離散最適化基礎論 (10) 演習問題

2014 年 1 月 10 日

岡本 吉央

注意： 解答がどのように導かれるのか，すなわち証明，を必ず書き下すこと．

以下の演習問題で「離散最適化問題 P」と呼んだら，次の問題

$$\begin{array}{ll} \text{最小化} & f(x) \\ \text{条　件} & x \in S \end{array}$$

を指すこととする．ここで，S は空ではない有限集合であり，$f\colon S \to \mathbb{R}$ は目的関数である．

復習問題 10.1 グラフ等分割問題に対して交換近傍に基づく局所探索法を適用することを考える．このとき，即時移動による最悪反復回数が必ず入力グラフの辺数以下になることを証明せよ．

復習問題 10.2 機械が 2 台の最終完了時刻最小化スケジューリング問題に対して移動近傍に基づく局所探索法を適用することを考える．この問題の目標は，即時移動による最悪反復回数が必ず $n(n+1)$ 以下になることを証明することである．ただし，n はジョブの個数である．以下の流れに沿って，証明をせよ．2 台の機械をそれぞれ M_1, M_2 と呼ぶことにする．

1. 許容解を 1 つ固定し，M_1 の完了時刻が M_2 の完了時刻よりも小さいとする (つまり，M_2 が完了時刻を定めている)．このとき，移動操作によって目的関数値が減少するための必要十分条件は，M_2 に割り当てられたあるジョブ J_i が存在し，その処理時間 p_i が M_2 の完了時刻と M_1 の完了時刻の差 Δ 未満となることである．これを証明せよ．
2. 前問の状況において，$p_i < \Delta$ を満たすジョブ J_i を考える．加えて $p_i > \Delta/2$ ならば，ジョブ J_i の移動によって，最終完了時刻を定める機械が M_1 になることを証明せよ．そのように，最終完了時刻を定める機械が変更されるようになる移動を「大きな移動」と呼ぶことにする．
3. 前問の状況において，$p_i < \Delta$ を満たすジョブ J_i を考える．加えて $p_i \leq \Delta/2$ ならば，ジョブ J_i の移動によって，M_2 がいまだに最終完了時刻を定める機械であることを証明せよ．そのように，最終完了時刻を定める機械が変更されない移動を「小さな移動」と呼ぶことにする．
4. 各ジョブに対して，それが大きな移動を行った後，再び (大小問わず) 移動することはない．これを証明せよ．
5. 各ジョブに対して，それが小さな移動を 2 回行うとき，その間に別のジョブが大きな移動をしなければならない．なぜか？ これをまとめよ．
6. 以上の数え上げより，即時移動による最悪反復回数が $n(n+1)$ よりも大きいと，矛盾が導かれることを示せ．

復習問題 10.3 自然数 $q \geq 1$ に対して，$n = 3q+1$ とする．このとき，以下に記述するような n 個のジョブを入力とする，機械が 2 台の最終完了時刻最小化スケジューリング問題を考える．

- 任意の $i \in \{0, \ldots, q-1\}$ に対して，処理時間を 2^i とするジョブが 3 個ある．
- 処理時間を 2^q とするジョブが 1 個ある．

この問題の目標は，移動近傍を考えたとき，この入力に対して，即時移動による最悪反復回数が $q(q+1)/2$ 以上になることを証明することである．

そのために，次のような初期解を考える．

- 機械 1 には，各 $i \in \{0, \ldots, q-1\}$ に対して，処理時間を 2^i とするジョブが 2 個割り当てられ，さらに，処理時間を 2^q とするジョブも 1 個割り当てられている．
- 機械 2 には，各 $i \in \{0, \ldots, q-1\}$ に対して，処理時間を 2^i とするジョブが 2 個割り当てられている．

q に関する帰納法を用いることで，この初期解から局所探索法を動作させると，即時移動による最悪反復回数が $q(q+1)/2$ 以上になることを示せ．

補足問題 10.4 任意の離散最適化問題 P とその任意の近傍関数に対して，局所探索法を適用したとき，即時移動による最悪反復回数が必ず最良移動による最悪反復回数以上になることを証明せよ．

補足問題 10.5 任意の離散最適化問題 P に対して局所探索法を適用することを考える．その近傍関数 N_1, N_2 が任意の $x \in S$ に対して $N_1(x) \subseteq N_2(x)$ となるという条件を満たすとき，N_1 における即時移動による最悪反復回数が必ず N_2 における即時移動による最悪反復回数以下になることを証明せよ．（ヒント：演習問題 1.8 の結果を用いよ．）

追加問題 10.6 自然数 $n \geq 1$ に対して，次のような許容集合 S と目的関数 f を持つ離散最適化問題 P を考える．

- $S = \{1, \ldots, n\}$.
- 任意の $x \in S$ に対して，$f(x) = x$.

近傍関数 $N \colon S \to 2^S$ を，任意の $x \in S$ に対して

$$N(x) = S$$

であると定義し，N に関する局所最適解を計算するための局所探索法を考える．

1. 即時移動による最悪反復回数を定めよ．
2. 最良移動による最悪反復回数を定めよ．