最適化手法 第 5 回
整数計画法 (4)：分枝限定法

岡本 吉央
okamotoy@uec.ac.jp

2013 年 5 月 17 日

最終更新：2014 年 4 月 24 日　08:05

今日の概要

今日の目標

- 分枝限定法の原理を理解する
- 分枝限定法を用いて整数計画問題が解けるようになる

今日考えたい問題 (準備 & 復習)：ナップサック問題を解く

ナップサック問題

$$\begin{array}{ll} \text{最大化} & 3x_1 + 4x_2 + x_3 + 2x_4 \\ \text{条　件} & 2x_1 + 3x_2 + x_3 + 3x_4 \leq 4, \\ & x_1, x_2, x_3, x_4 \in \{0, 1\} \end{array}$$

商品	1	2	3	4
収入 [万円]	3	4	1	2
重さ [kg]	2	3	1	3

ナップサックの重量制限：4 [kg]

今日考えたい問題 (準備 & 復習)：貪欲法

次の貪欲法で「よさそう」な許容解を作ってみる

アルゴリズム：貪欲法

- 効率の大きな順にナップサックに商品を詰む
- しかし，重量制限を満たせないときは詰まない

商品	1	2	3	4
収入 [万円]	3	4	1	2
重さ [kg]	2	3	1	3
効率 [万円/kg]	3/2	4/3	1	2/3

ナップサックの重量制限：4 [kg]

この場合，商品 1 と 3 を詰んで終了 $\rightsquigarrow$ 目的関数値 $= 4$

今日考えたい問題 (準備 & 復習)：線形計画緩和

線形計画緩和

$$\begin{array}{ll} \text{最大化} & 3x_1 + 4x_2 + x_3 + 2x_4 \\ \text{条　件} & 2x_1 + 3x_2 + x_3 + 3x_4 \leq 4, \\ & 0 \leq x_1 \leq 1, 0 \leq x_2 \leq 1, 0 \leq x_3 \leq 1, 0 \leq x_4 \leq 1, \\ & x_1, x_2, x_3, x_4 \in \mathbb{R} \end{array}$$

実際解いてみると，線形計画緩和の最適解は

$$(x_1, x_2, x_3, x_4) = (1, 2/3, 0, 0)$$

で，線形計画緩和の最適値は 17/3

今日考えたい問題 (準備 & 復習)：線形計画緩和

線形計画緩和の最適解は

$$(x_1, x_2, x_3, x_4) = (1, 2/3, 0, 0)$$

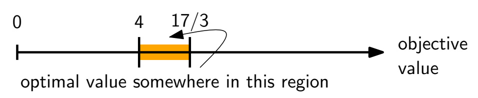
で，線形計画緩和の最適値は 17/3

線形計画緩和の重要な性質 1 (最大化問題のとき)

$$\boxed{\text{01 整数計画問題の最適値}} \leq \boxed{\text{その線形計画緩和の最適値}}$$

よって，

$$\boxed{\text{ナップサック問題の最適値}} \leq 17/3$$



目次

ナップサック問題を解く

ナップサック問題 $P(x_1, x_2, x_3, x_4)$

$$\begin{array}{ll} \text{最大化} & 3x_1 + 4x_2 + x_3 + 2x_4 \\ \text{条　件} & 2x_1 + 3x_2 + x_3 + 3x_4 \leq 4, \\ & x_1, x_2, x_3, x_4 \in \{0, 1\} \end{array}$$

重要な性質 (当たり前だけど)

(x_1, x_2, x_3, x_4) が最適解であるとき，次のどちらかが成り立つ

- $x_1 = 0$
- $x_1 = 1$

行いたいこと

場合分け　(一般的な問題解決の手法のひとつ)

問題の分割

ナップサック問題 $P(x_1, x_2, x_3, x_4)$

$$\begin{array}{|ll} \text{最大化} & 3x_1 + 4x_2 + x_3 + 2x_4 \\ \text{条件} & 2x_1 + 3x_2 + x_3 + 3x_4 \le 4, \\ & x_1, x_2, x_3, x_4 \in \{0, 1\} \end{array}$$

$x_1 = 0$ とした問題 $P(0, x_2, x_3, x_4)$

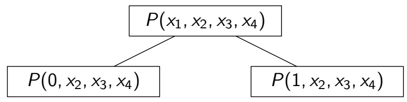
$$\begin{array}{|ll} \text{最大化} & 4x_2 + x_3 + 2x_4 \\ \text{条件} & 3x_2 + x_3 + 3x_4 \le 4, \\ & x_2, x_3, x_4 \in \{0, 1\} \end{array}$$

