離散最適化基礎論 第 7 回
性能保証 (3)：巡回セールスマン問題と近似比

岡本 吉央
okamotoy@uec.ac.jp

電気通信大学

2013 年 12 月 6 日

最終更新：2013 年 12 月 11 日　15:58

目次

離散最適化問題とは ?: 一般論

離散最適化問題 (discrete optimization problem) とは？

離散最適化問題は以下に挙げる S, f を使って表される最適化問題

$$\begin{array}{ll} \text{最小化} & f(x) \\ \text{条　件} & x \in S \end{array}$$

のことで，ただし，
- S は 有限 集合
- $f\colon S \to \mathbb{R}$ は関数

である

離散最適化問題とは ?: 一般論 続き

離散最適化問題 (discrete optimization problem) とは？

離散最適化問題は以下に挙げる S, f を使って表される最適化問題

$$\begin{array}{ll} \text{最小化} & f(x) \\ \text{条　件} & x \in S \end{array}$$

のことで，ただし，...

用語
- S：**許容集合** (feasible set)
  - 「入力」と「何が許容解であるかという条件」によって定まる
- S の各要素：**許容解** (feasible solution)
- f：**目的関数** (objective function)
  - 「目的」によって定まる

最適解

最適解 (optimal solution) とは？

離散最適化問題

$$\begin{array}{ll} \text{最小化} & f(x) \\ \text{条　件} & x \in S \end{array}$$

の**最適解**とは 許容解 $x \in S$ で，次を満たすもののこと

任意の許容解 $x' \in S$ に対して，$f(x) \leq f(x')$

注意
- 最適解は複数存在するかもしれない
- $S \neq \emptyset$ ならば，最適解は必ず存在する
  (「連続最適化」では，これが成り立つとは限らない)

最適値

最適値 (optimal value) とは？

離散最適化問題

$$\begin{array}{ll} \text{最小化} & f(x) \\ \text{条　件} & x \in S \end{array}$$

の**最適値**とは，最適解の目的関数値のこと

「最適解」と「最適値」は異なる概念であり，明確に使い分ける

事実

$x_1, x_2 \in S$ が最適解 $\Rightarrow f(x_1) = f(x_2)$

最適解の目的関数値は常に等しい (最適値はただ 1 つしか存在しない)

近傍関数と近傍

近傍関数 (neighborhood function) とは？

離散最適化問題

$$\begin{array}{ll} \text{最小化} & f(x) \\ \text{条　件} & x \in S \end{array}$$

に対する**近傍関数**とは，関数 $N\colon S \to 2^S$ で，
任意の $x \in S$ に対して $x \in N(x)$ を満たすもののこと

復習：2^S は S の部分集合を全部集めた集合 (S の冪集合 (べき集合))

近傍 (neighborhood) とは？

N に関する許容解 $x \in S$ の**近傍**とは $N(x)$ のこと

局所最適解

局所最適解 (local optimal solution) とは？

離散最適化問題

$$\begin{array}{ll} \text{最小化} & f(x) \\ \text{条　件} & x \in S \end{array}$$

とそれに対する近傍関数 $N\colon S \to 2^S$ を考えたとき，
$x \in S$ が N に関する**局所最適解**であるとは，次を満たすこと

任意の $x' \in N(x)$ に対して，$f(x) \leq f(x')$

局所最適解と対比させて，最適解のことを大域最適解と言うことがある

注意

N に関する局所最適解がただ 1 つしか存在しない $\Rightarrow$ それは最適解

局所探索法を評価する観点

局所探索法 (local search)：一般的枠組み

0. 許容解 $x \in S$ を適当に見つける (この x を**初期解**と呼ぶ)
1. 以下を繰り返し
   1. ある $x' \in N(x)$ が存在して $f(x') < f(x)$ ならば $x \leftarrow x'$
   2. そうでなければ繰り返しを終了
2. x を出力 (この x は N に関する局所最適解 (定理 1.1))

