

注意： 解答がどのように導かれるのか，すなわち証明，を必ず書き下すこと．

復習問題 6.1 2 台の機械を入力に持つ最終完了時刻最小化スケジューリング問題を考える．このとき，移動近傍に関する局所探索法の近似比が $\frac{4}{3}$ 以上となる入力構成せよ．

復習問題 6.2 2 台の機械を入力に持つ最終完了時刻最小化スケジューリング問題を考える．この問題の目標は，任意の入力に対して，移動近傍に関する局所探索法の近似比が $\frac{4}{3}$ 以下となることを証明することである．以下の手順に沿って，それを証明せよ．

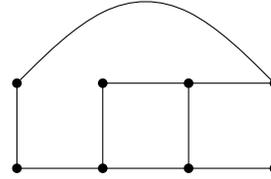
任意の入力を考える．各ジョブ J_i の処理時間を p_i と表記する．ただし， $i \in \{1, \dots, n\}$ とする．最適解ではない任意の局所最適解を S とし，任意の最適解を S^* とする． S と S^* の最終完了時刻をそれぞれ t, t^* とする．目標は「 $t \leq \frac{4}{3}t^*$ 」を証明することである．

S における機械 1, 2 の完了時刻をそれぞれ l_1, l_2 とする．このとき， $l_1 \geq l_2$ と仮定してもよく，そのとき， $t = l_1$ となる．

1. S において機械 1 に割り当てられているジョブの中で，処理時間が最短であるものを J_k とする．このとき， $t \leq l_2 + p_k$ が成り立つことを証明せよ．
2. 不等式 $2t \leq \left(\sum_{i=1}^n p_i \right) + p_k$ が成り立つことを証明せよ．
3. 不等式 $2p_k \leq t$ が成り立つことを証明せよ．(ヒント：まず， S において機械 1 に割り当てられているジョブの数が 2 以上であることを証明せよ．)
4. 不等式 $\sum_{i=1}^n p_i \leq 2t^*$ が成り立つことを証明せよ．
5. ここまでの小問を踏まえて， $t \leq \frac{4}{3}t^*$ が成り立つことを証明せよ．

復習問題 6.3 この問題の目標は，任意の定数 $\alpha \geq 1$ に対して，巡回セールスマン問題に対するある入力が存在して，その入力に対して 2opt 近傍に関する局所探索法の近似比が α より大きいことを証明することである．以下の手順に沿って，それを証明せよ．

任意の定数 $\alpha \geq 1$ を考える．このとき，次の入力構成を考えると．



これは都市数 8 の入力を無向グラフによって表現したもので，辺で結ばれる 2 つの都市間の費用は ϵ ，辺で結ばれていない 2 つの都市間の費用は 1 であるとすると．ただし， $\epsilon > 0$ は 1 よりも小さな定数で，後で定めるものとする．

1. この入力に対する許容解で，その費用が 8ϵ 以下であるものを見つけよ．
2. この入力に対する局所最適解で，その費用が $1 + 8\epsilon$ 以上であるものを見つけよ．
3. 以上の 2 つから， ϵ をうまく定めることで，近似比が $1 + \alpha$ 以上であることを証明せよ．

補足問題 6.4 $m \geq 2$ を自然数として， m 台の機械を入力に持つ最終完了時刻最小化スケジューリング問題を考える．このとき，移動近傍に関する局所探索法の近似比が $2 - \frac{2}{m+1}$ 以上となる入力構成せよ．

補足問題 6.5 $m \geq 2$ を自然数として， m 台の機械を入力に持つ最終完了時刻最小化スケジューリング問題を考える．このとき，任意の入力に対して，移動近傍に関する局所探索法の近似比が $2 - \frac{2}{m+1}$ 以下となることを証明せよ．(ヒント：問題 6.5 の方針を参考にせよ．)

追加問題 6.6 任意の偶数 $n \geq 8$ に対して，巡回セールスマン問題の都市数が n である入力が存在して，その入力に対して 2opt 近傍に関する局所探索法の近似比が n より大きいことを証明せよ．(ヒント：問題 6.3 の構成を参考にせよ．)