離散最適化基礎論 第 4 回
近傍グラフの性質：連結性と直径

岡本 吉央
okamotoy@uec.ac.jp

電気通信大学

2013 年 11 月 1 日

最終更新：2013 年 11 月 3 日　09:32

目次

近傍グラフ：定義

近傍グラフ (neighborhood graph) とは？

離散最適化問題

$$\begin{array}{ll} \text{最小化} & f(x) \\ \text{条　件} & x \in S \end{array}$$

とそれに対する近傍関数 $N\colon S \to 2^S$ を考えたとき，
その近傍グラフとは以下で定義される 有向グラフ

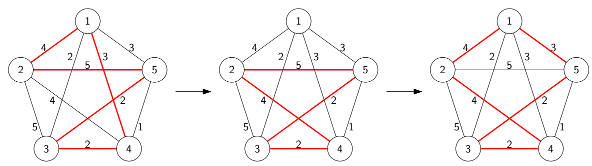
- 頂点集合は S (各許容解が頂点となる)
- 許容解 x から許容解 y へ向かう弧が存在 $\Leftrightarrow y \in N(x)$

巡回セールスマン問題に対する頂点挿入操作

巡回セールスマン問題に対する頂点挿入操作

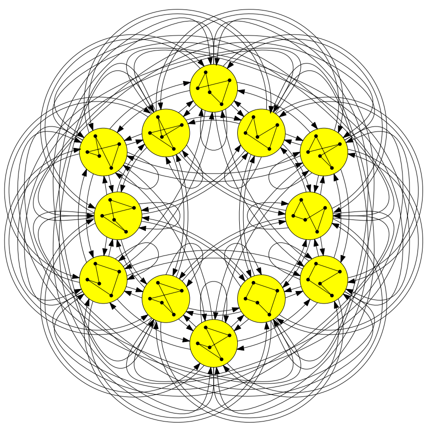
τ：現在保持している巡回路

1. 頂点を 1 つ選び，τ においてその頂点をとばす
2. とばした頂点をどこかに挿入して，新たな巡回路を得る

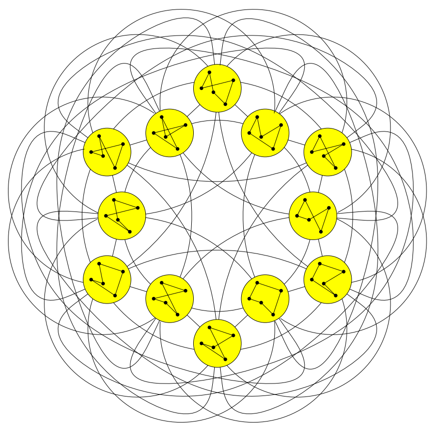


頂点挿入操作が導く近傍を頂点挿入近傍と呼ぶ．

頂点挿入近傍に関する近傍グラフ



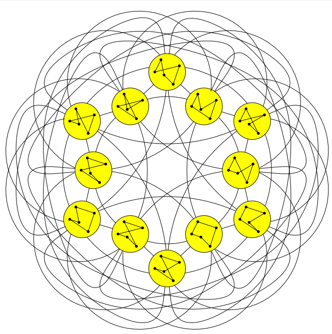
頂点挿入近傍に関する近傍グラフ：対称性を考慮した描画



近傍グラフに関する注意

注意

近傍グラフは目的関数 f に依存しない



遷移グラフ：定義

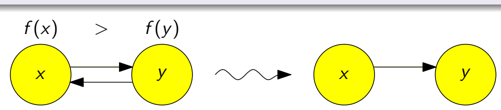
遷移グラフ (transition graph) とは？

離散最適化問題

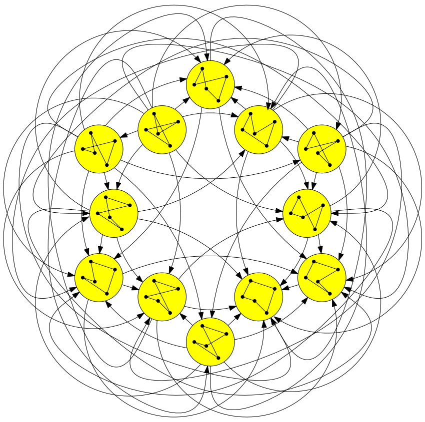
$$\begin{array}{ll} \text{最小化} & f(x) \\ \text{条　件} & x \in S \end{array}$$

