

注意： 解答がどのように導かれるのか、すなわち証明、を必ず書き下すこと。

復習問題 5.1 次の離散最適化問題を考える。許容解は $\{1, 2, \dots, n\}$ 上の順列であり、目的関数は順列 π に対して $f(\pi) = \sum_{i=1}^n i \cdot \pi_i$ と定義されるものとする。局所操作として、順列 π に対して、その隣接する要素を入れ替える操作を考える。この操作が誘導する近傍関数 N が厳密であることを次の手順に沿って証明せよ。

1. 順列 $(n, n-1, \dots, 2, 1)$ が N に関する局所最適解であることを証明せよ。
2. 上の問に挙げた順列以外に、 N に関する局所最適解が存在しないことを証明せよ。(注：問題 5.4 の結果を用いてもよい。)
3. 以上 2 つの問で証明したことから、 N が厳密であることを証明せよ。

復習問題 5.2 任意の連結無向グラフ $G = (V, E)$ と G の任意の異なる 2 つの全域木 T, T' を考える。このとき、任意の $e \in E(T) - E(T')$ に対してある $e' \in E(T') - E(T)$ が存在して、 $(T - e) + e'$ と $(T' + e) - e'$ も G の全域木になることを証明せよ。

復習問題 5.3 最小全域木問題に対する交換近傍が厳密であることを証明せよ。(注：問題 5.2 の結果を用いてもよい。)

補足問題 5.4 問題 5.1 にある離散最適化問題と近傍関数 N を考える。順列 π は $(n, n-1, \dots, 2, 1)$ ではないものであるとする。つまり、ある $j \in \{1, \dots, n-1\}$ が存在して、 $\pi_j < \pi_{j+1}$ となる。順列 π における π_j と π_{j+1} を交換して得られる順列を π' とする。このとき、 $f(\pi') = f(\pi) - 1$ となることを証明せよ。

補足問題 5.5 任意の離散最適化問題

$$\begin{array}{ll} \text{最小化} & f(x) \\ \text{条件} & x \in S \end{array}$$

に対して、厳密近傍関数が存在することを証明せよ。ここで、 S は空ではない有限集合であり、 $f: S \rightarrow \mathbb{R}$ は目的関数である。

追加問題 5.6 この演習問題の目標は、 n 個の都市が 2 次元平面上の正 n 角形の頂点に配置されていて、2 都市間の距離がユークリッド距離 (直線距離) で測られるような巡回セールスマン問題を考えたとき、 2opt 近傍が厳密であることを証明することである。以下の手順に従って、それを証明せよ。

1. そのような巡回セールスマン問題において、正 n 角形の頂点を時計回り (あるいは反時計回り) に訪問する巡回路が、 2opt 近傍に関する局所最適解であることを証明せよ。
2. 上の問で挙げた巡回路以外には、 2opt 近傍に関する局所最適解がないことを証明せよ。(ヒント：正 n 角形の頂点を時計回り、あるいは反時計回りで訪問しない巡回路において、交差する 2 つの「辺」が必ず存在することをまず証明せよ。)
3. 以上 2 つの問で証明したことから、 2opt 近傍が厳密であることを証明せよ。

追加問題 5.7 以下の各項目に挙げる命題が正しいか間違っているか述べ、証明せよ。

1. 任意の連結無向グラフ $G = (V, E)$ と G の任意の異なる 2 つの全域木 T, T' を考える。このとき、任意の $e \in E(T) - E(T')$ を考えると、任意の $e' \in E(T') - E(T)$ に対して、 $(T - e) + e'$ と $(T' + e) - e'$ は G の全域木である。
2. 任意の連結無向グラフ $G = (V, E)$ と G の任意の異なる 2 つの全域木 T, T' を考える。このとき、ある $e \in E(T) - E(T')$ が存在して、ある $e' \in E(T') - E(T)$ に対して、 $(T - e) + e'$ と $(T' + e) - e'$ は G の全域木である。
3. 任意の連結無向グラフ $G = (V, E)$ と G の任意の異なる 2 つの全域木 T, T' を考える。このとき、ある $e \in E(T) - E(T')$ が存在して、任意の $e' \in E(T') - E(T)$ に対して、 $(T - e) + e'$ と $(T' + e) - e'$ は G の全域木である。