局所探索法を評価する観点

- **性能保証** (performance guarantee)
  局所最適解が最適解に (目的関数値で) どれだけ近いか？
- **計算量** (computational complexity)
  局所探索法がどれだけ速く局所最適解に収束するか？

局所探索法を評価する観点：性能保証

局所探索法 (local search)：一般的枠組み

0. 許容解 $x \in S$ を適当に見つける (この x を**初期解**と呼ぶ)
1. 以下を繰り返し
   1. ある $x' \in N(x)$ が存在して $f(x') < f(x)$ ならば $x \leftarrow x'$
   2. そうでなければ繰り返しを終了
2. x を出力 (この x は N に関する局所最適解 (定理 1.1))

最悪の場合の近似の度合いで，性能保証を評価する

$$\textbf{近似比} = \frac{\max_{x:\text{局所最適解}} f(x)}{f(\text{最適解})}$$

- 近似比 ≥ 1
- 近似比が小さいほどよい

今日の目標

今日の目標

巡回セールスマン問題の 2opt 近傍に関する近似比を詳細に調べる

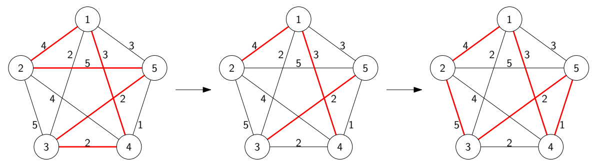
- 三角不等式を満たす場合の上界：$4\sqrt{n}$

巡回セールスマン問題に対する 2opt 操作

巡回セールスマン問題に対する 2opt 操作

τ：現在保持している巡回路

1. τ が使っている辺を 2 つ取り除く
2. τ が使っていなかった辺を 2 つ追加して，新たな巡回路を得る



2opt 操作が誘導する近傍を 2opt 近傍と呼ぶ

巡回セールスマン問題：前回の復習

定理 6.2 (Papadimitriou, Steiglitz '78)

任意の定数 $\alpha \geq 1$ に対して，
巡回セールスマン問題に対するある入力が存在して，
2opt 近傍に関する局所探索法の近似比が α より大きい

演習問題 6.6 (Papadimitriou, Steiglitz '78)

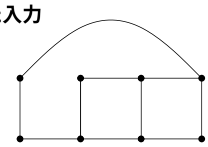
任意の偶数 $n \geq 8$ に対して，
巡回セールスマン問題に対する都市数 n のある入力が存在して，
2opt 近傍に関する局所探索法の近似比が n より大きい

つまり，都市数 n が大きくなると，近似比もそれに比例して大きくなる

- 実は近似比が n^{100} や 100^{100^n} よりも大きくなる例も作れる

巡回セールスマン問題と三角不等式

定理 6.2 の証明で考えた入力



- これは都市数 8 の入力を無向グラフで表現したもの
- 描いてある辺の費用は ϵ ($\epsilon > 0$ は非常に小さな正実数)
- 描いてない辺の費用は $1 + \epsilon$

これは三角不等式を満たしていない！

距離が三角不等式を満たすとは？

対称正方行列 D が三角不等式を満たすとは，

$$d(i,j) \leq d(i,k) + d(k,j)$$

が任意の添え字 i, j, k に対して成り立つこと

三角不等式を満たす場合における最適値の単調性

X：都市の集合，$Y \subseteq X$

補題 7.1

X 上の距離が三角不等式を満たすとき

$$Y \text{ 上の最短巡回路の長さ} \leq X \text{ 上の最短巡回路の長さ}$$

証明：次を証明すれば十分 □

演習問題

X 上の距離が三角不等式を満たすとき

$$X - \{x\} \text{ 上の最短巡回路の長さ} \leq X \text{ 上の最短巡回路の長さ}$$

がすべての $x \in X$ に対して成り立つ

目次

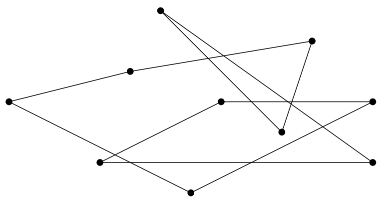
近似比の上界：三角不等式を満たす場合

今日の目標は次の定理を証明すること

定理 7.2 (Chandra, Karloff, Tovey '99)