$x_1 = 1$ とした問題 $P(1, x_2, x_3, x_4)$

$$\begin{array}{|ll} \text{最大化} & 3 + 4x_2 + x_3 + 2x_4 \\ \text{条件} & 3x_2 + x_3 + 3x_4 \le 2, \\ & x_2, x_3, x_4 \in \{0, 1\} \end{array}$$

$$\left\{\begin{array}{l} P(0, x_2, x_3, x_4) \text{ の最適解} \\ P(1, x_2, x_3, x_4) \text{ の最適解} \end{array}\right\} \text{のよい方} = P(x_1, x_2, x_3, x_4) \text{ の最適解}$$

問題の分割：図示



さらに問題の分割

ナップサック問題 $P(0, x_2, x_3, x_4)$

$$\begin{array}{|ll} \text{最大化} & 4x_2 + x_3 + 2x_4 \\ \text{条件} & 3x_2 + x_3 + 3x_4 \le 4, \\ & x_2, x_3, x_4 \in \{0, 1\} \end{array}$$

$x_1 = 0, x_2 = 0$ とした問題 $P(0, 0, x_3, x_4)$

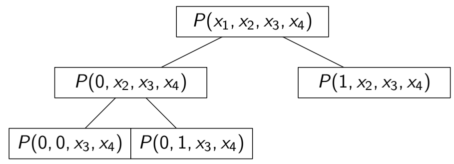
$$\begin{array}{|ll} \text{最大化} & x_3 + 2x_4 \\ \text{条件} & x_3 + 3x_4 \le 4, \\ & x_3, x_4 \in \{0, 1\} \end{array}$$

$x_1 = 0, x_2 = 1$ とした問題 $P(0, 1, x_3, x_4)$

$$\begin{array}{|ll} \text{最大化} & 4 + x_3 + 2x_4 \\ \text{条件} & x_3 + 3x_4 \le 1, \\ & x_3, x_4 \in \{0, 1\} \end{array}$$

$$\left\{\begin{array}{l} P(0, 0, x_3, x_4) \text{ の最適解} \\ P(0, 1, x_3, x_4) \text{ の最適解} \end{array}\right\} \text{のよい方} = P(0, x_2, x_3, x_4) \text{ の最適解}$$

さらに問題の分割：図示



さらに問題の分割 (2)

ナップサック問題 $P(1, x_2, x_3, x_4)$

$$\begin{array}{|ll} \text{最大化} & 3 + 4x_2 + x_3 + 2x_4 \\ \text{条件} & 3x_2 + x_3 + 3x_4 \le 2, \\ & x_2, x_3, x_4 \in \{0, 1\} \end{array}$$

$x_1 = 1, x_2 = 0$ とした問題 $P(1, 0, x_3, x_4)$

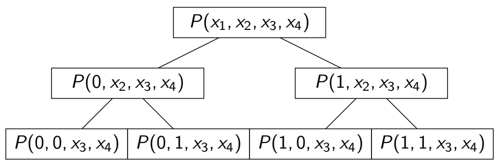
$$\begin{array}{|ll} \text{最大化} & 3 + x_3 + 2x_4 \\ \text{条件} & x_3 + 3x_4 \le 2, \\ & x_3, x_4 \in \{0, 1\} \end{array}$$

$x_1 = 1, x_2 = 1$ とした問題 $P(1, 1, x_3, x_4)$

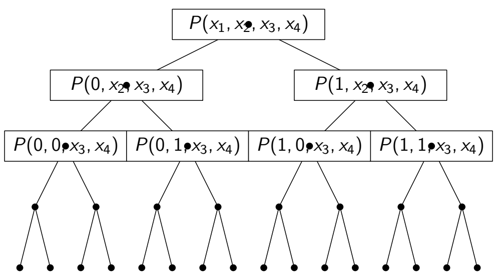
$$\begin{array}{|ll} \text{最大化} & 7 + x_3 + 2x_4 \\ \text{条件} & x_3 + 3x_4 \le -1, \\ & x_3, x_4 \in \{0, 1\} \end{array}$$

$$\left\{\begin{array}{l} P(1, 0, x_3, x_4) \text{ の最適解} \\ P(1, 1, x_3, x_4) \text{ の最適解} \end{array}\right\} \text{のよい方} = P(1, x_2, x_3, x_4) \text{ の最適解}$$

