

- 変数
- 制約
- 目的関数の係数
- 制約の右辺
- 制約が不等式
- 変数が自由

- 制約
- 変数
- 制約の右辺
- 目的関数の係数
- 変数が非負
- 制約が等式

主問題と双対問題の対応

主問題 (primal problem)

$$\begin{aligned}
\min_{x_1, x_2} \quad & x_1 + 2x_2 \\
\text{条件} \quad & -x_1 \geq -2, \\
& x_2 \geq -1, \\
& x_1 - x_2 \geq -4, \\
& -x_1 - x_2 \geq -3, \\
& 2x_1 + 3x_2 \geq -6, \\
& x_1, x_2 \in \mathbb{R}
\end{aligned}$$

（最小化: x_1, x_2）

- 変数
- 制約
- 目的関数の係数
- 制約の右辺
- 制約が不等式
- 変数が自由

双対問題 (dual problem)

$$\begin{aligned}
\max_{y_1, y_2, y_3, y_4, y_5} \quad & -2y_1 - y_2 - 4y_3 - 3y_4 - 6y_5 \\
\text{条件} \quad & -y_1 + y_3 - y_4 + 2y_5 = 1, \\
& y_2 - y_3 - y_4 + 3y_5 = 2, \\
& y_1 \geq 0, y_2 \geq 0, \\
& y_3 \geq 0, y_4 \geq 0, \\
& y_5 \geq 0, \\
& y_1, y_2, y_3, y_4, y_5 \in \mathbb{R}
\end{aligned}$$

（最大化: y_1, y_2, y_3, y_4, y_5）

- 制約
- 変数
- 制約の右辺
- 目的関数の係数
- 変数が非負
- 制約が等式

主問題と双対問題の対応

主問題 (primal problem)

$$
\begin{aligned}
\underset{x_1, x_2}{\text{最小化}} \quad & x_1 + 2x_2 \\
\text{条　件} \quad & -x_1 \geq -2, \\
& x_2 \geq -1, \\
& x_1 - x_2 \geq -4, \\
& -x_1 - x_2 \geq -3, \\
& 2x_1 + 3x_2 \geq -6, \\
& x_1, x_2 \in \mathbb{R}
\end{aligned}
$$

双対問題 (dual problem)

$$
\begin{aligned}
\underset{y_1, y_2, y_3, y_4, y_5}{\text{最大化}} \quad & -2y_1 - y_2 - 4y_3 - 3y_4 - 6y_5 \\
\text{条　件} \quad & -y_1 + y_3 - y_4 + 2y_5 = 1, \\
& y_2 - y_3 - y_4 + 3y_5 = 2, \\
& y_1 \geq 0, y_2 \geq 0, \\
& y_3 \geq 0, y_4 \geq 0, \\
& y_5 \geq 0, \\
& y_1, y_2, y_3, y_4, y_5 \in \mathbb{R}
\end{aligned}
$$

- 変数
- 制約
- 目的関数の係数
- 制約の右辺
- 制約が不等式
- 変数が自由

- 制約
- 変数
- 制約の右辺
- 目的関数の係数
- 変数が非負
- 制約が等式

主問題と双対問題の対応

主問題 (primal problem)

$$
\begin{aligned}
\min_{x_1,x_2}\ & x_1 + 2x_2 \\
\text{条 件}\ & -x_1 \geq -2, \\
& x_2 \geq -1, \\
& x_1 - x_2 \geq -4, \\
& -x_1 - x_2 \geq -3, \\
& 2x_1 + 3x_2 \geq -6, \\
& x_1, x_2 \in \mathbb{R}
\end{aligned}
$$

(最小化 x_1,x_2)

- 変数
- 制約
- 目的関数の係数
- 制約の右辺
- 制約が不等式
- 変数が自由

双対問題 (dual problem)

$$
\begin{aligned}
\max_{y_1,y_2,y_3,y_4,y_5}\ & -2y_1 - y_2 - 4y_3 - 3y_4 - 6y_5 \\
\text{条 件}\ & -y_1 + y_3 - y_4 + 2y_5 = 1, \\
& y_2 - y_3 - y_4 + 3y_5 = 2, \\
& y_1 \geq 0, y_2 \geq 0, \\
& y_3 \geq 0, y_4 \geq 0, \\
& y_5 \geq 0, \\
& y_1, y_2, y_3, y_4, y_5 \in \mathbb{R}
\end{aligned}
$$

(最大化 y_1,y_2,y_3,y_4,y_5)