巡回セールスマン問題において，
距離が三角不等式を満たす任意の入力に対して，
2opt **近傍に関する局所探索法の近似比は** $4\sqrt{n}$ **以下**
ただし， n **は都市数**

証明の着想：長い辺の数は少ない



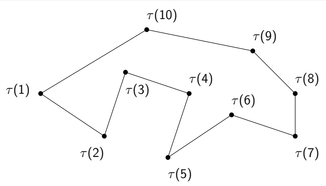
証明の着想：補題

記法

- opt **：最適値**
- $\tau = (\tau(1), \tau(2), \ldots, \tau(n))$ **：局所最適解**
- $E_i = \left\{ (\tau(j), \tau(j+1)) \mid d(\tau(j), \tau(j+1)) > \frac{2 \cdot \mathrm{opt}}{\sqrt{i}} \right\}$
  - **注意：** $E_1 \subseteq E_2 \subseteq \cdots \subseteq E_n$

補題 7.3

任意の $i \in \{1, \ldots, n\}$ **に対して，** $|E_i| \leq i - 1$



補題 7.3 が正しいと仮定して，定理 7.2 を証明する (1)

補題 7.3 **より，**

- $|E_1| \leq 0$ (**つまり，** $E_1 = \emptyset$)
- **したがって，** τ **において最も長い辺の長さ** $\leq 2 \cdot \mathrm{opt}$
- $|E_2| \leq 1$
- **したがって，** τ **において** 2 **番目に長い辺の長さ** $\leq \frac{2 \cdot \mathrm{opt}}{\sqrt{2}}$
- ……
- $|E_i| \leq i - 1$
- **したがって，** τ **において** i **番目に長い辺の長さ** $\leq \frac{2 \cdot \mathrm{opt}}{\sqrt{i}}$

つまり

$$\tau \text{ の長さ} = \sum_{i=1}^{n} (\tau \text{ において } i \text{ 番目に長い辺の長さ}) \leq \sum_{i=1}^{n} \frac{2 \cdot \mathrm{opt}}{\sqrt{i}}$$

補題 7.3 が正しいと仮定して，定理 7.2 を証明する (2)

つまり

$$\tau \text{ の長さ} \leq \sum_{i=1}^{n} \frac{2 \cdot \mathrm{opt}}{\sqrt{i}} = 2 \cdot \mathrm{opt} \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{i}}$$

ここで，

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{i}} \leq \int_0^n \frac{1}{\sqrt{x}} dx = \left[2\sqrt{x} \right]_0^n = 2\sqrt{n}$$

なので，

$$\tau \text{ の長さ} \leq 4\sqrt{n} \cdot \mathrm{opt}$$

つまり，近似比は $4\sqrt{n}$ **以下** □

残されたこと

補題 7.3 **の証明**

補題 7.3 の証明 (1)

記法

- opt **：最適値**
- $\tau = (\tau(1), \tau(2), \ldots, \tau(n))$ **：局所最適解**
- $E_i = \left\{ (\tau(j), \tau(j+1)) \mid d(\tau(j), \tau(j+1)) > \frac{2 \cdot \mathrm{opt}}{\sqrt{i}} \right\}$
  - **注意：** $E_1 \subseteq E_2 \subseteq \cdots \subseteq E_n$

補題 7.3

任意の $i \in \{1, \ldots, n\}$ **に対して，** $|E_i| \leq i - 1$

背理法で証明：ある i **に対して，** $|E_i| \geq i$ **であると仮定して矛盾を導く**

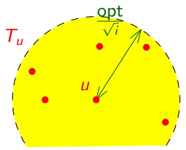
補題 7.3 の証明 (2)