さらに問題の分割 (2)：図示

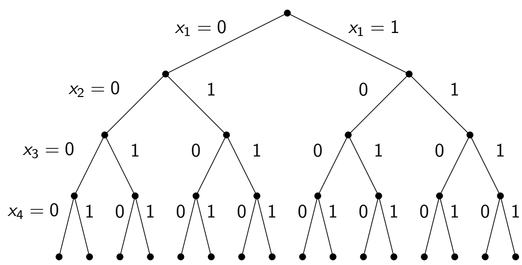


さらに問題の分割 (3)：図示



分枝木と呼ばれている

さらに問題の分割 (4)：図示



分枝木と呼ばれている

分割によって得られた問題 (1)

ナップサック問題 $P(x_1, x_2, x_3, x_4)$

$$\begin{array}{ll} \text{最大化} & 3x_1 + 4x_2 + x_3 + 2x_4 \\ \text{条　件} & 2x_1 + 3x_2 + x_3 + 3x_4 \le 4, \\ & x_1, x_2, x_3, x_4 \in \{0, 1\} \end{array}$$

分割で得られた $P(0,0,0,0)$	分割で得られた $P(0,0,0,1)$	分割で得られた $P(0,0,1,0)$	分割で得られた $P(0,0,1,1)$
最大化　0 条　件　$0 \le 4$	最大化　2 条　件　$3 \le 4$	最大化　1 条　件　$1 \le 4$	最大化　3 条　件　$4 \le 4$
最適値は 0	最適値は 2	最適値は 1	最適値は 3

分割によって得られた問題 (2)

ナップサック問題 $P(x_1, x_2, x_3, x_4)$

$$\begin{array}{ll} \text{最大化} & 3x_1 + 4x_2 + x_3 + 2x_4 \\ \text{条　件} & 2x_1 + 3x_2 + x_3 + 3x_4 \le 4, \\ & x_1, x_2, x_3, x_4 \in \{0, 1\} \end{array}$$

分割で得られた $P(0,1,0,0)$	分割で得られた $P(0,1,0,1)$	分割で得られた $P(0,1,1,0)$	分割で得られた $P(0,1,1,1)$
最大化　4 条　件　$3 \le 4$	最大化　6 条　件　$6 \le 4$	最大化　5 条　件　$4 \le 4$	最大化　7 条　件　$7 \le 4$
最適値は 4	これは非許容	最適値は 5	これは非許容

分割によって得られた問題 (3)

ナップサック問題 $P(x_1, x_2, x_3, x_4)$

$$\begin{array}{ll} \text{最大化} & 3x_1 + 4x_2 + x_3 + 2x_4 \\ \text{条　件} & 2x_1 + 3x_2 + x_3 + 3x_4 \le 4, \\ & x_1, x_2, x_3, x_4 \in \{0, 1\} \end{array}$$

分割で得られた $P(1,0,0,0)$	分割で得られた $P(1,0,0,1)$	分割で得られた $P(1,0,1,0)$	分割で得られた $P(1,0,1,1)$
最大化　3 条　件　$2 \le 4$	最大化　5 条　件　$5 \le 4$	最大化　4 条　件　$3 \le 4$	最大化　6 条　件　$6 \le 4$
最適値は 3	これは非許容	最適値は 4	これは非許容

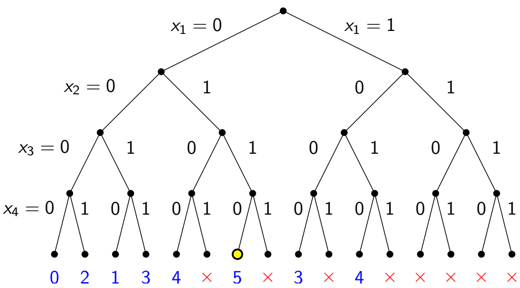
分割によって得られた問題 (4)

ナップサック問題 $P(x_1, x_2, x_3, x_4)$

$$\begin{array}{ll} \text{最大化} & 3x_1 + 4x_2 + x_3 + 2x_4 \\ \text{条　件} & 2x_1 + 3x_2 + x_3 + 3x_4 \le 4, \\ & x_1, x_2, x_3, x_4 \in \{0, 1\} \end{array}$$