とそれに対する近傍関数 $N\colon S \to 2^S$ を考えたとき，
その遷移グラフとは以下で定義される 有向グラフ

- 頂点集合は S (各許容解が頂点となる)
- 許容解 x から許容解 y へ向かう弧が存在
$\Leftrightarrow y \in N(x)$ かつ $f(y) < f(x)$



頂点挿入近傍に関する遷移グラフ



今日の目標

今日の目標

近傍グラフの**直径**を通して，近傍関数のよさを考察する

先回りして述べる結論

近傍グラフの直径が小さい $\approx$ { 任意の目的関数と初期解に対して，うまく局所探索法を動かしたときの局所操作回数が小さい

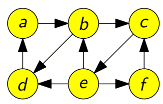
目次

有向グラフの強連結性

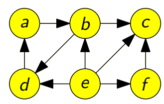
有向グラフ $G = (V, E)$ (V は頂点集合，E は弧集合)

強連結とは？

G が**強連結** (strongly connected) であるとは，
G の任意の 2 頂点 $u, v \in V$ に対して，
u を始点とし，v を終点とする有向道が存在すること

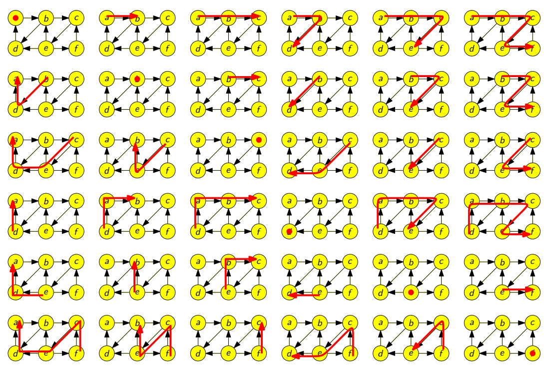


強連結である

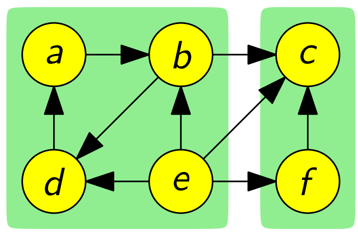


強連結ではない

有向グラフの強連結性 (続 1)



有向グラフの強連結性 (続 2)



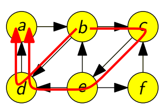
有向グラフにおける距離

有向グラフ $G = (V, E)$ (V は頂点集合，E は弧集合), 2 頂点 $u, v \in V$

有向グラフにおける距離とは？

u から v までの**距離** (distance) とは，
u を始点とし，v を終点とする有向道の辺数の最小値

$d(u, v) = \min\{P$ の辺数 $\mid P$ は u を始点とし v を終点とする有向道 $\}$



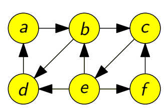
- $d(b, a) = 2$
- $d(a, b) = 1$
- $d(b, f) = 3$
- $d(f, a) = 4$
- ...

注意

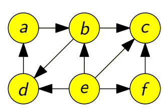
- $d(u, v) = d(v, u)$ であるとは限らない
- u を始点，v を終点とする有向道がない $\Leftrightarrow d(u, v) = \infty$

有向グラフにおける距離：距離行列

距離を行列にして表すことが多い



	a	b	c	d	e	f
a	0	1	2	2	3	4
b	2	0	1	1	2	3
c	3	2	0	2	1	2
d	1	2	3	0	4	5
e	2	1	2	1	0	1
f	4	3	1	3	2	0



	a	b	c	d	e	f
a	0	1	2	2	∞	∞
b	2	0	1	1	∞	∞
c	∞	∞	0	∞	∞	∞
d	1	2	3	0	∞	∞
e	2	1	2	1	0	1
f	∞	∞	1	∞	∞	0

