離散最適化基礎論 (9) **2013 年 12 月 20 日**
演習問題 **岡本 吉央**

注意： 解答がどのように導かれるのか，すなわち証明，を必ず書き下すこと．

復習問題 9.1 都市数 n が偶数であるような巡回セールスマン問題を考える．任意の巡回路の割当近傍の大きさが $(n/2)!$ となることを証明せよ．

復習問題 9.2 都市数 n が偶数であるような巡回セールスマン問題を考える．任意の巡回路の割当近傍に，その巡回路よりも短い巡回路が存在するか判定する問題が $O(n^3)$ 時間で解けることを証明せよ．

補足問題 9.3 都市数 n の巡回セールスマン問題を考える．ただし，都市 i と j の間の距離は $c(i, j)$ で与えられるとする．最短のピラミッド型巡回路が $O(n^3)$ 時間で見つけられることを次の流れに沿って証明せよ．

1. $2 \leq i < j \leq n$ を満たす都市 i と j に対して，都市 $\{1, \dots, j\}$ をちょうど一度ずつ訪問する経路の中で，次を満たすものの最短長を $D(i, j)$ で表す．

   - i から始まり j で終わる．
   - i から 1 まで，都市の番号が小さくなるように進む．
   - 1 から j まで，都市の番号が大きくなるように進む．

   このとき，ピラミッド巡回路の最短長が $D(n-1, n) + c(n-1, n)$ で表されることを証明せよ．

2. 次の再帰式が成り立つことを証明せよ．$2 \leq i < j \leq n$ を満たす任意の都市 i と j に対して，

$$D(i,j) = \begin{cases} c(1,2) + c(1,3) & (i = 2,\ j = 3 \text{ のとき}) \\ D(i, j-1) + c(j-1, j) & (i+1 < j \text{ のとき}) \\ \min_{k<i}\{D(k,i) + c(k,j)\} & (i+1 = j \text{ のとき}). \end{cases}$$

3. 上の再帰式に基づいて，$D(n-1, n)$ を $O(n^2)$ 時間で計算する方法を与えよ．なぜ $O(n^2)$ 時間で計算が終了するのかも証明せよ．

補足問題 9.4 都市数 n の巡回セールスマン問題を考える．任意の巡回路のピラミッド型巡回路近傍の大きさが 2^{n-3} となることを証明せよ．(注意：巡回セールスマン問題を考えているので，$n \geq 3$ であることを暗に仮定している．)

追加問題 9.5 n 個のジョブ，m 台の機械を入力に持つ完了時刻和最小化スケジューリング問題を考える．割当問題として捉え直すことにより，この完了時刻和最小化スケジューリング問題が $O(m^3n^3)$ 時間で解けることを証明せよ．