- 制約
- 変数
- 制約の右辺
- 目的関数の係数
- 変数が非負
- 制約が等式

主問題と双対問題の対応

主問題 (primal problem)

$$\begin{aligned} \underset{x_1, x_2}{\text{最小化}} \quad & x_1 + 2x_2 \\ \text{条　件} \quad & -x_1 \geq -2, \\ & x_2 \geq -1, \\ & x_1 - x_2 \geq -4, \\ & -x_1 - x_2 \geq -3, \\ & 2x_1 + 3x_2 \geq -6, \\ & x_1, x_2 \in \mathbb{R} \end{aligned}$$

双対問題 (dual problem)

$$\begin{aligned} \underset{y_1, y_2, y_3, y_4, y_5}{\text{最大化}} \quad & -2y_1 - y_2 - 4y_3 - 3y_4 - 6y_5 \\ \text{条　件} \quad & -y_1 + y_3 - y_4 + 2y_5 = 1, \\ & y_2 - y_3 - y_4 + 3y_5 = 2, \\ & y_1 \geq 0, y_2 \geq 0, \\ & y_3 \geq 0, y_4 \geq 0, \\ & y_5 \geq 0, \\ & y_1, y_2, y_3, y_4, y_5 \in \mathbb{R} \end{aligned}$$

主問題	双対問題
変数	制約
制約	変数
目的関数の係数	制約の右辺
制約の右辺	目的関数の係数
制約が不等式	変数が非負
変数が自由	制約が等式

目次

整数計画問題

整数計画問題 (integer program) とは次のような数理計画問題

$$
\begin{array}{|ll}
\underset{x_1, x_2}{\text{最小化}} & -2x_1 + x_2 \\
\text{条　件} & -2x_1 - 3x_2 \geq -6, \\
 & x_1 - 2x_2 \geq -2, \\
 & x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, \\
 & x_1, x_2 \in \mathbb{Z}
\end{array}
$$

- **変数**は整数値を取る
- **目的関数**は線形関数
- **制約**は線形式 (等式，または，等号付きの不等式)

整数計画法 (integer programming) とは？

- 整数計画問題を用いた数理モデル化による問題解決
- それに関する研究分野

目的関数，制約が線形でないものも，整数計画問題と呼ぶことがある

混合整数計画問題

混合整数計画問題 (mixed integer program) とは次のような数理計画問題

$$
\begin{array}{ll}
\underset{x_1, x_2}{\text{最小化}} & -2x_1 + x_2 \\
\text{条　件} & -2x_1 - 3x_2 \geq -6, \\
& x_1 - 2x_2 \geq -2, \\
& x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, \\
& x_1 \in \mathbb{Z}, x_2 \in \mathbb{R}
\end{array}
$$

- **変数**は整数値を取るものと実数値を取るものがある
- **目的関数**は線形関数
- **制約**は線形式 (等式，または，等号付きの不等式)

混合整数計画法 (mixed integer programming) とは？

- 混合整数計画問題を用いた数理モデル化による問題解決
- それに関する研究分野

目的関数，制約が線形でないものも，混合整数計画問題と呼ぶことがある

「整数計画法」の定義

整数計画法 (linear programming)：JISZ8121 D10

線形または非線形計画法で全部または一部の変数のとりうる値が整数値に限定されている場合。

整数計画法：岩波数学辞典第 4 版

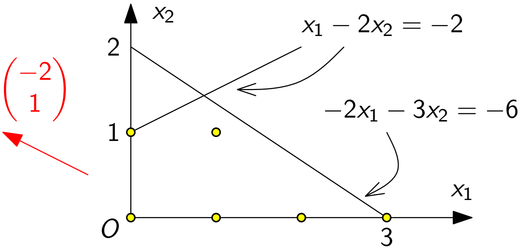
整数計画法は，最も広義には，$\mathbb{R}^n$ の離散集合 S 上で，関数 $f : S \to \mathbb{R}$ を最小化 (もしくは最大化) する問題を扱う分野と定義されるが，狭義には，変数に整数条件が追加された線形計画問題，すなわち，$A \in \mathbb{R}^{m \times n}$，$b \in \mathbb{R}^m$，$c \in \mathbb{R}^n$ をデータとし，$x = (x_1, x_2, \ldots, x_n)^\top \in \mathbb{R}^n$ を変数ベクトルとする問題 P_0: 最小化 $\{c^\top x \mid Ax = b, x_j \geq 0\ (j = 1, \ldots, n), x_j$ は整数 $(j = 1, \ldots, n_1)\}$ (ただし，$n_1 \leq n$) を扱う分野と考えられている．