分割で得られた $P(1,1,0,0)$	分割で得られた $P(1,1,0,1)$	分割で得られた $P(1,1,1,0)$	分割で得られた $P(1,1,1,1)$
最大化　7 条　件　$5 \le 4$	最大化　9 条　件　$8 \le 4$	最大化　8 条　件　$6 \le 4$	最大化　10 条　件　$9 \le 4$
これは非許容	これは非許容	これは非許容	これは非許容

分割から得られる最適値と最適解



「×」は非許容の場合を表す

解いた結果

最適解は $(x_1, x_2, x_3, x_4) = (0, 1, 1, 0)$ で，最適値は 5

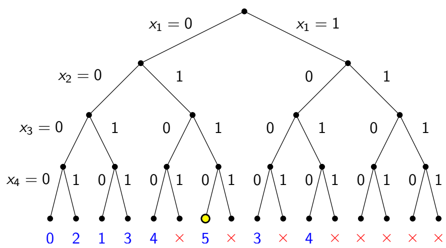
今から考えたいこと

問題点

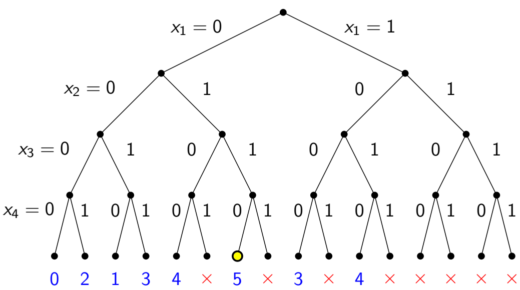
この分枝木は，膨大な場合分けを行っている

今から考えたいこと (工夫点)

あまり場合分けをしなくてもよいように分枝木を作っていく
$\rightsquigarrow$ 限定操作 (枝刈り)



限定操作：例



- $x_1 = 1, x_2 = 1$ とした問題はどれも非許容になっている
- つまり，$P(1, 1, x_3, x_4)$ は非許容であった
- 「$P(1, 1, x_3, x_4)$ が非許容である」ということが判断できるか？

限定操作：例 (続)

ナップサック問題 $P(x_1, x_2, x_3, x_4)$

$$\begin{array}{ll} \text{最大化} & 3x_1 + 4x_2 + x_3 + 2x_4 \\ \text{条　件} & 2x_1 + 3x_2 + x_3 + 3x_4 \le 4, \\ & x_1, x_2, x_3, x_4 \in \{0, 1\} \end{array}$$

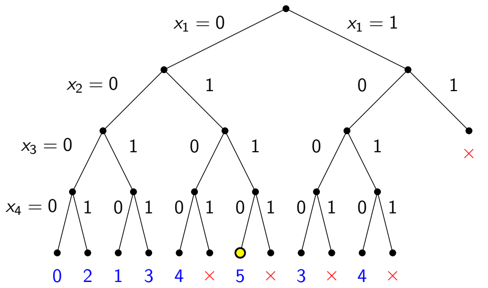
分割で得られた $P(1, 1, x_3, x_4)$

$$\begin{array}{ll} \text{最大化} & 7 + x_3 + 2x_4 \\ \text{条　件} & x_3 + 3x_4 \le -1, \\ & x_3, x_4 \in \{0, 1\} \end{array}$$

- 制約式「$x_3 + 3x_4 \le -1$」を見てみる
- 左辺 ≥ 0 なのに，右辺 $= -1$ なので，これは非許容

$\rightsquigarrow$ 「$P(1, 1, x_3, x_4)$ が非許容である」と判断できた

限定操作による分枝木の変化



分枝限定法は，これを統一的かつ効果的に行う

目次

分枝限定法

分枝限定法とは？

以下の 2 つを基本操作として，問題解決を行う

- 分枝操作：解くべき問題を分割する (場合分け)
- 限定操作：解かない問題を無視する (枝刈り)

線形計画緩和に基づいた 01 整数計画問題に対する分枝限定法

- 分枝操作：1 つの変数に 0 か 1 を割り当てて，問題を分割する
- 限定操作：暫定解と線形計画緩和に基づいて，うまく行う

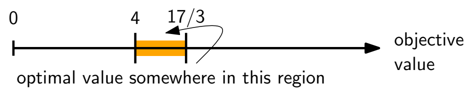
分枝限定法でナップサック問題を解く (1)

