離散最適化基礎論 第 12 回
クラス PLS と PLS 完全性

岡本 吉央
okamotoy@uec.ac.jp

電気通信大学

2014 年 1 月 31 日

最終更新：2014 年 1 月 31 日　17:21

目次

局所探索法と局所最適解

局所探索法 (local search)：一般的枠組み

0. 許容解 $x \in S$ を適当に見つける (この x を初期解と呼ぶ)
1. 以下を繰り返し
   1. ある $x' \in N(x)$ が存在して $f(x') < f(x)$ ならば $x \leftarrow x'$
   2. そうでなければ繰り返しを終了
2. x を出力 (この x は N に関する局所最適解 (定理 1.1))

疑問 1
局所最適解を見つけるために，局所探索法を使わなければならないのか？

答え：No

例：整列問題 (第 5 回講義)

整列問題 (降順)

- 許容解は $\{1, 2, \ldots, n\}$ 上の順列
$$S = \{\pi \mid \pi \text{ は } \{1, 2, \ldots, n\} \text{ 上の順列 }\}$$
- 目的関数 f は $f(\pi) = \sum_{i=1}^{n} i \cdot \pi_i$ と定義

局所操作：隣接する 2 要素の入れ替え (隣接互換)

$$\boxed{\pi = (3, 2, 5, 1, 4)} \longrightarrow \boxed{\pi' = (3, 2, 1, 5, 4)}$$
$$f(\pi) = 46 \qquad f(\pi') = 50$$

この局所操作が誘導する近傍関数を N とする

例：整列問題 (第 5 回講義) — 続き

整列問題 (降順)

- 許容解は $\{1, 2, \ldots, n\}$ 上の順列
$$S = \{\pi \mid \pi \text{ は } \{1, 2, \ldots, n\} \text{ 上の順列 }\}$$
- 目的関数 f は $f(\pi) = \sum_{i=1}^{n} i \cdot \pi_i$ と定義

局所操作：隣接する 2 要素の入れ替え (隣接互換)

事実

- 局所最適解は $(n, n-1, \ldots, 2, 1)$ のみ (補題 5.1 と 5.2)
- つまり，局所最適解を見つけることは，整列を行うことと同じ
- しかし，整列問題は局所探索法を用いなくても簡単に解ける
(例えば，計算量 $O(n \log n)$)

局所探索法と局所最適解 (続き)

局所探索法 (local search)：一般的枠組み

0. 許容解 $x \in S$ を適当に見つける (この x を初期解と呼ぶ)
1. 以下を繰り返し
   1. ある $x' \in N(x)$ が存在して $f(x') < f(x)$ ならば $x \leftarrow x'$
   2. そうでなければ繰り返しを終了
2. x を出力 (この x は N に関する局所最適解 (定理 1.1))

疑問 2
局所探索法を使わなくても，局所最適解の発見が難しいことはあるのか？

問題点：「すべてのアルゴリズム」を考えるのは難しい…

巡回セールスマン問題は難しいのか？

巡回セールスマン問題の最適解を見つけるのは難しい？

- 事実：巡回セールスマン問題の最適解を多項式時間で見つける
アルゴリズムは知られていない
- 疑問：巡回セールスマン問題の最適解を多項式時間で見つける
アルゴリズムが存在しないことを証明するには
どうしたらよいか？

巡回セールスマン問題の局所最適解を見つけるは難しい？

- 事実：巡回セールスマン問題の局所最適解を多項式時間で見つける
アルゴリズムは知られていない
- 疑問：巡回セールスマン問題の局所最適解を多項式時間で見つける
アルゴリズムが存在しないことを証明するには
どうしたらよいか？

事実：これらの問いに答えられるほど，現在の数学は発達していない
$\leadsto$ 計算量理論によるアプローチを使って考える

考える問題の種類

巡回セールスマン問題に関連して考える問題

最適化問題 (optimization problem)

- 入力：n 個の都市，対称行列 $C \in \mathbb{R}^{n \times n}$
- 出力：最適解 1 つ (長さが最小の巡回路)

局所最適化問題 (local optimization problem)

