最適化手法 **2013 年 5 月 10 日**
復習テスト 1 の解答例 **岡本 吉央**

注意：ここに示すものはあくまでも「解答例」であり，これが唯一の解答であるというわけではない．いずれにせよ，答案というものは自分の主張を表現する手段であり，人間が読むことを想定して書かれ，その主張が読み手にとって明確な文章となっている必要がある．

問題 1． 次に挙げる数理計画問題の許容領域を図示せよ．そして，最適解を 1 つ見つけ，最適値が何であるか答えよ．(目的はどれも「最大化」であるので，注意せよ．)

1. (4 点)

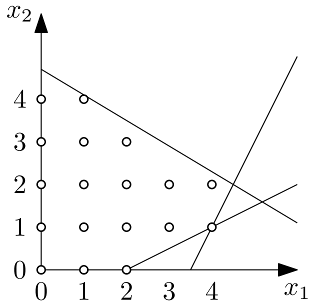
$$\begin{array}{|ll} \underset{x_1,x_2}{\text{最大化}} & x_1 + x_2 \\ \text{条　件} & 6x_1 + 10x_2 \leq 47, x_1 - 2x_2 \leq 2, \\ & 2x_1 - x_2 \leq 7, x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, \\ & x_1, x_2 \in \mathbb{Z}. \end{array}$$

2. (4 点)

$$\begin{array}{|ll} \underset{x_1,x_2}{\text{最大化}} & x_1 + x_2 \\ \text{条　件} & 6x_1 + 10x_2 \leq 47, x_1 - 2x_2 \leq 2, \\ & 2x_1 - x_2 \leq 7, x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, \\ & x_1 \in \mathbb{Z}, x_2 \in \mathbb{R}. \end{array}$$

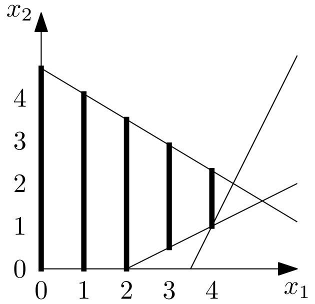
問題 1 の解答例．

1. 許容領域は次の図における○が示す 18 点から成る集合．



最適解は $x_1 = 4, x_2 = 2$ で，最適値は 6.

2. 許容領域は次の図における太線が示す 5 つの線分から成る集合．



最適解は $x_1 = 4, x_2 = 23/10$ で，最適値は 63/10.

問題 2． 次の整数計画問題として表現されるナップサック問題を考える．

$$\left|\begin{array}{ll} \underset{\boldsymbol{x}}{\text{最大化}} & 2x_1 + x_2 + 8x_3 + 7x_4 + 4x_5 + 6x_6 + 3x_7 + 8x_8 \\ \text{条　件} & 5x_1 + x_2 + 13x_3 + 20x_4 + 15x_5 + 8x_6 + 7x_7 + 21x_8 \leq 50, \\ & x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6, x_7, x_8 \in \{0, 1\}. \end{array}\right.$$

1. (3 点) 各商品の効率を計算し，貪欲法によりこのナップサック問題に対する許容解を 1 つ発見せよ．その許容解の目的関数値は何か？
2. (3 点) 上に挙げた整数計画問題の線形計画緩和は何か？
3. (3 点) 上問の線形計画緩和に対する最適解を 1 つ発見せよ．この線形計画問題の最適値は何か？

問題 2 の解答例．

1. 変数 x_i に対応する商品を i と呼ぶことにして，その収入は目的関数における x_i の係数，その重さは制約における x_i の係数に対応する．各商品の効率はその収入 / その重さとして計算される．各商品の収入，重さ，効率は以下の表で表される．

商品	1	2	3	4	5	6	7	8
収入	2	1	8	7	4	6	3	8
重さ	5	1	13	20	15	8	7	21
効率	2/5	1	8/13	7/20	4/15	3/4	3/7	8/21

