離散最適化基礎論 第 13 回
ランダム移動を用いた局所探索法

岡本 吉央
okamotoy@uec.ac.jp

電気通信大学

2014 年 2 月 7 日

最終更新：2014 年 2 月 10 日　00:49

目次

近傍探索における移動戦略

局所探索法 (local search)：一般的枠組み

0. 許容解 $x \in S$ を適当に見つける (この x を初期解と呼ぶ)
1. 以下を繰り返し
   1. ある $x' \in N(x)$ が存在して $f(x') < f(x)$ ならば $x \leftarrow x'$ ←ここにあいまいさ
   2. そうでなければ繰り返しを終了
2. x を出力 (この x は N に関する局所最適解 (定理 1.1))

局所探索法の出力は N に関する局所最適解

$f(x') < f(x)$ を満たす $x' \in N(x)$ が複数あるとき，どうするか？

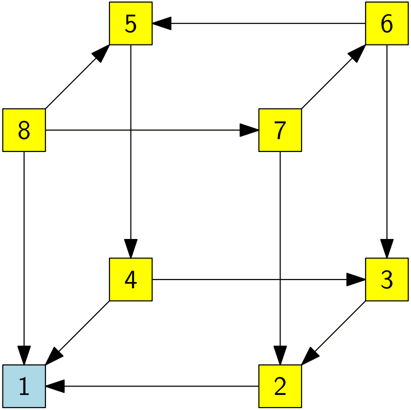
複数存在する候補の中のどれを選ぶのか，というバリエーションがある

その選び方が「近傍探索における移動戦略」である
(ピボット戦略，ピボット規則と呼ばれることもある)

移動戦略 (1)：即時移動

即時移動戦略

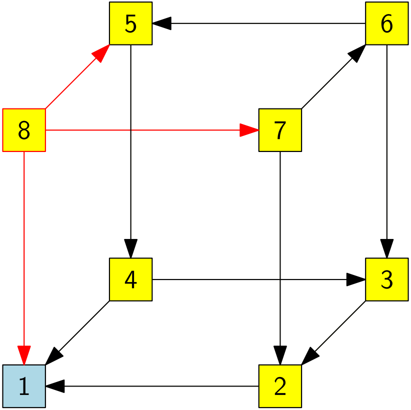
$x' \in N(x)$ で $f(x') < f(x)$ を満たすものが見つかったらすぐに，その x' を選ぶ



移動戦略 (1)：即時移動

即時移動戦略

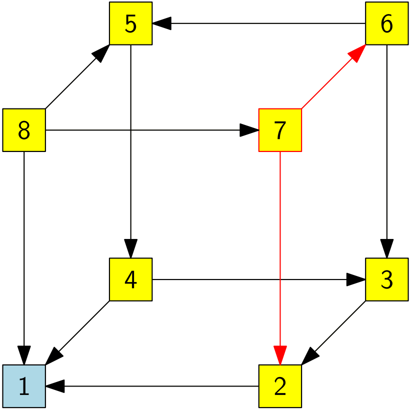
$x' \in N(x)$ で $f(x') < f(x)$ を満たすものが見つかったらすぐに，その x' を選ぶ



移動戦略 (1)：即時移動

即時移動戦略

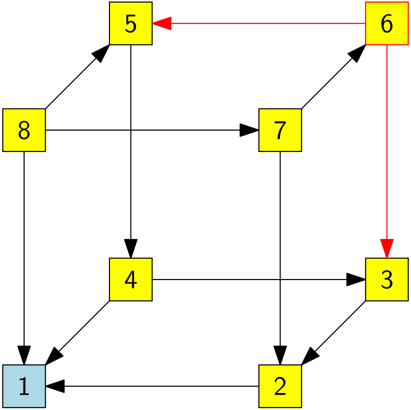
$x' \in N(x)$ で $f(x') < f(x)$ を満たすものが見つかったらすぐに，その x' を選ぶ



移動戦略 (1)：即時移動

即時移動戦略

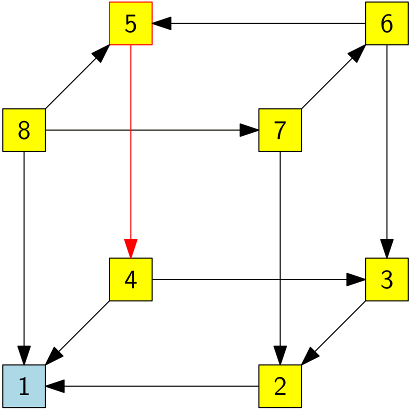
$x' \in N(x)$ で $f(x') < f(x)$ を満たすものが見つかったらすぐに，その x' を選ぶ



移動戦略 (1)：即時移動

即時移動戦略

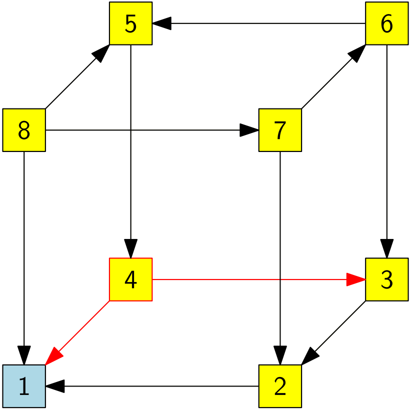
$x' \in N(x)$ で $f(x') < f(x)$ を満たすものが見つかったらすぐに，その x' を選ぶ



移動戦略 (1)：即時移動

即時移動戦略

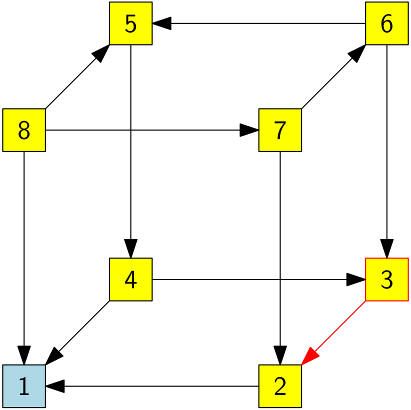
$x' \in N(x)$ で $f(x') < f(x)$ を満たすものが見つかったらすぐに，その x' を選ぶ



移動戦略 (1)：即時移動

即時移動戦略

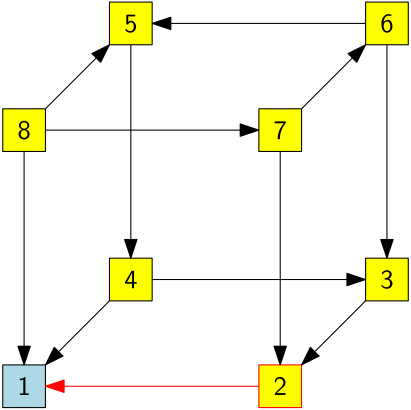
$x' \in N(x)$ で $f(x') < f(x)$ を満たすものが見つかったらすぐに，その x' を選ぶ



移動戦略 (1)：即時移動

即時移動戦略

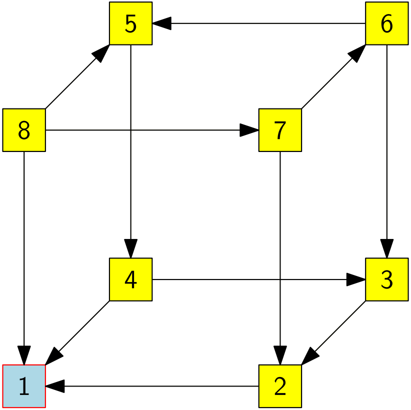
$x' \in N(x)$ で $f(x') < f(x)$ を満たすものが見つかったらすぐに，その x' を選ぶ



移動戦略 (1)：即時移動

即時移動戦略

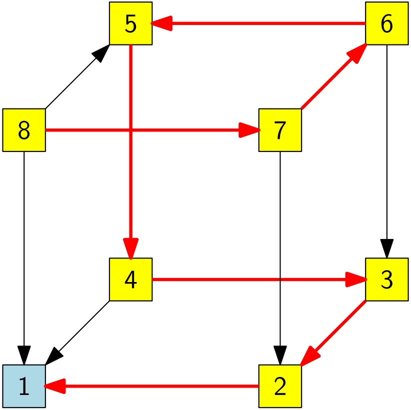
$x' \in N(x)$ で $f(x') < f(x)$ を満たすものが見つかったらすぐに，その x' を選ぶ



