離散最適化基礎論 (11) **2014 年 1 月 24 日**
演習問題 **岡本 吉央**

注意： 解答がどのように導かれるのか，すなわち証明，を必ず書き下すこと．

復習問題 11.1 巡回セールスマン問題とその 2opt 近傍を考える．その入力は対称行列 $C \in \mathbb{R}^{n \times n}$ であり，C から得られる目的関数を f で表す．2opt 近傍関数は N で表す．

次のアルゴリズムについて，以下の問いに答えよ．ただし，$\varepsilon > 0$ は予め与えられる実数である．

Step 0. 巡回路 τ を適当に見つける．

Step 1. $\tau_1 \leftarrow \tau$, $i \leftarrow 1$.

Step 2. 以下を繰り返し．

- **Step 2-1.** $\tau \leftarrow \tau_i$, $q \leftarrow \dfrac{f(\tau_i)\varepsilon}{2n(1+\varepsilon)}$, $C^{(i)} \leftarrow \left\lceil \dfrac{C}{q} \right\rceil q$ (成分ごと).
- **Step 2-2.** 以下を繰り返し．
  - **Step 2-2-a.** ある $\tau' \in N(\tau)$ が存在して $f_i(\tau') < f_i(\tau)$ ならば，$\tau \leftarrow \tau'$.
  - **Step 2-2-b.** そうでなければ繰り返しを終了し，Step 3 へ行く．
  - **Step 2-2-c.** $f(\tau) \leq f(\tau_i)/2$ ならば，$\tau_{i+1} \leftarrow \tau$，$i \leftarrow i+1$ として Step 2-1 に戻る．

Step 3. τ を出力．

ただし，f_i は C_i から得られる目的関数であるとする．

1. このアルゴリズムの出力 τ が ε 局所最適解であることを証明せよ．
2. このアルゴリズムにおける反復回数 (すなわち，Step 2-2-a における「ある $\tau' \in N(\tau)$ が存在して $f_i(\tau') < f_i(\tau)$」という条件確認の総実行回数) が $O(\frac{1}{\varepsilon}n^3 \log n)$ であることを次の流れに沿って証明せよ．
   (a) Step 2-1 の実行回数 (「外側の反復」の実行回数) が $O(n^2 \log n)$ であることを証明せよ．
   (b) Step 2 の各反復において Step 2-2-a が実行される回数 (「内側の反復」の実行回数) が $O(n/\varepsilon)$ であることを証明せよ．
   (c) 以上の 2 つから，Step2-2-a の総実行回数が $O(\frac{1}{\varepsilon}n^3 \log n)$ であることを証明せよ．

追加問題 11.2 重み付きグラフ等分割問題とは以下の離散最適化問題である．入力として，$2n$ 個の頂点を持つ無向グラフ $G = (V, E)$ と辺重みを表す非負実数値関数 $w\colon E \to \mathbb{R}$ が与えられる．許容解は頂点集合 V の等分割 $P = \{A, B\}$ である．目的関数値は A と B を跨る辺の重み和 $f(P) = \sum_{\{u,v\} \in E, u \in A, v \in B} w(\{u, v\})$ で定められる．グラフ等分割問題と同様に，重み付きグラフ等分割問題に対しても，交換操作を定義し，それが誘導する近傍関数を N で表す．

重み付きグラフ等分割問題とその交換近傍に関して，任意の実数 $\varepsilon > 0$ が与えられたときに，ε 局所最適解を多項式時間で発見するアルゴリズムを設計せよ．(そのアルゴリズムがなぜ ε 局所最適解を出力し，なぜ多項式時間で実行が終了するのかも，説明せよ．)