有向グラフの直径

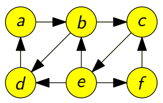
有向グラフ $G = (V, E)$ (V は頂点集合，E は弧集合)

有向グラフの直径とは？

G の直径 (diameter) とは，

$$\max\{d(u,v) \mid u, v \in V\}$$

のこと



直径は 5

事実 (演習問題)

G が強連結 $\Leftrightarrow$ G の直径 $\neq \infty$

今日の目標

今日の目標

近傍グラフの直径を通して，近傍関数のよさを考察する

先回りして述べる結論

近傍グラフの直径が小さい $\approx$ { 任意の目的関数と初期解に対して，うまく局所探索法を動かしたときの局所操作回数が小さい

違う目的関数

巡回セールスマン問題と許容集合は同じ問題 (の例)

- ボトルネック巡回セールスマン問題
  巡回路が通る辺の長さの最大値を最小化
- 最小レイテンシ問題
  各都市までの移動距離の総和の最小化
- $\cdots$

どの問題にも同じ近傍関数 (近傍グラフ) が使える

補足 (再掲)

近傍グラフは目的関数に依存しない

今日の目標

今日の目標

近傍グラフの直径を通して，近傍関数のよさを考察する

先回りして述べる結論

近傍グラフの直径が小さい $\approx$ { 任意の目的関数と初期解に対して，うまく局所探索法を動かしたときの局所操作回数が小さい

局所探索法

局所探索法 (local search)：一般的枠組み

0. 許容解 $x \in S$ を適当に見つける (この x を初期解と呼ぶ)
1. 以下を繰り返し
   1. $N(x)$ に x よりもよい解 x' が存在するならば
      (すなわち，ある $x' \in N(x)$ が存在して $f(x') < f(x)$ ならば)
      $x \leftarrow x'$
   2. そうでなければ繰り返しを終了
2. x を出力

「任意の初期解に対して $\cdots$」$\Leftrightarrow$

- 第 0 ステップで見つける許容解 x が何であっても $\cdots$

今日の目標

今日の目標

近傍グラフの直径を通して，近傍関数のよさを考察する

先回りして述べる結論

近傍グラフの直径が小さい $\approx$ { 任意の目的関数と初期解に対して，うまく局所探索法を動かしたときの局所操作回数が小さい

局所探索法

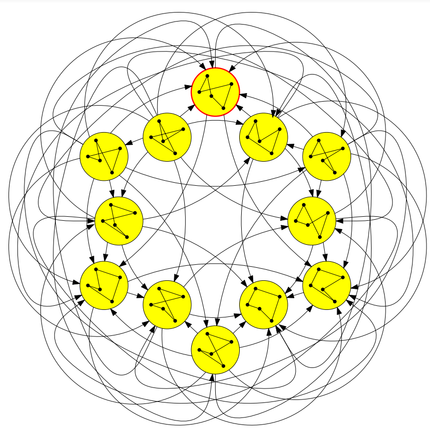
局所探索法 (local search)：一般的枠組み

0. 許容解 $x \in S$ を適当に見つける (この x を初期解と呼ぶ)
1. 以下を繰り返し
   1. $N(x)$ に x よりもよい解 x' が存在するならば
      (すなわち，ある $x' \in N(x)$ が存在して $f(x') < f(x)$ ならば)
      $x \leftarrow x'$
   2. そうでなければ繰り返しを終了
2. x を出力

「うまく局所探索法を動かしたとき $\cdots$」$\Leftrightarrow$

- 最終的に局所操作回数が少なくなるように
  各反復において都合のよい x' が選べたとき $\cdots$

遷移グラフでみる局所探索法



今日の目標

今日の目標

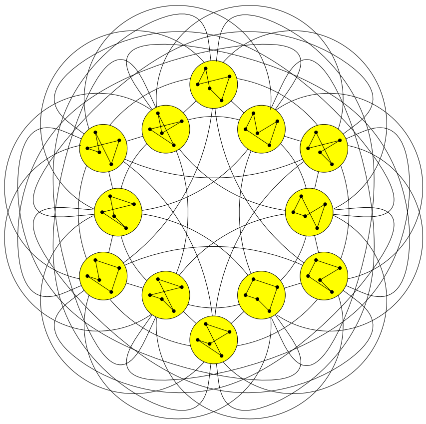
近傍グラフの直径を通して，近傍関数のよさを考察する

先回りして述べる結論

近傍グラフの直径が小さい $\approx$ $\begin{cases} \text{任意の目的関数と初期解に対して，} \\ \text{うまく局所探索法を動かしたときの} \\ \text{局所操作回数が小さい} \end{cases}$