効率の大きな順に商品を並べると，

商品 2，商品 6，商品 3，商品 7，商品 1，商品 8，商品 4，商品 5

となる．この順に従って貪欲法を適用する．

- 商品 2 を考える．ナップサックの重量制限は 50 であり，商品 2 の重さは 1 なので，商品 2 をナップサックに詰むことができる．このとき，ナップサックの残り重量制限は 49 である．
- 商品 6 を考える．ナップサックの残り重量制限は 48 であり，商品 6 の重さは 8 なので，商品 6 をナップサックに詰むことができる．このとき，ナップサックの残り重量制限は 41 である．
- 商品 3 を考える．ナップサックの残り重量制限は 41 であり，商品 3 の重さは 13 なので，商品 3 をナップサックに詰むことができる．このとき，ナップサックの残り重量制限は 28 である．
- 商品 7 を考える．ナップサックの残り重量制限は 28 であり，商品 7 の重さは 7 なので，商品 7 をナップサックに詰むことができる．このとき，ナップサックの残り重量制限は 21 である．
- 商品 1 を考える．ナップサックの残り重量制限は 21 であり，商品 1 の重さは 5 なので，商品 1 をナップサックに詰むことができる．このとき，ナップサックの残り重量制限は 16 である．

- 商品 8 を考える．ナップサックの残り重量制限は 16 であり，商品 8 の重さは 21 なので，商品 8 をナップサックに詰むことはできない．このとき，ナップサックの残り重量制限は 16 である．
- 商品 4 を考える．ナップサックの残り重量制限は 16 であり，商品 4 の重さは 20 なので，商品 4 をナップサックに詰むことはできない．このとき，ナップサックの残り重量制限は 16 である．
- 商品 5 を考える．ナップサックの残り重量制限は 16 であり，商品 5 の重さは 15 なので，商品 5 をナップサックに詰むことができる．このとき，ナップサックの残り重量制限は 1 である．ここで，アルゴリズムは停止する．

すなわち，貪欲法により，商品 1，2，3，5，6，7 を詰むことができた．これに対応する許容解は $x_1 = 1, x_2 = 1, x_3 = 1, x_4 = 0, x_5 = 1, x_6 = 1, x_7 = 1, x_8 = 0$ であり，その目的関数値は 24 である．

2. 線形計画緩和は以下のとおりである．

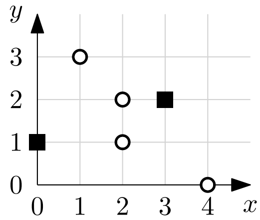
$$\left|\begin{array}{ll} \underset{\boldsymbol{x}}{\text{最大化}} & 2x_1 + x_2 + 8x_3 + 7x_4 + 4x_5 + 6x_6 + 3x_7 + 8x_8 \\ \text{条\quad件} & 5x_1 + x_2 + 13x_3 + 20x_4 + 15x_5 + 8x_6 + 7x_7 + 21x_8 \leq 50, \\ & 0 \leq x_1 \leq 1, 0 \leq x_2 \leq 1, 0 \leq x_3 \leq 1, 0 \leq x_4 \leq 1, \\ & 0 \leq x_5 \leq 1, 0 \leq x_6 \leq 1, 0 \leq x_7 \leq 1, 0 \leq x_8 \leq 1. \end{array}\right.$$

3. 問 1 の表に従って，線形計画緩和の最適解を計算する．

- 商品 2 を考える．ナップサックの重量制限は 50 であり，商品 2 の重さは 1 なので，商品 2 をナップサックに詰むことができる．このとき，ナップサックの残り重量制限は 49 である．
- 商品 6 を考える．ナップサックの残り重量制限は 49 であり，商品 6 の重さは 8 なので，商品 6 をナップサックに詰むことができる．このとき，ナップサックの残り重量制限は 41 である．
- 商品 3 を考える．ナップサックの残り重量制限は 41 であり，商品 3 の重さは 13 なので，商品 3 をナップサックに詰むことができる．このとき，ナップサックの残り重量制限は 28 である．
- 商品 7 を考える．ナップサックの残り重量制限は 28 であり，商品 7 の重さは 7 なので，商品 7 をナップサックに詰むことができる．このとき，ナップサックの残り重量制限は 21 である．
- 商品 1 を考える．ナップサックの残り重量制限は 21 であり，商品 1 の重さは 5 なので，商品 1 をナップサックに詰むことができる．このとき，ナップサックの残り重量制限は 16 である．
- 商品 8 を考える．ナップサックの残り重量制限は 16 であり，商品 8 の重さは 21 なので，商品 8 を 16/21 だけナップサックに詰むことができる．このとき，ナップサックの残り重量制限は 0 であり，計算は停止する．

すなわち，このアルゴリズムにより，線形計画緩和の最適解として $x_1 = 1, x_2 = 1, x_3 = 1, x_4 = 0, x_5 = 0, x_6 = 1, x_7 = 1, x_8 = 16/21$ が得られ，その目的関数値は 548/21 である．