移動戦略 (1)：即時移動

即時移動戦略

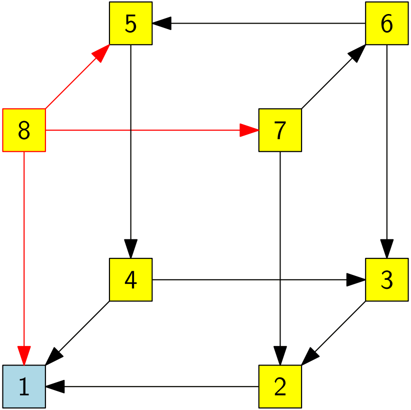
$x' \in N(x)$ で $f(x') < f(x)$ を満たすものが見つかったらすぐに，その x' を選ぶ



移動戦略 (2)：最良移動

最良移動戦略

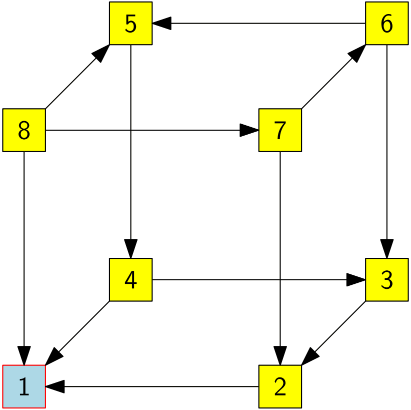
$x' \in N(x)$ で $f(x') < f(x)$ を満たすものがある場合，
$f(x')$ が最も小さいものを選ぶ



移動戦略 (2)：最良移動

最良移動戦略

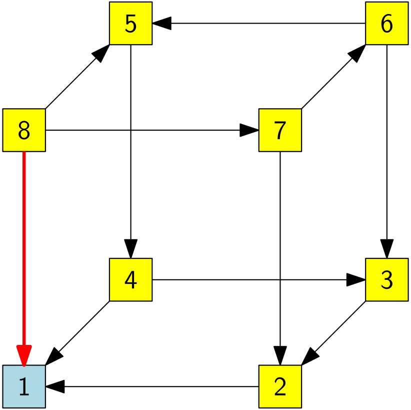
$x' \in N(x)$ で $f(x') < f(x)$ を満たすものがある場合，
$f(x')$ が最も小さいものを選ぶ



移動戦略 (2)：最良移動

最良移動戦略

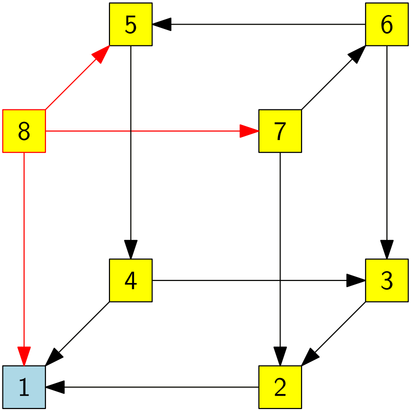
$x' \in N(x)$ で $f(x') < f(x)$ を満たすものがある場合，
$f(x')$ が最も小さいものを選ぶ



移動戦略 (3)：一様ランダム移動

一様ランダム移動戦略

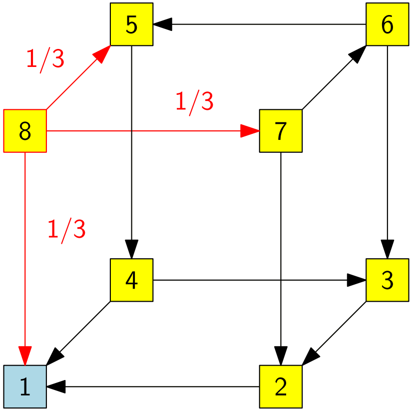
$x' \in N(x)$ で $f(x') < f(x)$ を満たすものがある場合，
そのような x' を**一様分布に従って**（一様ランダムに）選ぶ



移動戦略 (3)：一様ランダム移動

一様ランダム移動戦略

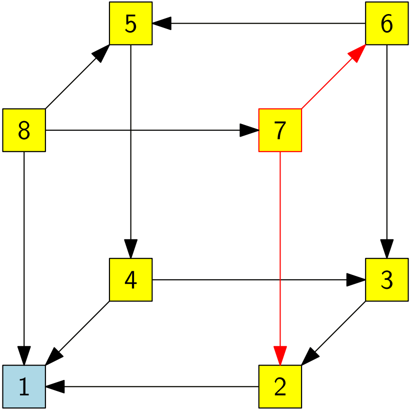
$x' \in N(x)$ で $f(x') < f(x)$ を満たすものがある場合，
そのような x' を一様分布に従って (一様ランダムに) 選ぶ



移動戦略 (3)：一様ランダム移動

一様ランダム移動戦略

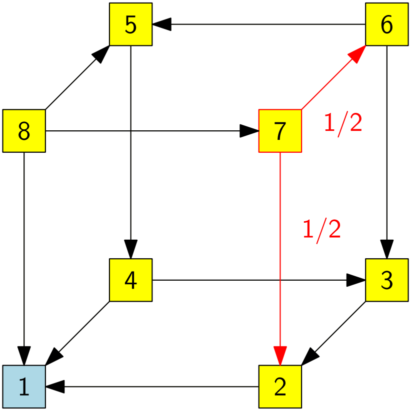
$x' \in N(x)$ で $f(x') < f(x)$ を満たすものがある場合，
そのような x' を**一様分布に従って**（一様ランダムに）選ぶ



移動戦略 (3)：一様ランダム移動

一様ランダム移動戦略

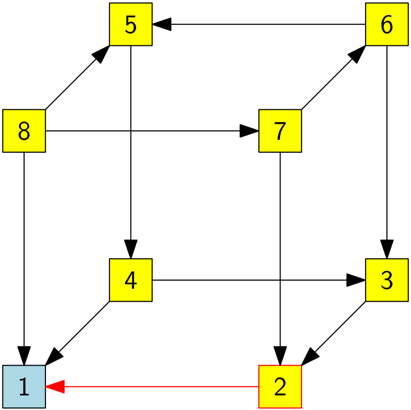
$x' \in N(x)$ で $f(x') < f(x)$ を満たすものがある場合，
そのような x' を**一様分布に従って** (一様ランダムに) 選ぶ



移動戦略 (3)：一様ランダム移動

一様ランダム移動戦略

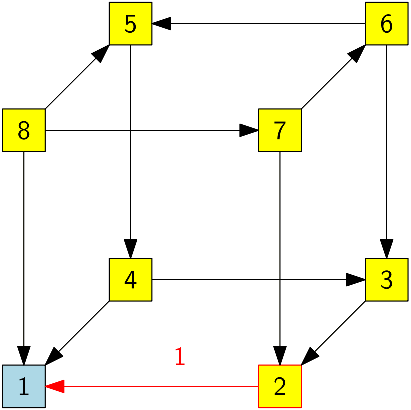
$x' \in N(x)$ で $f(x') < f(x)$ を満たすものがある場合，
そのような x' を一様分布に従って (一様ランダムに) 選ぶ



移動戦略 (3)：一様ランダム移動

一様ランダム移動戦略

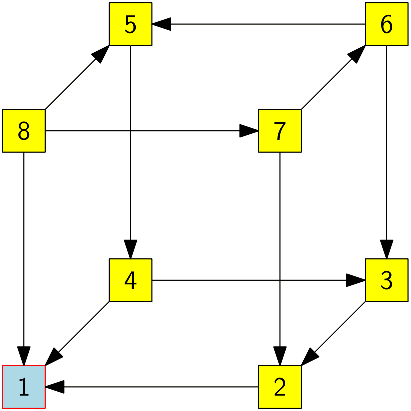
$x' \in N(x)$ で $f(x') < f(x)$ を満たすものがある場合，
そのような x' を**一様分布に従って** (一様ランダムに) 選ぶ



移動戦略 (3)：一様ランダム移動

一様ランダム移動戦略

$x' \in N(x)$ で $f(x') < f(x)$ を満たすものがある場合，
そのような x' を**一様分布に従って** (一様ランダムに) 選ぶ



乱択アルゴリズム

乱択アルゴリズム (randomized algorithm) とは？

乱択アルゴリズムとは，乱数を使用するアルゴリズム
(乱数使用アルゴリズム，確率的アルゴリズムとも呼ばれる)

乱択アルゴリズムの利点

乱数を使わない場合 (決定性アルゴリズム) に比べて，
- 性能が向上しやすい (ことがある)
- 設計をしやすい (ことがある)