巡回路 τ **の辺には自然に向きがついているとみなす**

- **記法：弧** a **の始点** $t(a)$**，終点** $h(a)$

E_i **の任意の弧** a **の始点** $u = t(a)$ **を見てみる**

- **記法：** $T_u = \left\{ t(a') \mid a' \in E_i, d(u, t(a')) \leq \frac{\mathrm{opt}}{\sqrt{i}} \right\}$



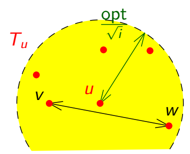
補題 7.3 の証明 (3)：T_u の性質 (1)

$v, w \in T_u$ **を任意に選ぶ** ($v \neq w$)

- $d(v, w) \leq d(v, u) + d(u, w) \leq \frac{\mathrm{opt}}{\sqrt{i}} + \frac{\mathrm{opt}}{\sqrt{i}} = \frac{2 \cdot \mathrm{opt}}{\sqrt{i}}$

  ↑三角不等式

すなわち， T_u **の任意の** 2 **都市間の距離は** $\frac{2 \cdot \mathrm{opt}}{\sqrt{i}}$ **以下**



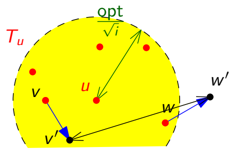
補題 7.3 の証明 (4)：T_u の性質 (2)

$v, w \in T_u$ を任意に選ぶ ($v \neq w$)
- v'：v を始点とする E_i の弧の終点
- w'：w を始点とする E_i の弧の終点

このとき，τ が 2opt 近傍に関する局所最適解であることから，

$$d(v', w') \geq \frac{2 \cdot \mathrm{opt}}{\sqrt{i}}$$

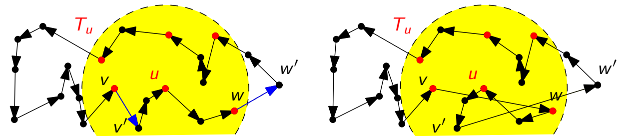
これの説明を次でもう少し詳しく



補題 7.3 の証明 (5)：T_u の性質 (3)

なぜそうなるのか？
- τ における辺 (v, v') と (w, w') を (v, w) と (v', w') に替えた巡回路 τ' を考える
- τ' の長さ $= \tau$ の長さ $- d(v, v') - d(w, w') + d(v, w) + d(v', w')$
- τ' は τ に 2opt 操作を施すことで得られるので，

$$\tau \text{ の長さ} \leq \tau' \text{ の長さ}$$



補題 7.3 の証明 (6)：T_u の性質 (4)

なぜそうなるのか？(続き)
- したがって，

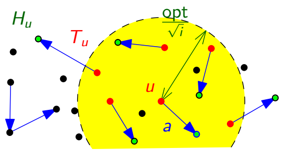
$$\begin{aligned}
\tau \text{ の長さ} &\leq \tau' \text{ の長さ} \\
&= \tau \text{ の長さ} - d(v, v') - d(w, w') + d(v, w) + d(v', w') \\
\therefore d(v', w') &\geq d(v, v') + d(w, w') - d(v, w) \\
&\geq \frac{2 \cdot \mathrm{opt}}{\sqrt{i}} + \frac{2 \cdot \mathrm{opt}}{\sqrt{i}} - \frac{2 \cdot \mathrm{opt}}{\sqrt{i}} \\
&= \frac{2 \cdot \mathrm{opt}}{\sqrt{i}}
\end{aligned}$$

注：$(v, v'), (w, w') \in E_i$，かつ，$v, w \in T_u$

補題 7.3 の証明 (7)：T_u の要素数に関する観察

観察 7.4
$|T_u| < \sqrt{i}$

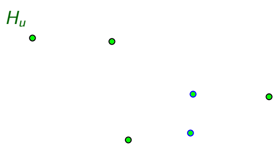
観察 7.4 の証明：背理法で証明
- $|T_u| \geq \sqrt{i}$ であると仮定
- H_u を T_u の都市を始点とする E_i の弧の終点全体の集合とする ($|H_u| = |T_u| \geq \sqrt{i}$)
- いままでの議論から，H_u の任意の 2 都市間の距離 $\geq \frac{2 \cdot \mathrm{opt}}{\sqrt{i}}$