整数計画問題：図を描いて解く

この整数計画問題を解く

$$
\begin{array}{ll}
\underset{x_1, x_2}{\textbf{最小化}} & -2x_1 + x_2 \\
\textbf{条　件} & -2x_1 - 3x_2 \geq -6, \\
& x_1 - 2x_2 \geq -2, \\
& x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, \\
& x_1, x_2 \in \mathbb{Z}
\end{array}
$$

図を描いてみる



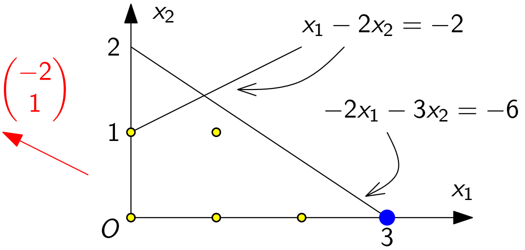
整数計画問題：図を描いて解く

この整数計画問題を解く

$$
\begin{array}{ll}
\underset{x_1, x_2}{\textbf{最小化}} & -2x_1 + x_2 \\
\textbf{条　件} & -2x_1 - 3x_2 \geq -6, \\
& x_1 - 2x_2 \geq -2, \\
& x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, \\
& x_1, x_2 \in \mathbb{Z}
\end{array}
$$

図を描いてみる

そして解いてみる：$x_1 = 3, x_2 = 0$ **は最適解で，最適値は** -6

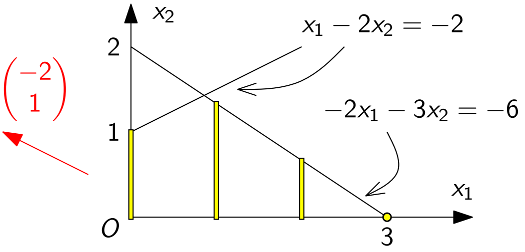


混合整数計画問題：図を描いて解く

この混合整数計画問題を解く

$$\begin{array}{ll} \underset{x_1,x_2}{\text{最小化}} & -2x_1 + x_2 \\ \text{条　件} & -2x_1 - 3x_2 \geq -6, \\ & x_1 - 2x_2 \geq -2, \\ & x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, \\ & x_1 \in \mathbb{Z}, x_2 \in \mathbb{R} \end{array}$$

図を描いてみる



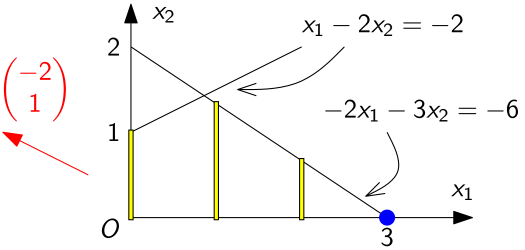
混合整数計画問題：図を描いて解く

この混合整数計画問題を解く

$$
\begin{array}{ll}
\underset{x_1, x_2}{\text{最小化}} & -2x_1 + x_2 \\
\text{条　件} & -2x_1 - 3x_2 \geq -6, \\
& x_1 - 2x_2 \geq -2, \\
& x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, \\
& x_1 \in \mathbb{Z}, x_2 \in \mathbb{R}
\end{array}
$$

図を描いてみる

そして解いてみる： $x_1 = 3, x_2 = 0$ **は最適解で，最適値は** -6



01 整数計画問題

01 整数計画問題 (01 integer program) とは次のような数理計画問題

$$
\begin{array}{|ll}
\displaystyle\mathop{\textbf{最小化}}_{x_1, x_2} & -2x_1 + x_2 \\
\textbf{条　件} & -2x_1 - 3x_2 \geq -6, \\
& x_1 - 2x_2 \geq -2, \\
& x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, \\
& x_1, x_2 \in \{0, 1\}
\end{array}
$$

- **変数**は 0 か 1 の値を取る
- **目的関数**は線形関数
- **制約**は線形式 (等式，または，等号付きの不等式)

01 整数計画法 (integer programming) とは？

- 01 整数計画問題を用いた数理モデル化による問題解決
- それに関する研究分野

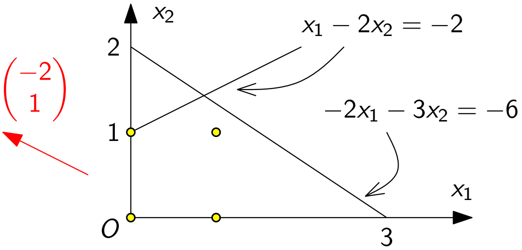
目的関数，制約が線形でないものも，01 整数計画問題と呼ぶことがある

01 整数計画問題：図を描いて解く

この 01 整数計画問題を解く

$$\begin{array}{ll} \underset{x_1,x_2}{\textbf{最小化}} & -2x_1 + x_2 \\ \textbf{条　件} & -2x_1 - 3x_2 \geq -6, \\ & x_1 - 2x_2 \geq -2, \\ & x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, \\ & x_1, x_2 \in \{0, 1\} \end{array}$$