乱択アルゴリズムの欠点

理論的解析を行いにくい

確率論を使う必要がある

一様ランダム移動による最悪期待反復回数

一様ランダム移動による最悪期待反復回数とは？

離散最適化問題

$$\begin{array}{ll} \text{最小化} & f(x) \\ \text{条　件} & x \in S \end{array}$$

と近傍関数 N に対して，**一様ランダム移動による最悪期待反復回数**は

$$\max \left\{ \ell \text{ の長さの期待値} \;\middle|\; \begin{array}{l} x \in S, \\ z \text{ は } x \text{ からたどり着ける} \\ \quad N \text{ に関する局所最適解}, \\ \ell \text{ は } x \text{ から } z \text{ へ至る経路} \end{array} \right\}$$

- 「長さ」，「経路」，「たどり着ける」という語句は，遷移グラフにおいて解釈するものとする
- 「期待値」は一様ランダム移動によって選ばれる確率の上で考える

目次

排反事象と独立事象

この講義で扱う確率はすべて離散確率 (**確率空間が有限か可算無限**)

- 2 **つの事象** A **と** B **が排反** (disjoint) **であるとは**

$$\Pr(A \text{ かつ } B) = 0$$

  であること (**注：離散確率の場合の定義**)

- 2 **つの事象** A **と** B **が独立** (independent) **であるとは**

$$\Pr(A \text{ かつ } B) = \Pr(A) \cdot \Pr(B)$$

  であること

条件付き確率

事象 A のもとでの B の条件付き確率 (conditional probability) **とは**

$$\Pr(B \mid A) = \frac{\Pr(A\ \text{かつ}\ B)}{\Pr(A)}$$

例：公平なサイコロを 1 **つ振る**
偶数が出たという条件のもとで 2 **が出る確率は**

$$\frac{\Pr(\text{偶数が出て，かつ，2 が出る})}{\Pr(\text{偶数が出る})} = \frac{\Pr(\text{2 が出る})}{\Pr(\text{偶数が出る})} = \frac{1/6}{1/2} = \frac{1}{3}$$

偶数が出たという条件のもとで 3 **が出る確率は**

$$\frac{\Pr(\text{偶数が出て，かつ，3 が出る})}{\Pr(\text{偶数が出る})} = \frac{\Pr(\emptyset)}{\Pr(\text{偶数が出る})} = 0$$

期待値と条件付き期待値

$\mathbb{N} = \{0, 1, 2, \ldots\}$ **上の実数値確率変数** X **の期待値** (expectation) **とは**

$$\mathrm{E}[X] = \sum_{i=0}^{\infty} i \cdot \Pr(X = i)$$

事象 A **のもとでの** X **の条件付き期待値** (conditional expectation) **とは**

$$\mathrm{E}[X \mid A] = \sum_{i=0}^{\infty} i \cdot \Pr(X = i \mid A)$$

性質

全体事象が A **と** B **に分割されるとき**

$$\mathrm{E}[X] = \mathrm{E}[X \mid A] \Pr(A) + \mathrm{E}[X \mid B] \Pr(B)$$

3 **つ以上の事象に分割されるときも同様**

期待値の線形性

性質 (期待値の線形性，linearity of expectation)

2 つの実数値確率変数 X, Y と定数 c に対して

$$\mathrm{E}[X+Y] = \mathrm{E}[X] + \mathrm{E}[Y], \quad \mathrm{E}[cX] = c\mathrm{E}[X]$$

例：サイコロを 2 回振ったとき，
1 回目の出目を X，2 回目の出目を Y とすると

$$\begin{aligned} \mathrm{E}[X+Y] &= \mathrm{E}[X] + \mathrm{E}[Y] = \frac{7}{2} + \frac{7}{2} = 7 \\ \mathrm{E}[2X] &= 2\mathrm{E}[X] = 2 \cdot \frac{7}{2} = 7 \end{aligned}$$

乱択アルゴリズムの解析でよく用いられる不等式 1

和集合上界 (union bound)

2 つの事象 A と B に対して

$$\Pr(A \text{ または } B) \leq \Pr(A) + \Pr(B)$$

例：公平なサイコロを 1 つ振る

- $A = \{1, 2, 3\}$ (出目が 3 以下である，という事象)
- $B = \{1, 3, 5\}$ (出目が奇数である，という事象)
- このとき

$$\Pr(A) + \Pr(B) = \Pr(\{1, 2, 3\}) + \Pr(\{1, 3, 5\}) = 1/2 + 1/2 = 1$$

であり，

$$\Pr(A \text{ または } B) = \Pr(\{1, 2, 3, 5\}) = 2/3$$

乱択アルゴリズムの解析でよく用いられる不等式 2

マルコフの不等式 (Markov's inequality)

非負値確率変数 $X \geq 0$ **と正実数** $t > 0$ **に対して，**$\mathrm{E}[X]$ **が存在するならば**

$$\Pr(X \geq t) \leq \frac{\mathrm{E}[X]}{t}$$

証明：離散確率のときのみ証明 (連続確率の場合も同様)

$$\mathrm{E}[X] = \sum_{i=0}^{\infty} i \cdot \Pr(X = i)$$

乱択アルゴリズムの解析でよく用いられる不等式 2

マルコフの不等式 (Markov's inequality)

非負値確率変数 $X \geq 0$ **と正実数** $t > 0$ **に対して，** $\mathrm{E}[X]$ **が存在するならば**

$$\Pr(X \geq t) \leq \frac{\mathrm{E}[X]}{t}$$

証明：離散確率のときのみ証明 (連続確率の場合も同様)

$$\begin{aligned}
\mathrm{E}[X] &= \sum_{i=0}^{\infty} i \cdot \Pr(X = i) \\
&= \sum_{i=0}^{t-1} \underbrace{i}_{\geq 0} \cdot \Pr(X = i) + \sum_{i=t}^{\infty} \underbrace{i}_{\geq t} \cdot \Pr(X = i)
\end{aligned}$$

乱択アルゴリズムの解析でよく用いられる不等式 2

マルコフの不等式 (Markov's inequality)

非負値確率変数 $X \geq 0$ **と正実数** $t > 0$ **に対して，** $\mathrm{E}[X]$ **が存在するならば**

$$\Pr(X \geq t) \leq \frac{\mathrm{E}[X]}{t}$$

証明：離散確率のときのみ証明 (連続確率の場合も同様)

$$\begin{aligned}
\mathrm{E}[X] &= \sum_{i=0}^{\infty} i \cdot \Pr(X = i) \\
&= \sum_{i=0}^{t-1} \underbrace{i}_{\geq 0} \cdot \Pr(X = i) + \sum_{i=t}^{\infty} \underbrace{i}_{\geq t} \cdot \Pr(X = i) \\
&\geq \sum_{i=t}^{\infty} t \cdot \Pr(X = i)
\end{aligned}$$

乱択アルゴリズムの解析でよく用いられる不等式 2

マルコフの不等式 (Markov's inequality)

非負値確率変数 $X \geq 0$ **と正実数** $t > 0$ **に対して，**$\mathrm{E}[X]$ **が存在するならば**

$$\Pr(X \geq t) \leq \frac{\mathrm{E}[X]}{t}$$

証明：離散確率のときのみ証明 (連続確率の場合も同様)

$$\begin{aligned}
\mathrm{E}[X] &= \sum_{i=0}^{\infty} i \cdot \Pr(X = i) \\
&= \sum_{i=0}^{t-1} \underbrace{i}_{\geq 0} \cdot \Pr(X = i) + \sum_{i=t}^{\infty} \underbrace{i}_{\geq t} \cdot \Pr(X = i) \\
&\geq \sum_{i=t}^{\infty} t \cdot \Pr(X = i) = t \sum_{i=t}^{\infty} \Pr(X = i)
\end{aligned}$$

乱択アルゴリズムの解析でよく用いられる不等式 2

マルコフの不等式 (Markov's inequality)