補題 7.3 の証明 (8)：T_u の要素数に関する観察 (続き)

観察 7.4
$|T_u| < \sqrt{i}$

観察 7.4 の証明 (続き)：
- よって，H_u 上の最短巡回路の長さ $\geq 2 \cdot \mathrm{opt}$
- 補題 7.1 から，全体の最短巡回路の長さ $\geq 2 \cdot \mathrm{opt}$
- これは，全体の最短巡回路の長さ $= \mathrm{opt}$ であることに矛盾 □



補題 7.3 の証明 (9)：ここまでのまとめ

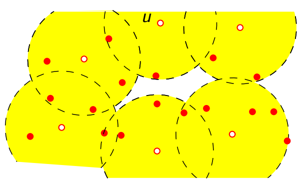
記法
- opt：最適値
- $\tau = (\tau(1), \tau(2), \ldots, \tau(n))$：局所最適解
- $E_i = \left\{ (\tau(j), \tau(j+1)) \mid d(\tau(j), \tau(j+1)) > \frac{2 \cdot \mathrm{opt}}{\sqrt{i}} \right\}$

証明したい補題 7.3
任意の $i \in \{1, \ldots, n\}$ に対して，$|E_i| \leq i - 1$

- 背理法のための仮定：ある i に対して，$|E_i| \geq i$
- 記法：E_i の任意の弧 a の終点 $u = t(a)$ に対して，
  $T_u = \left\{ t(a') \mid a' \in E_i, d(u, t(a')) \leq \frac{\mathrm{opt}}{\sqrt{i}} \right\}$
- 観察 7.4：$|T_u| < \sqrt{i}$

補題 7.3 の証明 (10)：部分集合の構成 (1)

E_i の弧の始点全体の集合 X の部分集合 Y を次のように作る
1. X の任意の都市 u を選んで，Y に入れる
2. u からの距離が $\frac{\mathrm{opt}}{\sqrt{i}}$ 以下である都市をすべて X から除去する
3. これを $X = \emptyset$ となるまで繰り返す



補題 7.3 の証明 (11)：部分集合の構成 (2)

観察 7.5
$|Y| > \sqrt{i}$

観察 7.5 の証明：
- $|Y|$ はこの手続きの反復回数
- 第 2 ステップで除去される都市の数 $\leq |T_u| < \sqrt{i}$ (観察 7.4)
- $\therefore |X| =$ 第 2 ステップで除去される都市の数 $\times$ 反復回数 $< \sqrt{i} \cdot |Y|$
- 一方，$|X| = |E_i| \geq i$
- $\therefore i < \sqrt{i} \cdot |Y|$
- $\therefore |Y| > \sqrt{i}$ □

補題 7.3 の証明 (12)：部分集合の構成 (3)

構成した集合 Y の性質

- Y の任意の 2 都市の間の距離 $> \frac{\text{opt}}{\sqrt{i}}$
- $|Y| > \sqrt{i}$ (観察 7.5)

したがって，

$$Y \text{ 上の最短巡回路の長さ} > \sqrt{i} \cdot \frac{\text{opt}}{\sqrt{i}} = \text{opt}$$

したがって，補題 7.1 より，

$$\text{opt} = \text{全体の最短巡回路の長さ} \geq Y \text{ 上の最短巡回路の長さ} > \text{opt}$$

これは矛盾 □

近似比の上界：三角不等式を満たす場合 (再掲)

今日の目標は次の定理を証明すること

定理 7.2 (Chandra, Karloff, Tovey '99)

巡回セールスマン問題において，
距離が三角不等式を満たす任意の入力に対して，
2opt 近傍に関する局所探索法の近似比は $4\sqrt{n}$ 以下
ただし，n は都市数

補足：その他に知られていること (Chandra, Karloff, Tovey '99)

巡回セールスマン問題の 2opt 近傍において

距離が三角不等式を満たすとき

- 任意の入力に対して，局所探索法の近似比は $4\sqrt{n}$ 以下
- ある入力に対して，局所探索法の近似比は $\frac{1}{4}\sqrt{n}$ 以上

平面上の直線距離の場合

- 任意の入力に対して，局所探索法の近似比は $O(\log n)$
- ある入力に対して，局所探索法の近似比は $\Omega(\frac{\log n}{\log\log n})$

B. Chandra, H. Karloff, and C. Tovey, New results on the old k-opt algorithm for the traveling salesman problem. SIAM J. Comput. **28** (1999) 1998–2029.