- 入力：n 個の都市，対称行列 $C \in \mathbb{R}^{n \times n}$，近傍関数 N
- 出力：N に関する局所最適解 1 つ

これを抽象的に扱っていく

考える問題の抽象化：最適化問題

最適化問題 $\Pi = \{\langle S, f\rangle\}$
- 入力：許容集合 S，目的関数 $f\colon S \to \mathbb{R}$
- 出力：最適解 1 つ

形式上，最適解問題とは考える入力全体の集合

注意
S や f は明示的に与えられないかもしれない

巡回セールスマン問題の場合
- $S =$ 可能な巡回路全体の集合
- $f =$ 巡回路の長さを与える関数

しかし，S と f が与えられるわけではなく，n と C が与えられる
(n と C によって，S と f を「コンパクト」に表現している)

考える問題の抽象化：局所最適化問題

局所最適化問題 $\Pi_{\rm loc} = \{\langle S, f, N\rangle\}$
- 入力：許容集合 S，目的関数 $f\colon S \to \mathbb{R}$，近傍関数 $N\colon S \to 2^S$
- 出力：N に関する局所最適解 1 つ

形式上，局所最適化問題とは考える入力全体の集合

注意
S, f, N は明示的に与えられないかもしれない

2opt 近傍の場合
- N という関数を明示的に入力すると，n^3 に比例する領域が最低必要

しかし，N という関数を明示的に入力するわけではない

最適化問題から得られる局所最適化問題

最適化問題から局所最適化問題を作る方法
最適化問題 $\Pi = \{\langle S, f\rangle\}$ に対して，近傍関数 N の決め方を固定して，

$$\Pi_{\rm loc} = \{\langle S, f, N\rangle \mid \langle S, f\rangle \in \Pi\}$$

とすると，Π と N の決め方から局所最適化問題が 1 つ得られる

この $\Pi_{\rm loc}$ を Π から得られる局所最適化問題と呼ぶ

最適化問題と局所最適化問題

命題 12.1
最適化問題 Π が多項式時間で解ける $\Rightarrow$ 近傍関数 N の決め方が何であっても，局所最適化問題 $\Pi_{\rm loc}$ は多項式時間で解ける

<u>証明</u>：
- 最適解は局所最適解であるから，
  $\Pi_{\rm loc}$ を解くためには最適解を見つければ十分である
- つまり，Π を解けばよい
- 仮定より，それは多項式時間で解ける
- つまり，局所最適解も多項式時間で 1 つ見つかる □

最適化問題と局所最適化問題 (続)

逆も正しい (演習問題)，つまり

命題 12.2
最適化問題 Π が多項式時間で解けない $\Rightarrow$ ある近傍関数 N の決め方に対して，$\Pi_{\rm loc}$ は多項式時間で解けない

命題 12.2 の帰結
多項式時間で解けない最適化問題があれば，
そこから，多項式時間で解けない局所最適化問題の存在が分かる

問題点
多項式時間で解けない (自然な) 最適化問題を人類は今のところ知らない

今日の内容

現状
- 多項式時間で解けない (自然な) 最適化問題を人類は知らない
- 多項式時間で解けない (自然な) 局所最適化問題も知らない

今日の内容
この問題に迫るための計算量理論的アプローチ

特に，クラス PLS の導入

目次

局所最適化問題に対する計算量理論：クラス PLS

クラス PLS (Polynomial-time Local Search の略)
局所最適化問題 $\Pi_{\rm loc} = \{\langle S, f, N\rangle\}$ がクラス PLS に属するとは，
次のようなアルゴリズム A, B, C が存在すること

アルゴリズム A
許容解 1 つを多項式時間で見つけるアルゴリズム

頭の中で思い浮かべるのは，巡回セールスマン問題と 2opt 近傍
巡回セールスマン問題の許容解は巡回路であり，
それは簡単に (多項式時間で) 見つけられる

多項式時間 = 入力のビット長に関する多項式

局所最適化問題に対する計算量理論：クラス PLS (続 1)

クラス PLS (Polynomial-time Local Search の略)

局所最適化問題 $\Pi_{\text{loc}} = \{\langle S, f, N \rangle\}$ がクラス PLS に属するとは，次のようなアルゴリズム A, B, C が存在すること

アルゴリズム B

与えられた許容解の目的関数値を多項式時間で計算するアルゴリズム

頭の中で思い浮かべるのは，巡回セールスマン問題と 2opt 近傍

巡回路が 1 つ与えられれば，その長さは簡単に (多項式時間で) 分かる

多項式時間 ＝ 入力のビット長に関する多項式

局所最適化問題に対する計算量理論：クラス PLS (続 2)

