離散最適化基礎論 (7) 演習問題

2013 年 12 月 6 日

岡本 吉央

注意： 解答がどのように導かれるのか，すなわち証明，を必ず書き下すこと．

復習問題 7.1 この演習問題の目的は，巡回セールスマン問題において，距離が三角不等式を満たすとき，2opt 近傍に関する局所探索法の近似比が $4\sqrt{n}$ 以下になることを証明することである．ただし，n は都市数である．以下の誘導に沿って，これを証明せよ．

距離行列 D が三角不等式を満たすような，都市数 n の任意の入力を考える．その最適値を opt で表し，任意の局所最適解を $\tau = (\tau(1), \tau(2), \ldots, \tau(n))$ で表す．このとき，

$$E_i = \{(\tau(j), \tau(j+1)) \mid d(\tau(j), \tau(j+1)) > \frac{2 \cdot \mathrm{opt}}{\sqrt{i}}\}$$

とする．

とりあえず，目標とすることは，任意の i に対して $|E_i| \leq i-1$ となることを証明することである．これを背理法で証明するために，ある i に対して $|E_i| \geq i$ であると仮定する．

1. 巡回路 τ の辺には自然に向きが付いているとして，弧 a の始点を $t(a)$，終点を $h(a)$ と書いて表すことにする．ここで，E_i の任意の弧 a の始点 $u = t(a)$ に対して，集合 T_u を $T_u = \{t(a') \mid a' \in E_i, d(u, t(a')) \leq \frac{\mathrm{opt}}{\sqrt{i}}\}$ と定義する．任意の $v, w \in T_u$ に対して，$d(v, w) \leq \frac{2 \cdot \mathrm{opt}}{\sqrt{i}}$ となることを証明せよ．
2. 任意の $v, w \in T_u$ に対して，v を始点とする E_i の弧の終点を v' と書き，w を始点とする E_i の弧の終点を w' と書くことにする．このとき，$d(v', w') \geq \frac{2 \cdot \mathrm{opt}}{\sqrt{i}}$ となることを証明せよ．
3. E_i の任意の弧 a の始点 $u = t(a)$ に対して，$|T_u| < \sqrt{i}$ となることを証明せよ．
4. 矛盾を導くことで，$|E_i| \leq i-1$ となることを証明せよ．
5. 前問を踏まえて，2opt 近傍に関する局所探索法の近似比が $4\sqrt{n}$ 以下になることを証明せよ．

補足問題 7.2 都市の集合 X とその上の距離行列 D を考える．行列 D が三角不等式を満たすとき，任意の $x \in X$ に対して，$X - \{x\}$ 上の最短巡回路の長さが X 上の最短巡回路の長さ以下となることを証明せよ．

追加問題 7.3 都市の集合 X とその上の距離行列 D を考える．行列 D によって重みが与えられる X 上の最小全域木の重みを mst と書き，X 上の最短巡回路の長さを tsp と書くことにする．行列 D が三角不等式を満たすとき，

$$\mathrm{tsp} \leq 2 \cdot \mathrm{mst}$$

が成り立つことを証明せよ．(ヒント：最小全域木から巡回路を構成してみよ．)

追加問題 7.4 演習問題 7.1 において，

$$E_i = \{(\tau(j), \tau(j+1)) \mid d(\tau(j), \tau(j+1)) > \frac{2 \cdot \mathrm{opt}}{\sqrt{i}}\}$$

と定義したが，これを仮に

$$E_i = \{(\tau(j), \tau(j+1)) \mid d(\tau(j), \tau(j+1)) > \frac{1.9 \cdot \mathrm{opt}}{\sqrt{i}}\}$$

と定義したら，演習問題 7.1 における証明は正しく進むだろうか？ 進む場合はその証明を，そうでない場合はどこで進まなくなるのか，示せ．