ナップサック問題 $P(x_1, x_2, x_3, x_4)$

$$\begin{array}{ll} \text{最大化} & 3x_1 + 4x_2 + x_3 + 2x_4 \\ \text{条件} & 2x_1 + 3x_2 + x_3 + 3x_4 \le 4, \\ & x_1, x_2, x_3, x_4 \in \{0, 1\} \end{array}$$

- 貪欲法で得られた許容解 $(x_1, x_2, x_3, x_4) = (1, 0, 1, 0)$
  …これを暫定解とする
- 線形計画緩和の最適解 $(x_1, x_2, x_3, x_4) = (1, 2/3, 0, 0)$
- 貪欲法と線形計画緩和より，

$$4 \le \boxed{P(x_1, x_2, x_3, x_4) \text{ の最適値}} \le 17/3$$



分枝限定法でナップサック問題を解く (2)

分枝を行う変数の選択

線形計画緩和の最適解で 0, 1 以外の値が割り当てられた変数を
分割に使うとよい

ナップサック問題 $P(x_1, x_2, x_3, x_4)$

$$\begin{array}{ll} \text{最大化} & 3x_1 + 4x_2 + x_3 + 2x_4 \\ \text{条件} & 2x_1 + 3x_2 + x_3 + 3x_4 \le 4, \\ & x_1, x_2, x_3, x_4 \in \{0, 1\} \end{array}$$

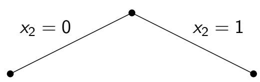
分割で得られた $P(x_1, 0, x_3, x_4)$

$$\begin{array}{ll} \text{最大化} & 3x_1 + x_3 + 2x_4 \\ \text{条件} & 2x_1 + x_3 + 3x_4 \le 4, \\ & x_1, x_3, x_4 \in \{0, 1\} \end{array}$$

分割で得られた $P(x_1, 1, x_3, x_4)$

$$\begin{array}{ll} \text{最大化} & 4 + 3x_1 + x_3 + 2x_4 \\ \text{条件} & 2x_1 + x_3 + 3x_4 \le 1, \\ & x_1, x_3, x_4 \in \{0, 1\} \end{array}$$

分枝木



$$4 \le \boxed{P(x_1, x_2, x_3, x_4) \text{ の最適値}} \le 17/3$$

分枝限定法でナップサック問題を解く (3)

$P(x_1, 0, x_3, x_4)$ — これもナップサック問題

$$\begin{array}{ll} \text{最大化} & 3x_1 + x_3 + 2x_4 \\ \text{条件} & 2x_1 + x_3 + 3x_4 \le 4, \\ & x_1, x_3, x_4 \in \{0, 1\} \end{array}$$

$P(x_1, 0, x_3, x_4)$ の線形計画緩和

$$\begin{array}{ll} \text{最大化} & 3x_1 + x_3 + 2x_4 \\ \text{条件} & 2x_1 + x_3 + 3x_4 \le 4, \\ & 0 \le x_1 \le 1, 0 \le x_3 \le 1, 0 \le x_4 \le 1 \end{array}$$

- 線形計画緩和の最適解 $(x_1, x_2, x_3, x_4) = (1, 0, 1, 1/3)$，最適値 $= 14/3$

分枝限定法でナップサック問題を解く (4)

$P(x_1, 0, x_3, x_4)$

$$\begin{array}{ll} \text{最大化} & 3x_1 + x_3 + 2x_4 \\ \text{条件} & 2x_1 + x_3 + 3x_4 \le 4, \\ & x_1, x_3, x_4 \in \{0, 1\} \end{array}$$

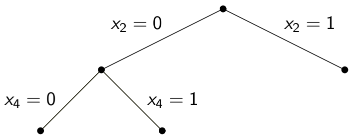
分割で得られた $P(x_1, 0, x_3, 0)$

$$\begin{array}{ll} \text{最大化} & 3x_1 + x_3 \\ \text{条件} & 2x_1 + x_3 \le 4, \\ & x_1, x_3 \in \{0, 1\} \end{array}$$

分割で得られた $P(x_1, 0, x_3, 1)$

$$\begin{array}{ll} \text{最大化} & 2 + 3x_1 + x_3 \\ \text{条件} & 2x_1 + x_3 \le 1, \\ & x_1, x_3 \in \{0, 1\} \end{array}$$

