

注意： 解答がどのように導かれるのか，すなわち証明，を必ず書き下すこと．

復習問題 8.1  $n$  個のジョブ， $m$  台の機械を入力に持つ最終完了時刻最小化スケジューリング問題を考える．許容解  $A = (A_1, \dots, A_m)$  において， $A_j$  は  $j$  台目の機械  $M_j$  に割り当てられたジョブの集合を表すものとする．

以下の条件が，許容解  $A$  の移動近傍において， $A$  よりも目的関数値がよい（つまり，最終完了時刻が小さい）許容解が存在するための必要十分条件であることを証明せよ．

$A$  において，各機械  $M_j$  の最大完了時刻  $\ell_j$  が  $\ell_1 \geq \ell_2 \geq \dots \geq \ell_m$  を満たし， $A_1$  のジョブにおける最小処理時間が  $p_i$  であるとき， $\max\{\ell_2, \ell_m + p_i\} < \ell_1$  が成り立つ．

復習問題 8.2  $n$  個のジョブ， $m$  台の機械を入力に持つ最終完了時刻最小化スケジューリング問題を考える．移動近傍における近傍探索を行うためのデータ構造で，次の計算量を持つものを設計せよ．（なぜ，それが正しく近傍探索を行うのか，そして，なぜそのような計算量を持つのかも説明せよ．）

- データ構造の構成にかかる時間は  $O(n)$  ．
- 近傍探索にかかる時間は  $O(\log n)$  ．
- データ構造の変更にかかる時間は  $O(\log n)$  ．

補足問題 8.3 最終完了時刻最小化スケジューリング問題において，ジョブの数  $n$  が機械の数  $m$  以上であるとき，すなわち， $n \geq m$  であるとき，最適解を  $O(n)$  時間で計算するアルゴリズムを与えよ．（なぜ最適解を与えるのか，なぜ  $O(n)$  時間なのか，ということの説明が必要があることに注意する．）

補足問題 8.4  $n$  個の都市を入力に持つ巡回セールスマン問題を考える． $2_{\text{opt}}$  近傍における近傍探索を行うためのデータ構造で，次の計算量を持つものを設計せよ．（なぜ，それが正しく近傍探索を行うのか，そして，なぜそのような計算量を持つのかも説明せよ．）

- データ構造の構成にかかる時間は  $O(n^2)$  ．
- 近傍探索にかかる時間は  $O(n \log n)$  ．
- データ構造の変更にかかる時間は  $O(n \log n)$  ．

補足問題 8.5 次の等式を証明せよ．

$$\sum_{h=0}^{\infty} \frac{h}{2^h} = 2.$$

追加問題 8.6  $n$  個の都市を入力に持つ巡回セールスマン問題を考える．頂点挿入近傍における近傍探索を行うためのデータ構造で，次の計算量を持つものを設計せよ．（なぜ，それが正しく近傍探索を行うのか，そして，なぜそのような計算量を持つのかも説明せよ．）

- データ構造の構成にかかる時間は  $O(n^2)$  ．
- 近傍探索にかかる時間は  $O(n \log n)$  ．
- データ構造の変更にかかる時間は  $O(n \log n)$  ．