非負値確率変数 $X \geq 0$ と正実数 $t > 0$ に対して，$\mathrm{E}[X]$ が存在するならば

$$\Pr(X \geq t) \leq \frac{\mathrm{E}[X]}{t}$$

証明：離散確率のときのみ証明 (連続確率の場合も同様)

$$\begin{aligned}
\mathrm{E}[X] &= \sum_{i=0}^{\infty} i \cdot \Pr(X = i) \\
&= \sum_{i=0}^{t-1} \underbrace{i}_{\geq 0} \cdot \Pr(X = i) + \sum_{i=t}^{\infty} \underbrace{i}_{\geq t} \cdot \Pr(X = i) \\
&\geq \sum_{i=t}^{\infty} t \cdot \Pr(X = i) = t \sum_{i=t}^{\infty} \Pr(X = i) = t \cdot \Pr(X \geq t)
\end{aligned}$$

$\square$

目次

一様ランダム移動による最悪期待反復回数 (再掲)

一様ランダム移動による最悪期待反復回数とは？

離散最適化問題

$$\begin{array}{ll} \text{最小化} & f(x) \\ \text{条　件} & x \in S \end{array}$$

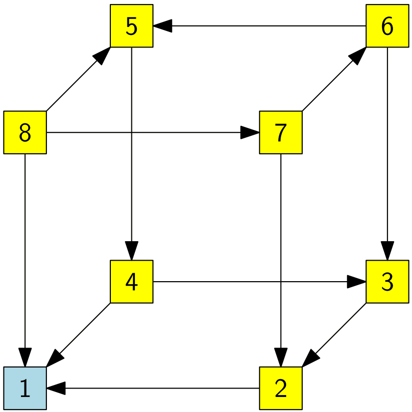
と近傍関数 N に対して，**一様ランダム移動による最悪期待反復回数**は

$$\max \left\{ \ell \text{ の長さの期待値} \;\middle|\; \begin{array}{l} x \in S, \\ z \text{ は } x \text{ からたどり着ける} \\ \;N \text{ に関する局所最適解}, \\ \ell \text{ は } x \text{ から } z \text{ へ至る経路} \end{array} \right\}$$

- 「長さ」,「経路」,「たどり着ける」という語句は，遷移グラフにおいて解釈するものとする
- 「期待値」は一様ランダム移動によって選ばれる確率の上で考える

一様ランダム移動戦略による最悪期待反復回数の計算例 (1)

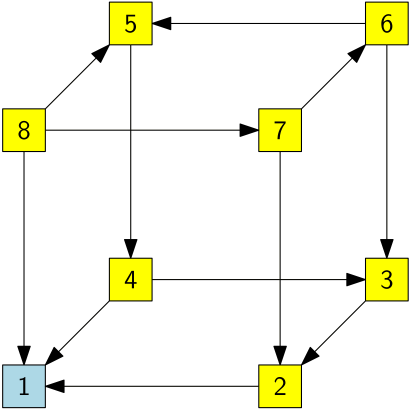
X_i = **目的関数値が i である許容解から最適解へ至る経路の長さ (確率変数)**



欲しいもの： $\max\{\mathrm{E}[X_1], \mathrm{E}[X_2], \mathrm{E}[X_3], \mathrm{E}[X_4], \mathrm{E}[X_5], \mathrm{E}[X_6], \mathrm{E}[X_7], \mathrm{E}[X_8]\}$

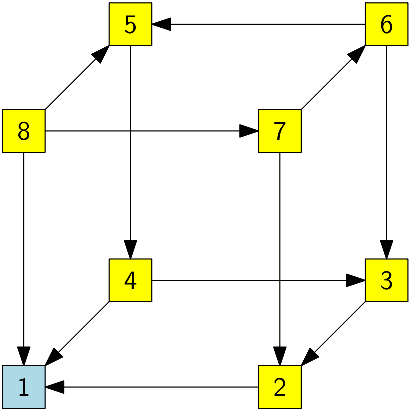
一様ランダム移動戦略による最悪期待反復回数の計算例 (2)

- $\mathrm{E}[X_1] = 0$



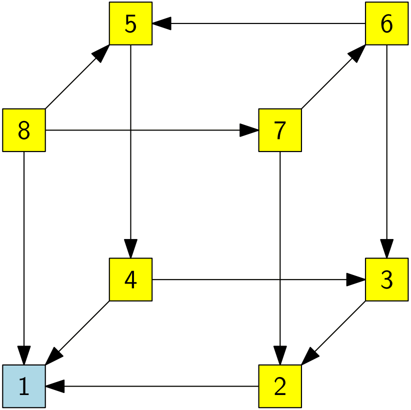
一様ランダム移動戦略による最悪期待反復回数の計算例 (2)

- $\mathrm{E}[X_1] = 0$
- $\mathrm{E}[X_2] = 1$



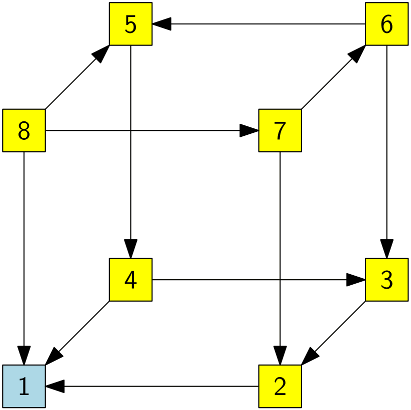
一様ランダム移動戦略による最悪期待反復回数の計算例 (2)

- $\mathrm{E}[X_1] = 0$
- $\mathrm{E}[X_2] = 1$
- $\mathrm{E}[X_3] = 2$



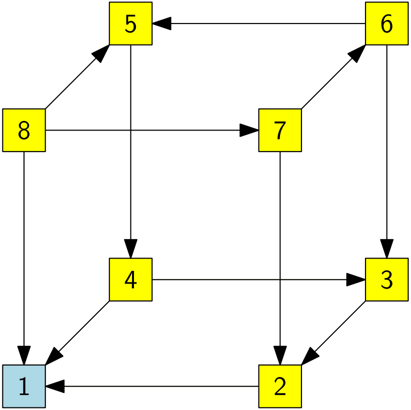
一様ランダム移動戦略による最悪期待反復回数の計算例 (2)

- $\mathrm{E}[X_1] = 0$
- $\mathrm{E}[X_2] = 1$
- $\mathrm{E}[X_3] = 2$
- $\mathrm{E}[X_4] = \frac{1}{2} \cdot 1 + \frac{1}{2} \cdot 3 = 2$



一様ランダム移動戦略による最悪期待反復回数の計算例 (3)

$$\begin{aligned} \mathrm{E}[X_4] &= \mathrm{E}[X_4 \mid 4 \to 1] \cdot \Pr[4 \to 1] \\ &\quad + \mathrm{E}[X_4 \mid 4 \to 3] \cdot \Pr[4 \to 3] \end{aligned}$$



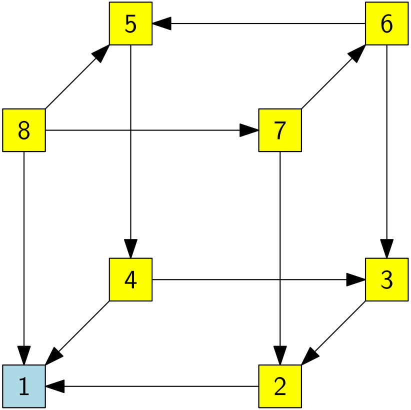
省略して，
「i から j に進むこと」を
「$i \to j$」と書くことにする

性質 (再掲)

全体事象が A と B に分割されるとき
$\mathrm{E}[X] = \mathrm{E}[X \mid A] \Pr(A) + \mathrm{E}[X \mid B] \Pr(B)$

一様ランダム移動戦略による最悪期待反復回数の計算例 (4)

$$\mathrm{E}[X_4 \mid 4 \to 1] \\ = \sum_i i \cdot \Pr(X_4 = i \mid 4 \to 1)$$

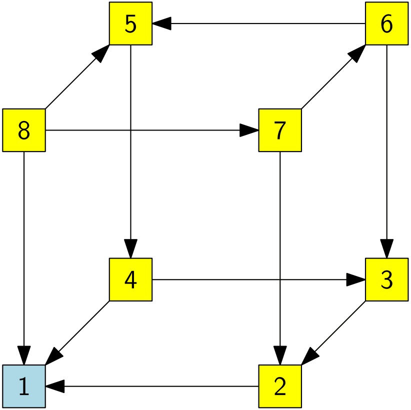


定義 (再掲)

$$\mathrm{E}[X \mid A] = \sum_i i \cdot \Pr(X = i \mid A)$$

一様ランダム移動戦略による最悪期待反復回数の計算例 (4)

$$
\begin{aligned}
&\mathrm{E}[X_4 \mid 4 \to 1] \\
&= \sum_i i \cdot \Pr(X_4 = i \mid 4 \to 1) \\
&= \sum_i i \cdot \Pr(X_1 + 1 = i)
\end{aligned}
$$