分枝木



$$4 \le \boxed{P(x_1, x_2, x_3, x_4)\ \text{の最適値}} \le 17/3$$

分枝限定法でナップサック問題を解く (5)

ナップサック問題 $P(x_1, 0, x_3, 0)$

$$\begin{array}{ll} \underset{x}{\text{最大化}} & 3x_1 + x_3 \\ \text{条　件} & 2x_1 + x_3 \le 4, \\ & x_1, x_3 \in \{0, 1\} \end{array}$$

$P(x_1, 0, x_3, 0)$ の線形計画緩和

$$\begin{array}{ll} \underset{x}{\text{最大化}} & 3x_1 + x_3 \\ \text{条　件} & 2x_1 + x_3 \le 4, \\ & 0 \le x_1 \le 1, 0 \le x_3 \le 1 \end{array}$$

- 線形計画緩和の最適解 $(x_1, x_2, x_3, x_4) = (1, 0, 1, 0)$，最適値 $= 4$

分枝限定法でナップサック問題を解く (6)

ナップサック問題 $P(x_1, 0, x_3, 0)$

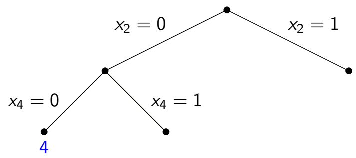
$$\begin{array}{ll} \underset{x}{\text{最大化}} & 3x_1 + x_3 \\ \text{条　件} & 2x_1 + x_3 \le 4, \\ & x_1, x_3 \in \{0, 1\} \end{array}$$

- 線形計画緩和の最適解 $(x_1, x_2, x_3, x_4) = (1, 0, 1, 0)$，最適値 $= 4$
- これは $P(x_1, 0, x_3, 0)$ の許容解なので，$P(x_1, 0, x_3, 0)$ の最適解
- $\therefore P(x_1, 0, x_3, 0)$ に対して，これ以上分枝操作を行う必要なし

線形計画緩和の重要な性質 2 (再掲)

線形計画緩和の最適解 **x** が 01 整数計画問題の許容解 $\Rightarrow$
x は 01 整数計画問題の最適解

分枝木



$$4 \le \boxed{P(x_1, x_2, x_3, x_4)\ \text{の最適値}} \le 17/3$$

分枝限定法でナップサック問題を解く (7)

ナップサック問題 $P(x_1, 0, x_3, 1)$

$$\begin{array}{ll} \underset{x}{\text{最大化}} & 2 + 3x_1 + x_3 \\ \text{条　件} & 2x_1 + x_3 \le 1, \\ & x_1, x_3 \in \{0, 1\} \end{array}$$

$P(x_1, 0, x_3, 1)$ の線形計画緩和

$$\begin{array}{ll} \underset{x}{\text{最大化}} & 2 + 3x_1 + x_3 \\ \text{条　件} & 2x_1 + x_3 \le 1, \\ & 0 \le x_1 \le 1, 0 \le x_3 \le 1 \end{array}$$

- 線形計画緩和の最適解 $(x_1, x_2, x_3, x_4) = (1/2, 0, 0, 1)$，最適値 $= 7/2$

分枝限定法でナップサック問題を解く (8)

したがって，次が成り立つ

$$\begin{array}{ll} & \boxed{P(x_1, 0, x_3, 1)\ \text{の最適値}} \\ \le & \boxed{P(x_1, 0, x_3, 1)\ \text{の線形計画緩和の最適値}} \\ = & 7/2 \\ < & 4 \\ \le & \boxed{P(x_1, x_2, x_3, x_4)\ \text{の最適値}} \end{array}$$

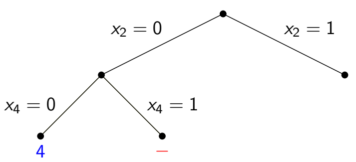
つまり，$P(x_1, 0, x_3, 1)$ から $P(x_1, x_2, x_3, x_4)$ の最適解は得られない

- これ以上，場合分けをせずに，無視できる (枝刈り)

線形計画緩和の重要な性質 1 (最大化問題の場合) (再掲)

$$\boxed{\text{01 整数計画問題の最適値}} \le \boxed{\text{その線形計画緩和の最適値}}$$

分枝木



「–」で，そこに $P(x_1, x_2, x_3, x_4)$ の最適解がないことを表した

$$4 \le \boxed{P(x_1, x_2, x_3, x_4)\ \text{の最適値}} \le 17/3$$

分枝限定法でナップサック問題を解く (9)