図を描いてみる



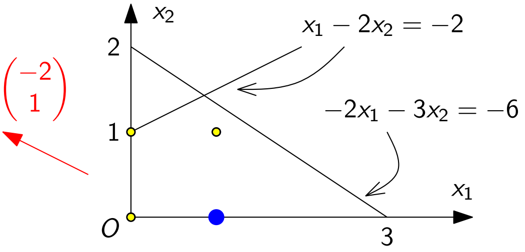
01 整数計画問題：図を描いて解く

この 01 整数計画問題を解く

$$\begin{array}{ll} \underset{x_1,x_2}{\text{最小化}} & -2x_1 + x_2 \\ \text{条　件} & -2x_1 - 3x_2 \geq -6, \\ & x_1 - 2x_2 \geq -2, \\ & x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, \\ & x_1, x_2 \in \{0, 1\} \end{array}$$

図を描いてみる

そして解いてみる：$x_1 = 1, x_2 = 0$ **は最適解で，最適値は** -2



01 整数計画問題と整数計画問題

01 整数計画問題

$$\begin{array}{|ll} \underset{x_1, x_2}{\textbf{最小化}} & -2x_1 + x_2 \\ \textbf{条　件} & -2x_1 - 3x_2 \geq -6, \\ & x_1 - 2x_2 \geq -2, \\ & x_1, x_2 \in \{0, 1\} \end{array}$$

これは，次の整数計画問題と同じ

$$\begin{array}{|ll} \underset{x_1, x_2}{\textbf{最小化}} & -2x_1 + x_2 \\ \textbf{条　件} & -2x_1 - 3x_2 \geq -6, \\ & x_1 - 2x_2 \geq -2, \\ & x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, \\ & x_1 \leq 1, x_2 \leq 1, \\ & x_1, x_2 \in \mathbb{Z} \end{array}$$

つまり，01 整数計画問題は整数計画問題の特別な場合

整数計画法・混合整数計画法の利点と欠点

利点

- 様々な問題をモデル化できる
- 解くためのソフトウェアが増えてきている

欠点

- 実用上，線形計画法ほど大規模な問題を解けない
- 理論上，多項式時間アルゴリズムが知られていない ←未解決問題！

この欠点を克服するため，研究が日々進んでいる (とても活発な分野)

Conference on Integer Programming and Combinatorial Optimization

整数計画法と組合せ最適化に関する国際会議が 3 年に 2 回開催されている

https://www.cec.uchile.cl/~ipco2013/

ソルバーの性能が著しく向上した

R. Bixby (2012) によると

1991 年から 2012 年の間に

- ソフトウェアの進歩で，475,000 倍
- ハードウェアの進歩で，　2,000 倍
- 全体で，ギガオーダー倍

も整数計画問題を解く速度が向上した

http://www.orie.cornell.edu/news/index.cfm?news_id=62130

略称

名前が長いので，略称がよく使われる

問題	略称	読み方
線形計画問題	LP	エルピー
整数計画問題	IP	アイピー
混合整数計画問題	MIP	ミップ

目次

1. 線形計画法
2. 線形計画問題の双対性
3. 整数計画法と混合整数計画法
4. **今日のまとめと今後の予告**

今日のまとめ

3 つの数理計画問題

- 線形計画問題 (復習)
- 整数計画問題
- 混合整数計画問題

変数の数が小さいとき

- 図を描いて解ける (図解法)

線形計画問題に関する重要事項

- 端点最適解
- 双対問題

今後の予告

整数計画法

- どのような問題をモデル化できるのか？ (モデリング)
- どのように解くのか？ (アルゴリズム)
  - そのときに，線形計画法をどのように使うのか？

ネットワーク計画法

- どのような問題をモデル化できるのか？ (モデリング)
- どのように解くのか？ (アルゴリズム)
- 線形計画法とどのように関係しているのか？ (数理)

残った時間の使い方

- 演習問題をやる
  - 相談推奨 (ひとりでやらない)
- 質問をする
  - 教員は巡回
- 退室時，出席カードに感想，質問など書いて提出する
  - 内容は何でも OK
  - 匿名推奨

目次