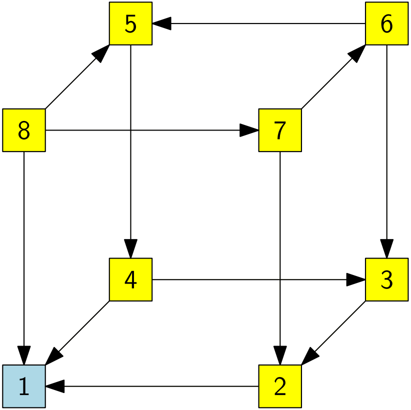


定義 (再掲)

$$\mathrm{E}[X \mid A] = \sum_i i \cdot \Pr(X = i \mid A)$$

一様ランダム移動戦略による最悪期待反復回数の計算例 (4)

$$\begin{aligned}
&\mathrm{E}[X_4 \mid 4 \to 1] \\
&\quad = \sum_i i \cdot \Pr(X_4 = i \mid 4 \to 1) \\
&\quad = \sum_i i \cdot \Pr(X_1 + 1 = i) \\
&\quad = \mathrm{E}[X_1 + 1]
\end{aligned}$$



定義 (再掲)

$$\mathrm{E}[X \mid A] = \sum_i i \cdot \Pr(X = i \mid A)$$

一様ランダム移動戦略による最悪期待反復回数の計算例 (5)

$$
\begin{aligned}
&\mathrm{E}[X_4] \\
&= \mathrm{E}[X_4 \mid 4 \to 1] \cdot \Pr[4 \to 1] + \mathrm{E}[X_4 \mid 4 \to 3] \cdot \Pr[4 \to 3]
\end{aligned}
$$

一様ランダム移動戦略による最悪期待反復回数の計算例 (5)

$$
\begin{aligned}
&\mathrm{E}[X_4] \\
&= \mathrm{E}[X_4 \mid 4 \to 1] \cdot \Pr[4 \to 1] + \mathrm{E}[X_4 \mid 4 \to 3] \cdot \Pr[4 \to 3] \\
&= \mathrm{E}[X_1 + 1] \cdot \Pr[4 \to 1] + \mathrm{E}[X_3 + 1] \cdot \Pr[4 \to 3]
\end{aligned}
$$

一様ランダム移動戦略による最悪期待反復回数の計算例 (5)

$$
\begin{aligned}
&\mathrm{E}[X_4] \\
&= \mathrm{E}[X_4 \mid 4 \to 1] \cdot \Pr[4 \to 1] + \mathrm{E}[X_4 \mid 4 \to 3] \cdot \Pr[4 \to 3] \\
&= \mathrm{E}[X_1 + 1] \cdot \Pr[4 \to 1] + \mathrm{E}[X_3 + 1] \cdot \Pr[4 \to 3] \\
&= (\mathrm{E}[X_1] + 1) \cdot \Pr[4 \to 1] + (\mathrm{E}[X_3] + 1) \cdot \Pr[4 \to 3] \qquad \text{←期待値の線形性}
\end{aligned}
$$

一様ランダム移動戦略による最悪期待反復回数の計算例 (5)

$$
\begin{aligned}
&\mathrm{E}[X_4] \\
&= \mathrm{E}[X_4 \mid 4 \to 1] \cdot \Pr[4 \to 1] + \mathrm{E}[X_4 \mid 4 \to 3] \cdot \Pr[4 \to 3] \\
&= \mathrm{E}[X_1 + 1] \cdot \Pr[4 \to 1] + \mathrm{E}[X_3 + 1] \cdot \Pr[4 \to 3] \\
&= (\mathrm{E}[X_1] + 1) \cdot \Pr[4 \to 1] + (\mathrm{E}[X_3] + 1) \cdot \Pr[4 \to 3] \quad \leftarrow \text{期待値の線形性} \\
&= 1 + \mathrm{E}[X_1] \cdot \Pr[4 \to 1] + \mathrm{E}[X_3] \cdot \Pr[4 \to 3]
\end{aligned}
$$

一様ランダム移動戦略による最悪期待反復回数の計算例 (5)

$$
\begin{aligned}
&\mathrm{E}[X_4] \\
&= \mathrm{E}[X_4 \mid 4 \to 1] \cdot \Pr[4 \to 1] + \mathrm{E}[X_4 \mid 4 \to 3] \cdot \Pr[4 \to 3] \\
&= \mathrm{E}[X_1 + 1] \cdot \Pr[4 \to 1] + \mathrm{E}[X_3 + 1] \cdot \Pr[4 \to 3] \\
&= (\mathrm{E}[X_1] + 1) \cdot \Pr[4 \to 1] + (\mathrm{E}[X_3] + 1) \cdot \Pr[4 \to 3] \qquad \leftarrow \text{期待値の線形性} \\
&= 1 + \mathrm{E}[X_1] \cdot \Pr[4 \to 1] + \mathrm{E}[X_3] \cdot \Pr[4 \to 3] \\
&= 1 + \frac{1}{2}\mathrm{E}[X_1] + \frac{1}{2}\mathrm{E}[X_3]
\end{aligned}
$$

一様ランダム移動戦略による最悪期待反復回数の計算例 (5)

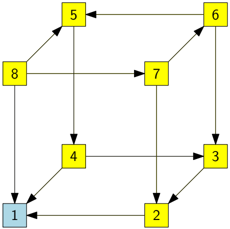
$$
\begin{aligned}
&\mathrm{E}[X_4] \\
&= \mathrm{E}[X_4 \mid 4 \to 1] \cdot \Pr[4 \to 1] + \mathrm{E}[X_4 \mid 4 \to 3] \cdot \Pr[4 \to 3] \\
&= \mathrm{E}[X_1 + 1] \cdot \Pr[4 \to 1] + \mathrm{E}[X_3 + 1] \cdot \Pr[4 \to 3] \\
&= (\mathrm{E}[X_1] + 1) \cdot \Pr[4 \to 1] + (\mathrm{E}[X_3] + 1) \cdot \Pr[4 \to 3] \quad \leftarrow \text{期待値の線形性} \\
&= 1 + \mathrm{E}[X_1] \cdot \Pr[4 \to 1] + \mathrm{E}[X_3] \cdot \Pr[4 \to 3] \\
&= 1 + \frac{1}{2}\mathrm{E}[X_1] + \frac{1}{2}\mathrm{E}[X_3] \\
&= 1 + \frac{1}{2} \cdot 0 + \frac{1}{2} \cdot 2
\end{aligned}
$$

一様ランダム移動戦略による最悪期待反復回数の計算例 (5)

$$
\begin{aligned}
&\mathrm{E}[X_4]\\
&= \mathrm{E}[X_4 \mid 4 \to 1] \cdot \Pr[4 \to 1] + \mathrm{E}[X_4 \mid 4 \to 3] \cdot \Pr[4 \to 3]\\
&= \mathrm{E}[X_1 + 1] \cdot \Pr[4 \to 1] + \mathrm{E}[X_3 + 1] \cdot \Pr[4 \to 3]\\
&= (\mathrm{E}[X_1] + 1) \cdot \Pr[4 \to 1] + (\mathrm{E}[X_3] + 1) \cdot \Pr[4 \to 3] \qquad \text{←期待値の線形性}\\
&= 1 + \mathrm{E}[X_1] \cdot \Pr[4 \to 1] + \mathrm{E}[X_3] \cdot \Pr[4 \to 3]\\
&= 1 + \frac{1}{2}\mathrm{E}[X_1] + \frac{1}{2}\mathrm{E}[X_3]\\
&= 1 + \frac{1}{2} \cdot 0 + \frac{1}{2} \cdot 2\\
&= 2
\end{aligned}
$$

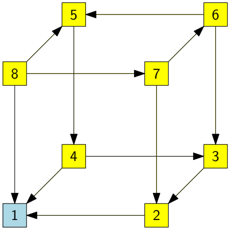
一様ランダム移動戦略による最悪期待反復回数の計算例 (6)

- $\mathrm{E}[X_1] = 0$
- $\mathrm{E}[X_2] = 1$
- $\mathrm{E}[X_3] = 2$
- $\mathrm{E}[X_4] = 1 + \frac{1}{2} \cdot \mathrm{E}[X_1] + \frac{1}{2} \cdot \mathrm{E}[X_3] = 2$