ナップサック問題 $P(x_1, 1, x_3, x_4)$

$$\begin{array}{ll} \underset{x}{\text{最大化}} & 4 + 3x_1 + x_3 + 2x_4 \\ \text{条　件} & 2x_1 + x_3 + 3x_4 \le 1, \\ & x_1, x_3, x_4 \in \{0, 1\} \end{array}$$

$P(x_1, 1, x_3, x_4)$ の線形計画緩和

$$\begin{array}{ll} \underset{x}{\text{最大化}} & 4 + 3x_1 + x_3 + 2x_4 \\ \text{条　件} & 2x_1 + x_3 + 3x_4 \le 1, \\ & 0 \le x_2 \le 1, 0 \le x_3 \le 1, 0 \le x_4 \le 1 \end{array}$$

- 線形計画緩和の最適解 $(x_1, x_2, x_3, x_4) = (1/2, 1, 0, 0)$，最適値 $= 11/2$
- これは 01 解でもないし，値が 4 より小さいわけでもない $\rightsquigarrow$ 分枝

分枝限定法でナップサック問題を解く (10)

ナップサック問題 $P(x_1, 1, x_3, x_4)$

$$\left|\begin{array}{ll} \text{最大化} & 4 + 3x_1 + x_3 + 2x_4 \\ \text{条\quad件} & 2x_1 + x_3 + 3x_4 \le 1, \\ & x_1, x_3, x_4 \in \{0, 1\} \end{array}\right.$$

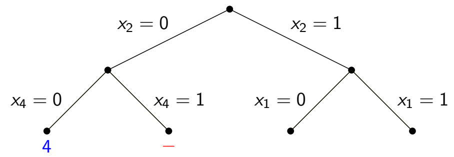
分割で得られた $P(0, 1, x_3, x_4)$

$$\left|\begin{array}{ll} \text{最大化} & 4 + x_3 + 2x_4 \\ \text{条\quad件} & x_3 + 3x_4 \le 1, \\ & x_3, x_4 \in \{0, 1\} \end{array}\right.$$

分割で得られた $P(1, 1, x_3, x_4)$

$$\left|\begin{array}{ll} \text{最大化} & 7 + x_3 + 2x_4 \\ \text{条\quad件} & x_3 + 3x_4 \le -1, \\ & x_3, x_4 \in \{0, 1\} \end{array}\right.$$

分枝木



$$4 \le \boxed{P(x_1, x_2, x_3, x_4) \text{ の最適値}} \le 17/3$$

注意：2 段目で分枝を行っている変数が左と右で異なる

分枝限定法でナップサック問題を解く (11)

ナップサック問題 $P(0, 1, x_3, x_4)$

$$\left|\begin{array}{ll} \text{最大化} & 4 + x_3 + 2x_4 \\ \text{条\quad件} & x_3 + 3x_4 \le 1, \\ & x_3, x_4 \in \{0, 1\} \end{array}\right.$$

$P(0, 1, x_3, x_4)$ の線形計画緩和

$$\left|\begin{array}{ll} \text{最大化} & 4 + x_3 + 2x_4 \\ \text{条\quad件} & x_3 + 3x_4 \le 1, \\ & 0 \le x_3 \le 1, 0 \le x_4 \le 1 \end{array}\right.$$

- 線形計画緩和の最適解 $(x_1, x_2, x_3, x_4) = (0, 1, 1, 0)$，最適値 $= 5$

分枝限定法でナップサック問題を解く (12)

ナップサック問題 $P(0, 1, x_3, x_4)$

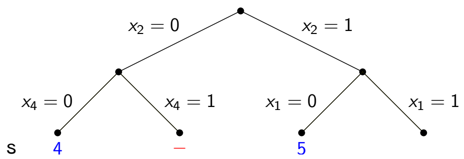
$$\left|\begin{array}{ll} \text{最大化} & 4 + x_3 + 2x_4 \\ \text{条\quad件} & x_3 + 3x_4 \le 1, \\ & x_3, x_4 \in \{0, 1\} \end{array}\right.$$