クラス PLS (Polynomial-time Local Search の略)

局所最適化問題 $\Pi_{\text{loc}} = \{\langle S, f, N \rangle\}$ がクラス PLS に属するとは，次のようなアルゴリズム A, B, C が存在すること

アルゴリズム C

N に関する近傍探索を多項式時間で行うアルゴリズム

頭の中で思い浮かべるのは，巡回セールスマン問題と 2opt 近傍

任意の巡回路の 2opt 近傍の探索は $O(n^2)$ でできる
(これは $O(n \log n)$ に改善できる) (第 8 回講義参照)

多項式時間 ＝ 入力のビット長に関する多項式

局所探索法を評価する観点：計算量の評価 (再掲)

局所探索法 (local search)：一般的枠組み

0. 許容解 $x \in S$ を適当に見つける (この x を初期解と呼ぶ) ← Algo A
1. 以下を繰り返し
   1. ある $x' \in N(x)$ が存在して $f(x') < f(x)$ ならば ← Algo C
      $x \leftarrow x'$
   2. そうでなければ繰り返しを終了
2. x を出力 (この x は N に関する局所最適解 (定理 1.1))

局所探索法の中にアルゴリズム A と C は自然に使われる

局所探索法を評価する観点：計算量の評価 (再掲)

局所探索法 (local search)：一般的枠組み

0. 許容解 $x \in S$ を適当に見つける (この x を初期解と呼ぶ) ←時間 T_A
1. 以下を繰り返し ←反復回数 k
   1. ある $x' \in N(x)$ が存在して $f(x') < f(x)$ ならば ←時間 T_C
      $x \leftarrow x'$
   2. そうでなければ繰り返しを終了
2. x を出力 (この x は N に関する局所最適解 (定理 1.1))

全体の計算時間

およそ $T_A + k \cdot T_C$

よって，クラス PLS に属する問題のときは

T_A と T_C は多項式なので，k が多項式なら，全体の計算時間も多項式

k が多項式で抑えられない局所最適化問題が困りもの

クラス PLS に属する問題

- 巡回セールスマン問題と 2opt 近傍
- 巡回セールスマン問題と頂点挿入近傍
- 巡回セールスマン問題と割当近傍
- 巡回セールスマン問題とピラミッド型巡回路近傍
- 最終完了時刻最小化スケジューリング問題と移動近傍
- グラフ等分割問題と交換近傍
- 整列問題と交換近傍
- 最小全域木問題と交換近傍
- ……

他にも多くの問題

疑問

この中で，どの問題が簡単で，どの問題が難しいのか？

難しさの仕分け $\rightsquigarrow$ 帰着

PLS 帰着

2 つの局所最適化問題 $\Pi_{\text{loc}} = \{\langle S, f, N \rangle\}$, $\Pi'_{\text{loc}} = \{\langle S', f', N' \rangle\}$

PLS 帰着とは (Johnson, Papadimitriou, Yannakakis '88)

Π_{loc} から Π'_{loc} への PLS 帰着とは
2 つのアルゴリズム F, G の対で次を満たすもののこと

1. 任意の $I \in \Pi_{\text{loc}}$ に対して，$F(I) \in \Pi'_{\text{loc}}$
2. $F(\langle S, f, N \rangle) = \langle S', f', N' \rangle$ としたとき，
   任意の $x' \in S'$ に対して，$G(x', \langle S, f, N \rangle) \in S$
3. 任意の $I \in \Pi_{\text{loc}}$ に対して，
   x' が $F(I)$ の局所最適解である $\Rightarrow$ $G(x', I)$ は I の局所最適解

PLS 帰着：詳細に (1)

2 つの局所最適化問題 $\Pi_{\text{loc}} = \{\langle S, f, N \rangle\}$, $\Pi'_{\text{loc}} = \{\langle S', f', N' \rangle\}$

PLS 帰着とは (Johnson, Papadimitriou, Yannakakis '88)

Π_{loc} から Π'_{loc} への PLS 帰着とは
2 つの多項式時間アルゴリズム F, G の対で次を満たすもののこと

1. 任意の $I \in \Pi_{\text{loc}}$ に対して，$F(I) \in \Pi'_{\text{loc}}$

F は入力から入力を作る

PLS 帰着：詳細に (2)