目次

局所探索法を評価する観点 (再掲)

局所探索法 (local search)：一般的枠組み

0. 許容解 $x \in S$ を適当に見つける (この x を初期解と呼ぶ)
1. 以下を繰り返し
   1. ある $x' \in N(x)$ が存在して $f(x') < f(x)$ ならば $x \leftarrow x'$
   2. そうでなければ繰り返しを終了
2. x を出力 (この x は N に関する局所最適解 (定理 1.1))

局所探索法の出力は N に関する局所最適解

局所探索法を評価する観点

- **性能保証** (performance guarantee)
  局所最適解が最適解に (目的関数値で) どれだけ近いか？
- **計算量** (computational complexity)
  局所探索法がどれだけ速く局所最適解に収束するか？

局所探索法を評価する観点：計算量

局所探索法 (local search)：一般的枠組み

0. 許容解 $x \in S$ を適当に見つける (この x を初期解と呼ぶ)
1. 以下を繰り返し
   1. ある $x' \in N(x)$ が存在して $f(x') < f(x)$ ならば $x \leftarrow x'$
   2. そうでなければ繰り返しを終了
2. x を出力 (この x は N に関する局所最適解 (定理 1.1))

計算量に影響を与える要因

- 反復回数 (局所操作回数)
- 反復継続条件の確認時間 ($\approx N(x)$ の要素数 (大きさ)，$|N(x)|$)

局所探索法を評価する観点：計算量の評価

局所探索法 (local search)：一般的枠組み

0. 許容解 $x \in S$ を適当に見つける (この x を初期解と呼ぶ) ←時間 T_A
1. 以下を繰り返し ←反復回数 k
   1. ある $x' \in N(x)$ が存在して $f(x') < f(x)$ ならば ←時間 T_C $x \leftarrow x'$
   2. そうでなければ繰り返しを終了
2. x を出力 (この x は N に関する局所最適解 (定理 1.1))

全体の計算時間

およそ $T_A + k \cdot T_C$

よって，局所探索法が多項式時間アルゴリズムになるには，次が必要

- T_A が多項式
- $k \cdot T_C$ が多項式

局所探索法を評価する観点：計算量の評価

局所探索法 (local search)：一般的枠組み

0. 許容解 $x \in S$ を適当に見つける (この x を初期解と呼ぶ) ←時間 T_A
1. 以下を繰り返し ←反復回数 k
   1. ある $x' \in N(x)$ が存在して $f(x') < f(x)$ ならば ←時間 T_C $x \leftarrow x'$
   2. そうでなければ繰り返しを終了
2. x を出力 (この x は N に関する局所最適解 (定理 1.1))

全体の計算時間

およそ $T_A + k \cdot T_C$

よって，局所探索法が最悪の場合指数時間かかるには，次が十分

- T_A が指数関数
- k が指数関数
- T_C が指数関数

局所探索法の計算量評価

局所探索法 (local search)：一般的枠組み

0. 許容解 $x \in S$ を適当に見つける (この x を初期解と呼ぶ) ←時間 T_A
1. 以下を繰り返し ←反復回数 k
   1. ある $x' \in N(x)$ が存在して $f(x') < f(x)$ ならば ←時間 T_C
      $x \leftarrow x'$
   2. そうでなければ繰り返しを終了
2. x を出力 (この x は N に関する局所最適解 (定理 1.1))

ポイント 1

反復回数の評価

ポイント 2

反復継続条件の確認にかかる時間の評価
(近傍探索時間の評価)

今後の予告

目次