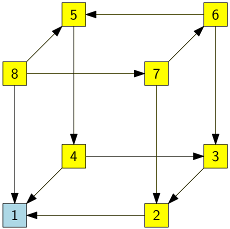
一様ランダム移動戦略による最悪期待反復回数の計算例 (6)

- $\mathrm{E}[X_1] = 0$
- $\mathrm{E}[X_2] = 1$
- $\mathrm{E}[X_3] = 2$
- $\mathrm{E}[X_4] = 1 + \frac{1}{2} \cdot \mathrm{E}[X_1] + \frac{1}{2} \cdot \mathrm{E}[X_3] = 2$
- $\mathrm{E}[X_5] = 1 + \mathrm{E}[X_4] = 3$



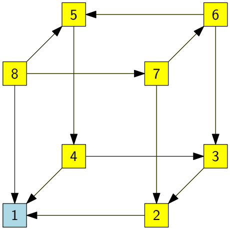
一様ランダム移動戦略による最悪期待反復回数の計算例 (6)

- $\mathrm{E}[X_1] = 0$
- $\mathrm{E}[X_2] = 1$
- $\mathrm{E}[X_3] = 2$
- $\mathrm{E}[X_4] = 1 + \frac{1}{2} \cdot \mathrm{E}[X_1] + \frac{1}{2} \cdot \mathrm{E}[X_3] = 2$
- $\mathrm{E}[X_5] = 1 + \mathrm{E}[X_4] = 3$
- $\mathrm{E}[X_6] = 1 + \frac{1}{2}\mathrm{E}[X_3] + \frac{1}{2}\mathrm{E}[X_5] = \frac{7}{2}$



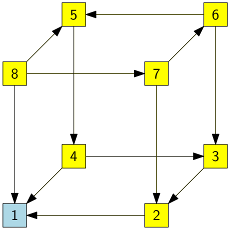
一様ランダム移動戦略による最悪期待反復回数の計算例 (6)

- $\mathrm{E}[X_1] = 0$
- $\mathrm{E}[X_2] = 1$
- $\mathrm{E}[X_3] = 2$
- $\mathrm{E}[X_4] = 1 + \frac{1}{2} \cdot \mathrm{E}[X_1] + \frac{1}{2} \cdot \mathrm{E}[X_3] = 2$
- $\mathrm{E}[X_5] = 1 + \mathrm{E}[X_4] = 3$
- $\mathrm{E}[X_6] = 1 + \frac{1}{2}\mathrm{E}[X_3] + \frac{1}{2}\mathrm{E}[X_5] = \frac{7}{2}$
- $\mathrm{E}[X_7] = 1 + \frac{1}{2}\mathrm{E}[X_2] + \frac{1}{2}\mathrm{E}[X_6] = \frac{13}{4}$



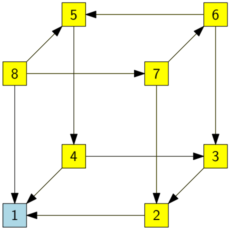
一様ランダム移動戦略による最悪期待反復回数の計算例 (6)

- $\mathrm{E}[X_1] = 0$
- $\mathrm{E}[X_2] = 1$
- $\mathrm{E}[X_3] = 2$
- $\mathrm{E}[X_4] = 1 + \frac{1}{2} \cdot \mathrm{E}[X_1] + \frac{1}{2} \cdot \mathrm{E}[X_3] = 2$
- $\mathrm{E}[X_5] = 1 + \mathrm{E}[X_4] = 3$
- $\mathrm{E}[X_6] = 1 + \frac{1}{2}\mathrm{E}[X_3] + \frac{1}{2}\mathrm{E}[X_5] = \frac{7}{2}$
- $\mathrm{E}[X_7] = 1 + \frac{1}{2}\mathrm{E}[X_2] + \frac{1}{2}\mathrm{E}[X_6] = \frac{13}{4}$
- $\mathrm{E}[X_8] = 1 + \frac{1}{3}\mathrm{E}[X_1] + \frac{1}{3}\mathrm{E}[X_5] + \frac{1}{3}\mathrm{E}[X_7] = \frac{37}{12}$



一様ランダム移動戦略による最悪期待反復回数の計算例 (6)

- $\mathrm{E}[X_1] = 0$
- $\mathrm{E}[X_2] = 1$
- $\mathrm{E}[X_3] = 2$
- $\mathrm{E}[X_4] = 1 + \frac{1}{2} \cdot \mathrm{E}[X_1] + \frac{1}{2} \cdot \mathrm{E}[X_3] = 2$
- $\mathrm{E}[X_5] = 1 + \mathrm{E}[X_4] = 3$
- $\mathrm{E}[X_6] = 1 + \frac{1}{2}\mathrm{E}[X_3] + \frac{1}{2}\mathrm{E}[X_5] = \frac{7}{2}$
- $\mathrm{E}[X_7] = 1 + \frac{1}{2}\mathrm{E}[X_2] + \frac{1}{2}\mathrm{E}[X_6] = \frac{13}{4}$
- $\mathrm{E}[X_8] = 1 + \frac{1}{3}\mathrm{E}[X_1] + \frac{1}{3}\mathrm{E}[X_5] + \frac{1}{3}\mathrm{E}[X_7] = \frac{37}{12}$



よって， $\max\{\mathrm{E}[X_1], \mathrm{E}[X_2], \mathrm{E}[X_3], \mathrm{E}[X_4], \mathrm{E}[X_5], \mathrm{E}[X_6], \mathrm{E}[X_7], \mathrm{E}[X_8]\} = \frac{7}{2}$

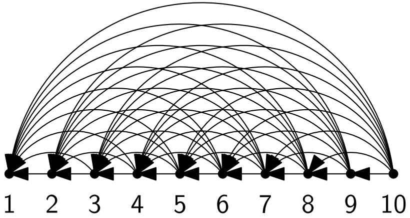
目次

例題

例題

- 許容集合：$S = \{1, 2, \ldots, n\}$
- 目的関数：任意の $x \in S$ に対して，$f(x) = x$
- 近傍関数：任意の $x \in S$ に対して，$N(x) = S$

一様ランダム移動による最悪期待反復回数は？



局所最適解は 1 のみ

最悪期待反復回数

定理 13.1

この例題の最悪期待反復回数は

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n-1}$$

注：次の H_n **は** n **次調和数** (n-th harmonic number) **と呼ばれる**

$$H_n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n}$$

事実として， $H_n = \ln n + O(1)$ **が成り立つ**

定理 13.1 の証明 (1)

- 任意の $k = 1, 2, \ldots, n$ に対して

$$X_k \quad = \quad \text{許容解 } k \text{ から最適解 } 1 \text{ へ至る経路の長さ}$$

とする

定理 13.1 の証明 (1)

- 任意の $k = 1, 2, \ldots, n$ に対して

$$X_k = \text{許容解 } k \text{ から最適解 } 1 \text{ へ至る経路の長さ}$$

  とする
- このとき，$\mathrm{E}[X_1] = 0$

定理 13.1 の証明 (1)

- 任意の $k = 1, 2, \dots, n$ に対して
$$X_k = \text{許容解 } k \text{ から最適解 } 1 \text{ へ至る経路の長さ}$$
とする
- このとき，$\mathrm{E}[X_1] = 0$ で，$k \geq 1$ のとき，
$$\mathrm{E}[X_k] = \sum_{i=1}^{k-1} \mathrm{E}[X_k \mid k \to i] \cdot \Pr(k \to i)$$

定理 13.1 の証明 (1)

- 任意の $k = 1, 2, \ldots, n$ に対して

$$X_k = \text{許容解 } k \text{ から最適解 } 1 \text{ へ至る経路の長さ}$$

  とする
- このとき，$\mathrm{E}[X_1] = 0$ で，$k \geq 1$ のとき，

$$\begin{aligned} \mathrm{E}[X_k] &= \sum_{i=1}^{k-1} \mathrm{E}[X_k \mid k \to i] \cdot \Pr(k \to i) \\ &= 1 + \sum_{i=1}^{k-1} \mathrm{E}[X_i] \cdot \frac{1}{k-1} \end{aligned}$$

定理 13.1 の証明 (1)