2 つの局所最適化問題 $\Pi_{\text{loc}} = \{\langle S, f, N \rangle\}$, $\Pi'_{\text{loc}} = \{\langle S', f', N' \rangle\}$

PLS 帰着とは (Johnson, Papadimitriou, Yannakakis '88)

Π_{loc} から Π'_{loc} への PLS 帰着とは
2 つの多項式時間アルゴリズム F, G の対で次を満たすもののこと

2. $F(\langle S, f, N \rangle) = \langle S', f', N' \rangle$ としたとき，
   任意の $x' \in S'$ に対して，$G(x', \langle S, f, N \rangle) \in S$

G は許容解から許容解を逆向きに作る

PLS 帰着：詳細に (3)

2 つの局所最適化問題 $\Pi_{\mathrm{loc}} = \{\langle S, f, N\rangle\}$, $\Pi'_{\mathrm{loc}} = \{\langle S', f', N'\rangle\}$

PLS 帰着とは (Johnson, Papadimitriou, Yannakakis '88)

Π_{loc} から Π'_{loc} への PLS 帰着とは
2 つの多項式時間アルゴリズム F, G の対で次を満たすもののこと

3. 任意の $I \in \Pi_{\mathrm{loc}}$ に対して，
x' が $F(I)$ の局所最適解である $\Rightarrow$ $G(x', I)$ は I の局所最適解

G は局所最適解から局所最適解を逆向きに作る

PLS 帰着の性質

2 つの局所最適化問題 $\Pi_{\mathrm{loc}} = \{\langle S, f, N\rangle\}$, $\Pi'_{\mathrm{loc}} = \{\langle S', f', N'\rangle\}$

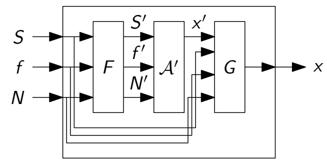
定理 12.3 (Johnson, Papadimitriou, Yannakakis '88)

Π_{loc} から Π'_{loc} への PLS 帰着が存在，かつ，Π'_{loc} が多項式時間で解ける
$\Rightarrow$ Π_{loc} も多項式時間で解ける

証明：PLS 帰着の定義にあるようなアルゴリズム F, G が存在すると仮定

目標

$\langle S, f, N\rangle \in \Pi_{\mathrm{loc}}$ に対する解 x を見つける多項式時間アルゴリズムの設計



PLS 帰着の性質：証明 (続 1)

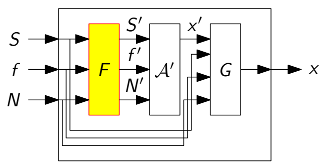
2 つの局所最適化問題 $\Pi_{\mathrm{loc}} = \{\langle S, f, N\rangle\}$, $\Pi'_{\mathrm{loc}} = \{\langle S', f', N'\rangle\}$

定理 12.3 (Johnson, Papadimitriou, Yannakakis '88)

Π_{loc} から Π'_{loc} への PLS 帰着が存在，かつ，Π'_{loc} が多項式時間で解ける
$\Rightarrow$ Π_{loc} も多項式時間で解ける

証明：PLS 帰着の定義にあるようなアルゴリズム F, G が存在すると仮定

- Π_{loc} の入力 $\langle S, f, N\rangle$ を F によって，
Π'_{loc} の入力 $\langle S', f', N'\rangle$ に多項式時間で変換



PLS 帰着の性質：証明 (続 2)

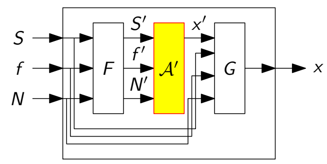
2 つの局所最適化問題 $\Pi_{\mathrm{loc}} = \{\langle S, f, N\rangle\}$, $\Pi'_{\mathrm{loc}} = \{\langle S', f', N'\rangle\}$

定理 12.3 (Johnson, Papadimitriou, Yannakakis '88)

Π_{loc} から Π'_{loc} への PLS 帰着が存在，かつ，Π'_{loc} が多項式時間で解ける
$\Rightarrow$ Π_{loc} も多項式時間で解ける