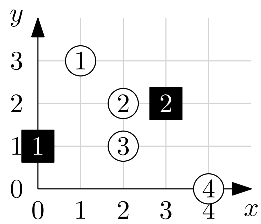
問題 3． (8 点) 次の問題を整数計画問題としてモデル化せよ．

> 砂漠で遭難した人々をオアシスで救護したい．遭難者は携帯電話を持っていて，決められた場所まで直線的に歩くよう誘導できる．図の○で示した 4 か所に遭難者が一人ずついて，■で示した 2 か所にオアシスがある．(図の 1 目盛が 1 km を表すこととする．) 1 つのオアシスでは遭難者を 2 人までなら救護できる．遭難者 4 人が歩く距離の総和を最小とするためには，どのように誘導すればよいか？ 注：遭難者は直線的に歩くので，遭難者が歩く距離は遭難者がいる位置とオアシスの間の直線距離 (ユークリッド距離) である．
>
> 
>

設定した各変数が何を意味するのか，明記すること．

問題 3 の解答例．

次の図のように，各遭難者がいる位置に対して 1 から 4 までのラベルを与え，同様に，各オアシスのある位置に対して 1 と 2 のラベルを与える．



遭難者とオアシスの間の距離 [km] は以下の表の通りとなる．

	オアシス 1	オアシス 2
遭難者 1	$\sqrt{5}$	$\sqrt{5}$
遭難者 2	$\sqrt{5}$	1
遭難者 3	2	$\sqrt{2}$
遭難者 4	$\sqrt{17}$	$\sqrt{5}$

各遭難者 $i \in \{1,2,3,4\}$ と各オアシス $j \in \{1,2\}$ に対して，$x_{i,j} \in \{0,1\}$ という変数を用意する．各変数は次のような解釈を持つ．

$$x_{i,j} = \begin{cases} 1 & (\text{遭難者 } i \text{ がオアシス } j \text{ に歩いて救護される}), \\ 0 & (\text{遭難者 } i \text{ がオアシス } j \text{ に歩いて救護される}). \end{cases}$$

目的は歩く距離の最小化であり，次のように表現できる．

$$\underset{\boldsymbol{x}}{\text{最小化}} \quad \sqrt{5}x_{1,1} + \sqrt{5}x_{2,1} + 2x_{3,1} + \sqrt{17}x_{4,1} + \sqrt{5}x_{1,2} + x_{2,2} + \sqrt{2}x_{3,2} + \sqrt{5}x_{4,2}.$$

記述すべき制約は 2 種類存在する．

1. 各遭難者はどちらかのオアシスで救護される．これは次の式で表現される．

$$
\begin{aligned}
x_{1,1} + x_{1,2} &= 1, \\
x_{2,1} + x_{2,2} &= 1, \\
x_{3,1} + x_{3,2} &= 1, \\
x_{4,1} + x_{4,2} &= 1.
\end{aligned}
$$

2. 各オアシスでは 2 人までしか救護できない．これは次の式で表現される．

$$
\begin{aligned}
x_{1,1} + x_{2,1} + x_{3,1} + x_{4,1} &\leq 2, \\
x_{1,2} + x_{2,2} + x_{3,2} + x_{4,2} &\leq 2.
\end{aligned}
$$

以上をまとめると，次のモデル化が得られる．

$$
\left|
\begin{array}{ll}
\underset{\boldsymbol{x}}{\text{最小化}} & \sqrt{5}x_{1,1} + \sqrt{5}x_{2,1} + 2x_{3,1} + \sqrt{17}x_{4,1} + \sqrt{5}x_{1,2} + x_{2,2} + \sqrt{2}x_{3,2} + \sqrt{5}x_{4,2} \\
\text{条　件} & x_{1,1} + x_{1,2} = 1, \\
& x_{2,1} + x_{2,2} = 1, \\
& x_{3,1} + x_{3,2} = 1, \\
& x_{4,1} + x_{4,2} = 1, \\
& x_{1,1} + x_{2,1} + x_{3,1} + x_{4,1} \leq 2, \\
& x_{1,2} + x_{2,2} + x_{3,2} + x_{4,2} \leq 2, \\
& x_{1,1}, x_{1,2}, x_{2,1}, x_{2,2}, x_{3,1}, x_{3,2}, x_{4,1}, x_{4,2} \in \{0, 1\}.
\end{array}
\right.
$$