目次

頂点挿入近傍に関する近傍グラフ：対称性を考慮した描画



頂点挿入近傍に関する近傍グラフ：直径

定理 4.1

n 個の都市 $\{1,\ldots,n\}$ 上の巡回セールスマン問題の頂点挿入近傍について，その近傍グラフの直径は $n-3$ 以下である．(ただし，$n \geq 5$)

注：解の表現は前回の通り，次の条件を満たすものだけ考える

- 最初に訪問する都市は 1 である
- 2 番目に訪問する都市の番号 $<$ 最後に訪問する都市の番号

定理 4.1 の証明：基本アイディア (1)

有向グラフの直径とは？ (再掲)

G の直径 (diameter) とは，

$$\max\{d(u,v) \mid u,v \in V\}$$

のこと

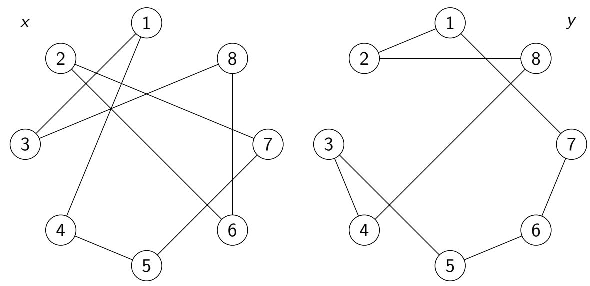
証明すること：直径 $\leq n-3$

- つまり，すべての $x,y \in S$ に対して，$d(x,y) \leq n-3$
- つまり，すべての $x,y \in S$ に対して，ある $x_1,\ldots,x_k \in S$ が存在して $N(x) \ni x_1, N(x_1) \ni x_2, N(x_2) \ni x_3, \ldots, N(x_{k-1}) \ni x_k, N(x_k) \ni y$ であり，かつ，$k \leq n-4$

$$x \to x_1 \to x_2 \to x_3 \to \quad \to x_{k-1} \to x_k \to y$$

定理 4.1 の証明：基本アイディア (2)

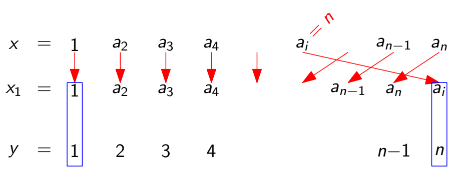
$n = 8$ のとき ($n-3=5$)



1, 3, 8, 6, 2, 7, 5, 4　　1, 2, 8, 4, 3, 5, 6, 7

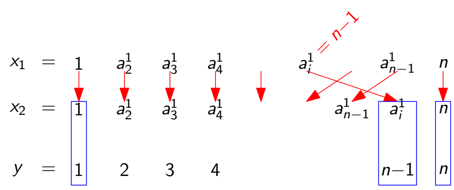
定理 4.1 の証明：詳細 (1)

- $x,y \in S$ を任意の巡回路とする
- 一般性を失わずに，$y = 1,2,3,\ldots,n$ とする
- $x = a_1,a_2,\ldots,a_n$ とする (ただし，$a_1 = 1$)
- 一般性を失わずに，x は $4,3,2$ をこの順で含まないとする (そうでないときは，巡回路の巡回順を逆にすればよい)
- x,y から x_1 を次のように構成する
  - 添え字 $i \in \{2,\ldots,n\}$ が $a_i = n$ を満たすとする
  - このとき，$x_1 = a_1,a_2,\ldots,a_{i-1},a_{i+1},\ldots,a_n,a_i$ (すなわち，x における a_i を末尾に移動させて x_1 を作る)
- $x_1 = a^1_1,a^1_2,\ldots,a^1_n$ とする (ただし，$a^1_1 = 1, a^1_n = n$)