証明：PLS 帰着の定義にあるようなアルゴリズム F, G が存在すると仮定

- 仮定より，$\langle S', f', N'\rangle$ の局所最適解 x' は
多項式時間で見つかる



PLS 帰着の性質：証明 (続 3)

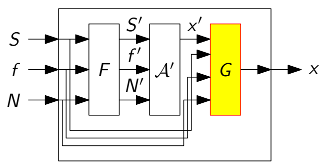
2 つの局所最適化問題 $\Pi_{\mathrm{loc}} = \{\langle S, f, N\rangle\}$, $\Pi'_{\mathrm{loc}} = \{\langle S', f', N'\rangle\}$

定理 12.3 (Johnson, Papadimitriou, Yannakakis '88)

Π_{loc} から Π'_{loc} への PLS 帰着が存在，かつ，Π'_{loc} が多項式時間で解ける
$\Rightarrow$ Π_{loc} も多項式時間で解ける

証明：PLS 帰着の定義にあるようなアルゴリズム F, G が存在すると仮定

- 多項式時間で $\langle S, f, N\rangle$ の局所最適解 $G(x', \langle S, f, N\rangle)$ が得られ，
それを x とすればよい $\square$



PLS 帰着の性質 (続き)

2 つの局所最適化問題 $\Pi_{\mathrm{loc}} = \{\langle S, f, N\rangle\}$, $\Pi'_{\mathrm{loc}} = \{\langle S', f', N'\rangle\}$

定理 12.3 (Johnson, Papadimitriou, Yannakakis '88)

Π_{loc} から Π'_{loc} への PLS 帰着が存在，かつ，Π'_{loc} が多項式時間で解ける
$\Rightarrow$ Π_{loc} も多項式時間で解ける

定理 12.3 の意味：Π_{loc} と Π'_{loc} の難しさの比較

Π_{loc} の難しさは Π'_{loc} の難しさ以下

$\rightsquigarrow$ 難しさの仕分けができる

PLS 完全問題

PLS 完全問題とは？

局所最適化問題 $\Pi_{\mathrm{loc}} = \{\langle S, f, N\rangle\}$ が PLS 完全であるとは，
次の 2 つを満たすこと

- Π_{loc} が PLS に属する
- PLS に属する任意の局所最適化問題 Π'_{loc} から Π_{loc} への PLS 帰着が存在する

つまり，PLS 完全問題は PLS に属する問題の中で一番難しい問題

定理 12.3 の系 (演習問題)

ある PLS 完全問題が多項式時間で解ける $\Rightarrow$
PLS に属する任意の局所最適化問題が多項式時間で解ける

目次

今日のまとめ

今日のまとめ

局所最適化問題に対する計算量理論

- クラス PLS
- PLS 帰着
- PLS 完全問題

補足：疑問 1

疑問 1

PLS 完全問題は存在するのか？

回答：多くの問題が PLS 完全であることが知られている

- 巡回セールスマン問題の $k$opt 近傍 (k が十分大きいとき) (Krentel '89)
- 重み付きグラフ等分割問題の交換近傍 (Schäffer, Yannakakis '91)
- …

未解決問題

巡回セールスマン問題の 2opt 近傍に関する局所最適化問題は PLS 完全か？

補足：疑問 2

疑問 2

PLS 完全問題は本当に難しいのか？

回答：2 つのシナリオ

シナリオ 1：PLS 完全問題が難しい場合

- 事実：PLS 完全問題が NP 困難 $\Rightarrow$ NP = coNP (Johnson, Papadimitriou, Yannakakis '88)
- 解釈：PLS 完全問題が本当に難しいならば，P = NP に近いことが起こる
- P $\neq$ NP であると多くの人が思ってるので，こうであるとしたら驚き

補足：疑問 2 (続き)

疑問 2

PLS 完全問題は本当に難しいのか？

回答：2 つのシナリオ

シナリオ 2：PLS 完全問題が簡単な場合

- PLS に属するすべての問題が多項式時間で解けることになる
- しかし，それは局所探索法に基づかない方法である
  - $\because$ PLS に属する問題で局所探索法の反復回数が多項式で収まらないものが存在する
- そのような方法があるとしたら驚き

つまり，どちらのシナリオが正しいとしても，驚きが待っている

別の見方

PLS 完全問題は多項式時間でも解けないし，NP 困難でもない，ということ？