- 線形計画緩和の最適解 $(x_1, x_2, x_3, x_4) = (0, 1, 1, 0)$，最適値 $= 5$
- これは $P(0, 1, x_3, x_4)$ の許容解なので，$P(0, 1, x_3, x_4)$ の最適解
- $\therefore P(0, 1, x_3, x_4)$ に対して，これ以上分枝操作を行う必要なし
- しかも，暫定解よりも目的関数値がよい許容解が見つかった！
- $\rightsquigarrow$ 暫定解の更新

線形計画緩和の重要な性質 2 (再掲)

線形計画緩和の最適解 **x** が 01 整数計画問題の許容解 ⇒ **x** は 01 整数計画問題の最適解

分枝木



$$5 \le \boxed{P(x_1, x_2, x_3, x_4) \text{ の最適値}} \le 17/3$$

分枝限定法でナップサック問題を解く (13)

ナップサック問題 $P(1, 1, x_3, x_4)$

$$\left|\begin{array}{ll} \text{最大化} & 7 + x_3 + 2x_4 \\ \text{条\quad件} & x_3 + 3x_4 \le -1, \\ & x_3, x_4 \in \{0, 1\} \end{array}\right.$$

$P(1, 1, x_3, x_4)$ の線形計画緩和

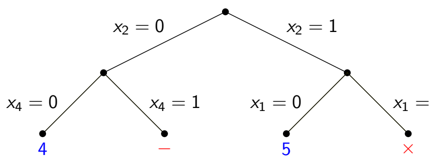
$$\left|\begin{array}{ll} \text{最大化} & 7 + x_3 + 2x_4 \\ \text{条\quad件} & x_3 + 3x_4 \le -1, \\ & 0 \le x_3 \le 1, 0 \le x_4 \le 1 \end{array}\right.$$

- この線形計画緩和は非許容
- よって，$P(1, 1, x_3, x_4)$ も非許容

線形計画緩和の重要な性質 3 (初登場)

線形計画緩和が非許容 ⇒ もとの 01 整数計画問題も非許容

分枝木



$$5 \le \boxed{P(x_1, x_2, x_3, x_4) \text{ の最適値}} \le 17/3$$

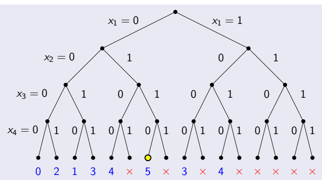
「×」は非許容の場合を表す

分枝操作がすべて終了

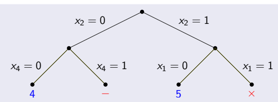
最適解は $(x_1, x_2, x_3, x_4) = (0, 1, 1, 0)$ で，最適値は 5

分枝木の比較

分枝操作のみ



分枝操作＋限定操作



限定操作によって，分枝木が圧倒的に小さくなった $\rightsquigarrow$ 効率性

分枝限定法：どう動かすか？

分枝限定法の流れ

- 限定操作：まず線形計画緩和を解く
  - × それが非許容の場合 ⇝ 分枝は停止
  - − その最適値が暫定解の目的関数値より小さい ⇝ 分枝は停止
  - それが 01 最適解を持つ ⇝ 分枝は停止 (そして，暫定解の更新)
  - それ以外 ⇝ 分枝操作に進む
- 分枝操作：ある変数に着目して，それが 0 の場合と 1 の場合に分ける

補足

実際の分枝限定法では，次の事項をどう決定するかも重要である

- どの変数に着目して分枝操作を行うか
- 分割でできたどの問題を解くか

目次

今日のまとめ

今日の目標

- 分枝限定法の原理を理解する
- 分枝限定法を用いて整数計画問題が解けるようになる

そのときに，線形計画緩和を有効に用いた

線形計画緩和の重要な性質 1 (最大化問題のとき)

$\boxed{\text{01 整数計画問題の最適値}} \leq \boxed{\text{その線形計画緩和の最適値}}$

線形計画緩和の重要な性質 2

線形計画緩和の最適解 $\mathbf{x}$ が 01 整数計画問題の許容解 $\Rightarrow$
$\mathbf{x}$ は 01 整数計画問題の最適解

線形計画緩和の重要な性質 3

線形計画緩和が非許容 $\Rightarrow$ もとの 01 整数計画問題も非許容

今後の予告

整数計画法

- 済 どのような問題をモデル化できるのか？ (モデリング)
- どのように解くのか？ (アルゴリズム)
  - そのときに，線形計画法をどのように使うのか？
  - 済 緩和 (基礎)
  - 済 分枝限定法
  - 切除平面法

復習テスト 2 は 6 月 28 日