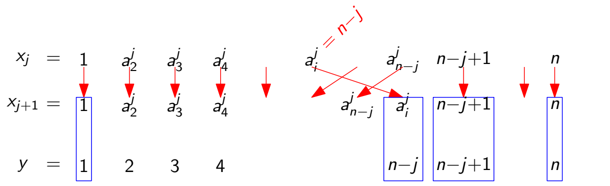
定理 4.1 の証明：詳細 (2)

- $x_1 = a^1_1,a^1_2,\ldots,a^1_n$ とする (ただし，$a^1_1 = 1, a^1_n = n$)
- x_1, y から x_2 を次のように構成する
  - 添え字 $i \in \{2,\ldots,n-1\}$ が $a^1_i = n-1$ を満たすとする
  - このとき，$x_2 = a^1_1,a^1_2,\ldots,a^1_{i-1},a^1_{i+1},\ldots,a^1_{n-1},a^1_i,a^1_n$ (すなわち，x_1 における a^1_i を a^1_{n-1} と a^1_n の間に移動させて x_2 を作る)
- $x_2 = a^2_1,a^2_2,\ldots,a^2_n$ とする (ただし，$a^2_1 = 1, a^2_{n-1} = n-1, a^2_n = n$)



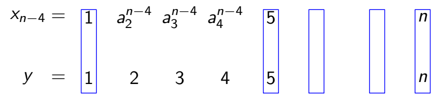
定理 4.1 の証明：詳細 (3)

- 一般に，$j \in \{1, \ldots, n-5\}$ に対して，$x_j = a_1^j, a_2^j, \ldots, a_n^j$ とする（ただし，$a_1^j = 1, a_{n-j+1}^j = n-j+1, \ldots, a_n^j = n$）
- x_j, y から x_{j+1} を次のように構成する
  - 添え字 $i \in \{2, \ldots, n-j\}$ が $a_i^j = n-j$ を満たすとする
  - このとき，$x_{j+1} = a_1^j, a_2^j, \ldots, a_{i-1}^1, a_{i+1}^1, \ldots, a_{n-j}^j, a_i^j, a_{n-j+1}^j, \ldots, a_n^j$（すなわち，$x_j$ における a_i^j を a_{n-j}^j と a_{n-j+1}^j の間に移動させて x_{j+1} を作る）

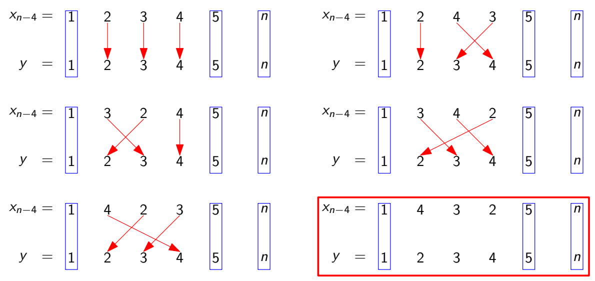


$d \leq n-3$ の証明：詳細 (4)

- このとき，x_{n-4} と y を比べると
$$\begin{array}{rcccccccc} x_{n-4} & = & 1, & a_2^{n-4}, & a_3^{n-4}, & a_4^{n-4}, & 5, & \cdots, & n \\ y & = & 1, & 2, & 3, & 4, & 5, & \cdots, & n \end{array}$$
であり，集合として $\{a_2^{n-4}, a_3^{n-4}, a_4^{n-4}\} = \{2, 3, 4\}$ である．
- 6 通りの場合分け



定理 4.1 の証明：詳細 (5)



This does not happen

- x では 4, 3, 2 がこの順に現れないので，$a_2^{n-4} = 4,\ a_3^{n-4} = 3,\ a_4^{n-4} = 2$ の場合は起こらない
- このようにして，望んでいた $x_1, \ldots, x_{n-4}$ を構成できた □

目次

今日のまとめ

有向グラフに関する概念

- 強連結性
- 直径

近傍グラフにおける重要性

近傍グラフの直径が小さい ≈ { 任意の目的関数と初期解に対して，うまく局所探索法を動かしたときの局所操作回数が小さい