- 任意の $k = 1, 2, \ldots, n$ に対して
  $$X_k = \text{許容解 } k \text{ から最適解 } 1 \text{ へ至る経路の長さ}$$
  とする
- このとき，$\mathrm{E}[X_1] = 0$ で，$k \geq 1$ のとき，
  $$\begin{aligned} \mathrm{E}[X_k] &= \sum_{i=1}^{k-1} \mathrm{E}[X_k \mid k \to i] \cdot \Pr(k \to i) \\ &= 1 + \sum_{i=1}^{k-1} \mathrm{E}[X_i] \cdot \frac{1}{k-1} \\ &= 1 + \frac{1}{k-1} \sum_{i=1}^{k-1} \mathrm{E}[X_i] \end{aligned}$$

定理 13.1 の証明 (1)

- 任意の $k = 1, 2, \ldots, n$ に対して

$$X_k \quad = \quad \text{許容解 } k \text{ から最適解 } 1 \text{ へ至る経路の長さ}$$

  とする
- このとき，$\mathrm{E}[X_1] = 0$ で，$k \geq 1$ のとき，

$$\begin{aligned} \mathrm{E}[X_k] &= \sum_{i=1}^{k-1} \mathrm{E}[X_k \mid k \to i] \cdot \Pr(k \to i) \\ &= 1 + \sum_{i=1}^{k-1} \mathrm{E}[X_i] \cdot \frac{1}{k-1} \\ &= 1 + \frac{1}{k-1} \sum_{i=1}^{k-1} \mathrm{E}[X_i] \end{aligned}$$

- この再帰式を解きたい

定理 13.1 の証明 (2)

- **両辺を $k-1$ 倍すると，$k \geq 1$ のとき**

$$(k-1)\mathrm{E}[X_k] = k - 1 + \sum_{i=1}^{k-1} \mathrm{E}[X_i]$$

- **よって，$k \geq 2$ のとき**

$$(k-2)\mathrm{E}[X_{k-1}] = k - 2 + \sum_{i=1}^{k-2} \mathrm{E}[X_i]$$

- **上の式から下の式を引くと，$k \geq 2$ のとき**

$$(k-1)\mathrm{E}[X_k] - (k-2)\mathrm{E}[X_{k-1}] = 1 + \mathrm{E}[X_{k-1}]$$

定理 13.1 の証明 (2)

- 両辺を $k-1$ 倍すると，$k \geq 1$ のとき

$$(k-1)\mathrm{E}[X_k] = k - 1 + \sum_{i=1}^{k-1} \mathrm{E}[X_i]$$

- よって，$k \geq 2$ のとき

$$(k-2)\mathrm{E}[X_{k-1}] = k - 2 + \sum_{i=1}^{k-2} \mathrm{E}[X_i]$$

- 上の式から下の式を引くと，$k \geq 2$ のとき

$$\begin{aligned}(k-1)\mathrm{E}[X_k] - (k-2)\mathrm{E}[X_{k-1}] &= 1 + \mathrm{E}[X_{k-1}] \\ (k-1)\mathrm{E}[X_k] - (k-1)\mathrm{E}[X_{k-1}] &= 1\end{aligned}$$

定理 13.1 の証明 (2)

- 両辺を $k-1$ 倍すると，$k \geq 1$ のとき

$$(k-1)\mathrm{E}[X_k] = k-1+\sum_{i=1}^{k-1}\mathrm{E}[X_i]$$

- よって，$k \geq 2$ のとき

$$(k-2)\mathrm{E}[X_{k-1}] = k-2+\sum_{i=1}^{k-2}\mathrm{E}[X_i]$$

- 上の式から下の式を引くと，$k \geq 2$ のとき

$$\begin{aligned}(k-1)\mathrm{E}[X_k]-(k-2)\mathrm{E}[X_{k-1}] &= 1+\mathrm{E}[X_{k-1}]\\ (k-1)\mathrm{E}[X_k]-(k-1)\mathrm{E}[X_{k-1}] &= 1\\ \mathrm{E}[X_k] &= \frac{1}{k-1}+\mathrm{E}[X_{k-1}]\end{aligned}$$

定理 13.1 の証明 (3)

- したがって，$k \geq 2$ のとき，

$$\mathrm{E}[X_k] = \frac{1}{k-1} + \mathrm{E}[X_{k-1}]$$

-

定理 13.1 の証明 (3)

- したがって，$k \geq 2$ のとき，

$$
\begin{aligned}
\mathrm{E}[X_k] &= \frac{1}{k-1} + \mathrm{E}[X_{k-1}] \\
&= \frac{1}{k-1} + \frac{1}{k-2} + \mathrm{E}[X_{k-2}]
\end{aligned}
$$

-

定理 13.1 の証明 (3)

- したがって，$k \geq 2$ のとき，

$$
\begin{aligned}
\mathrm{E}[X_k] &= \frac{1}{k-1} + \mathrm{E}[X_{k-1}] \\
&= \frac{1}{k-1} + \frac{1}{k-2} + \mathrm{E}[X_{k-2}] \\
&= \frac{1}{k-1} + \frac{1}{k-2} + \frac{1}{k-3} + \mathrm{E}[X_{k-3}]
\end{aligned}
$$

-

定理 13.1 の証明 (3)

- したがって，$k \geq 2$ のとき，

$$
\begin{aligned}
\mathrm{E}[X_k] &= \frac{1}{k-1} + \mathrm{E}[X_{k-1}] \\
&= \frac{1}{k-1} + \frac{1}{k-2} + \mathrm{E}[X_{k-2}] \\
&= \frac{1}{k-1} + \frac{1}{k-2} + \frac{1}{k-3} + \mathrm{E}[X_{k-3}] \\
&= \cdots \\
&= \frac{1}{k-1} + \frac{1}{k-2} + \frac{1}{k-3} + \cdots + \frac{1}{1} + \underbrace{\mathrm{E}[X_1]}_{=0}
\end{aligned}
$$

-

定理 13.1 の証明 (3)

- したがって，$k \geq 2$ のとき，

$$
\begin{aligned}
\mathrm{E}[X_k] &= \frac{1}{k-1} + \mathrm{E}[X_{k-1}] \\
&= \frac{1}{k-1} + \frac{1}{k-2} + \mathrm{E}[X_{k-2}] \\
&= \frac{1}{k-1} + \frac{1}{k-2} + \frac{1}{k-3} + \mathrm{E}[X_{k-3}] \\
&= \cdots \\
&= \frac{1}{k-1} + \frac{1}{k-2} + \frac{1}{k-3} + \cdots + \frac{1}{1} + \underbrace{\mathrm{E}[X_1]}_{=0} \\
&= H_{k-1}
\end{aligned}
$$

-

定理 13.1 の証明 (3)

- したがって，$k \geq 2$ のとき，

$$
\begin{aligned}
\mathrm{E}[X_k] &= \frac{1}{k-1} + \mathrm{E}[X_{k-1}] \\
&= \frac{1}{k-1} + \frac{1}{k-2} + \mathrm{E}[X_{k-2}] \\
&= \frac{1}{k-1} + \frac{1}{k-2} + \frac{1}{k-3} + \mathrm{E}[X_{k-3}] \\
&= \cdots \\
&= \frac{1}{k-1} + \frac{1}{k-2} + \frac{1}{k-3} + \cdots + \frac{1}{1} + \underbrace{\mathrm{E}[X_1]}_{=0} \\
&= H_{k-1}
\end{aligned}
$$

- 特に

$$
\max\{\mathrm{E}[X_k] \mid k \in \{1,\dots,n\}\} = \mathrm{E}[X_n] = H_{n-1}
$$

□

最悪期待反復回数と高確率で成立する最悪反復回数 (1)

- 最悪期待反復回数が分かると何がよいか？
- 最悪期待反復回数が小さいからといって，
  アルゴリズムがそれだけしか反復を行わないとは限らない
  (乱数を使っているから)

最悪期待反復回数と高確率で成立する最悪反復回数 (1)

- 最悪期待反復回数が分かると何がよいか？
- 最悪期待反復回数が小さいからといって，アルゴリズムがそれだけしか反復を行わないとは限らない (乱数を使っているから)
- しかし，

$$\Pr(X_n \geq 2H_{n-1}) \quad \leq \quad \frac{\mathrm{E}[X_n]}{2H_{n-1}} \qquad (\text{Markov の不等式})$$

最悪期待反復回数と高確率で成立する最悪反復回数 (1)

- 最悪期待反復回数が分かると何がよいか？
- 最悪期待反復回数が小さいからといって，
アルゴリズムがそれだけしか反復を行わないとは限らない
(乱数を使っているから)
- しかし，

$$\begin{aligned}\Pr(X_n \geq 2H_{n-1}) &\leq \frac{\mathrm{E}[X_n]}{2H_{n-1}} \qquad (\text{Markov の不等式})\\ &= \frac{H_{n-1}}{2H_{n-1}} = \frac{1}{2}\end{aligned}$$

最悪期待反復回数と高確率で成立する最悪反復回数 (1)

- **最悪期待反復回数が分かると何がよいか？**
- **最悪期待反復回数が小さいからといって，アルゴリズムがそれだけしか反復を行わないとは限らない (乱数を使っているから)**
- **しかし，**

$$\begin{aligned}\Pr(X_n \geq 2H_{n-1}) &\leq \frac{\mathrm{E}[X_n]}{2H_{n-1}} \qquad (\text{Markov } \textbf{の不等式}) \\ &= \frac{H_{n-1}}{2H_{n-1}} = \frac{1}{2}\end{aligned}$$

- **つまり，**$\Pr(X_n < 2H_{n-1}) \geq 1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$
- $\frac{1}{2}$ **以上の確率で，反復回数は小さい** ($2H_{n-1}$ **未満**)

最悪期待反復回数と高確率で成立する最悪反復回数 (2)

- X_n の代わりに 2^{X_n} を考えてみる

定理 13.2

任意の $k = 1, 2, \ldots, n$ に対して

$$\mathrm{E}[2^{X_k}] = k$$

- すなわち，

$$\begin{aligned} \Pr(X_k \geq 3\log_2 n) &= \Pr(2^{X_k} \geq 2^{3\log_2 n}) \\ &= \Pr(2^{X_k} \geq n^3) \\ &\leq \frac{\mathrm{E}[2^{X_k}]}{n^3} = \frac{k}{n^3} \leq \frac{n}{n^3} = \frac{1}{n^2} \end{aligned}$$

最悪期待反復回数と高確率で成立する最悪反復回数 (3)

つまり，

- $\Pr(\max\{X_1, \dots, X_n\} \geq 3 \log_2 n)$

$$= \Pr(X_1 \geq 3 \log_2 n \ \textbf{または} \ \cdots \ \textbf{または} \ X_n \geq 3 \log_2 n)$$
$$\leq \sum_{k=1}^{n} \Pr(X_k \geq 3 \log_2 n) \qquad \text{(}\textbf{←和集合上界}\text{)}$$
$$\leq \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{n^2}$$
$$= \frac{1}{n}$$

- $\therefore \Pr(\textbf{最悪反復回数} < 3 \log_2 n) > 1 - \dfrac{1}{n}$
- **よって，** $1 - \dfrac{1}{n}$ **以上の確率で最悪反復回数は小さい** ($3 \log_2 n$ **未満**)

定理 13.2 の証明 (1)

定理 13.1 と同様に進める

- $\mathrm{E}[2^{X_1}] = 2^0 = 1$ で，$k \geq 1$ のとき，

$$\begin{aligned}
\mathrm{E}[2^{X_k}] &= \sum_{i=1}^{k-1} \mathrm{E}[2^{X_k} \mid k \to i] \cdot \Pr(k \to i) \\
&= \sum_{i=1}^{k-1} \mathrm{E}[2^{1+X_i}] \cdot \frac{1}{k-1} = \sum_{i=1}^{k-1} \mathrm{E}[2 \cdot 2^{X_i}] \cdot \frac{1}{k-1} \\
&= \sum_{i=1}^{k-1} 2\ \mathrm{E}[2^{X_i}] \cdot \frac{1}{k-1} = \frac{2}{k-1} \sum_{i=1}^{k-1} \mathrm{E}[2^{X_i}]
\end{aligned}$$

- この再帰式を解きたい

定理 13.2 の証明 (2)

- 両辺を $k-1$ 倍すると，$k \geq 1$ のとき

$$(k-1)\mathrm{E}[2^{X_k}] = 2\sum_{i=1}^{k-1} \mathrm{E}[2^{X_i}]$$

- よって，$k \geq 2$ のとき

$$(k-2)\mathrm{E}[2^{X_{k-1}}] = 2\sum_{i=1}^{k-2} \mathrm{E}[2^{X_i}]$$

- 上の式から下の式を引くと，$k \geq 2$ のとき

$$\begin{aligned}(k-1)\mathrm{E}[2^{X_k}] - (k-2)\mathrm{E}[2^{X_{k-1}}] &= 2\mathrm{E}[2^{X_{k-1}}] \\ \mathrm{E}[2^{X_k}] &= \frac{k}{k-1}\mathrm{E}[2^{X_{k-1}}]\end{aligned}$$

定理 13.2 の証明 (3)

- したがって，$k \geq 2$ のとき，

$$\mathrm{E}[2^{X_k}] = \frac{k}{k-1}\mathrm{E}[2^{X_{k-1}}]$$

$\square$

定理 13.2 の証明 (3)

- したがって，$k \geq 2$ のとき，

$$
\begin{aligned}
\mathrm{E}[2^{X_k}] &= \frac{k}{k-1}\mathrm{E}[2^{X_{k-1}}] \\
&= \frac{k}{k-1}\cdot\frac{k-1}{k-2}\mathrm{E}[2^{X_{k-2}}]
\end{aligned}
$$

$\square$

定理 13.2 の証明 (3)

- したがって，$k \geq 2$ のとき，

$$
\begin{aligned}
\mathrm{E}[2^{X_k}] &= \frac{k}{k-1}\mathrm{E}[2^{X_{k-1}}] \\
&= \frac{k}{k-1} \cdot \frac{k-1}{k-2}\mathrm{E}[2^{X_{k-2}}] \\
&= \cdots \\
&= \frac{k}{k-1} \cdot \frac{k-1}{k-2} \cdot \cdots \cdot \frac{2}{1}\mathrm{E}[2^{X_1}]
\end{aligned}
$$

$\square$

定理 13.2 の証明 (3)

- したがって，$k \geq 2$ のとき，

$$
\begin{aligned}
\mathrm{E}[2^{X_k}] &= \frac{k}{k-1}\mathrm{E}[2^{X_{k-1}}] \\
&= \frac{k}{k-1} \cdot \frac{k-1}{k-2}\mathrm{E}[2^{X_{k-2}}] \\
&= \cdots \\
&= \frac{k}{k-1} \cdot \frac{k-1}{k-2} \cdot \cdots \cdot \frac{2}{1}\mathrm{E}[2^{X_1}] \\
&= k
\end{aligned}
$$

□

例題：まとめ

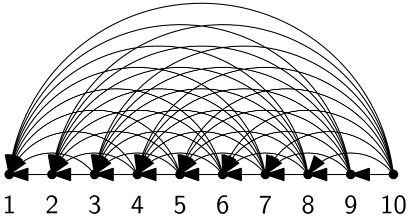
即時移動 (乱数を使わないアルゴリズム)

- 最悪反復回数 $= n - 1$

一様ランダム移動 (乱数を使うアルゴリズム)

- 最悪期待反復回数 $= H_{n-1}$ $(= \ln n + O(1))$
- 高確率で，最悪反復回数 $= O(\log n)$

$\therefore$ 乱数を使うことで，問題を高速に解けた



目次

今日のまとめ

今日のまとめ

乱数を使った移動戦略

- 一様ランダム移動戦略

最悪期待反復回数の解析

- 方程式の立て方，解き方

最悪期待反復回数から高確率最悪反復回数へ

- Markov の不等式の使い方，確率変数の指数関数

期末試験

- 日時：2 月 14 日 (金) 14:40–16:10
- 教室：西 5 号館 214 号室 (いつもの講義の場所)
- 出題形式
  - 演習問題と同じ形式の問題を 6 題出題する
  - その中の 4 題は演習問題として提示されたものと同一である
  - 全問に解答する
- 配点：1 題 20 点満点，計 120 点満点
- 成績において，100 点以上は 100 点で打ち切り
- 時間：90 分
- 持ち込み：A4 用紙 1 枚分 (裏表自筆書き込み) のみ可

注意：2 月 7 日の内容は出題しない

レポート

レポート提出締切は 2 月 7 日の講義 (返却法は web ページで連絡)

目次