

注意： 解答がどのように導かれるのか，すなわち証明，を必ず書き下すこと．

復習問題 4.1 n 個の都市 $\{1, \dots, n\}$ 上の巡回セールスマン問題の頂点挿入近傍について，その近傍グラフの直径が $n - 3$ 以下であることを証明せよ．ただし， $n \geq 5$ とし，巡回セールスマン問題の解の表現として，次の条件を満たすものだけ考える．

- 最初に訪問する都市は 1 である．
- 2 番目に訪問する都市の番号は最後に訪問する都市の番号よりも小さい．

補足問題 4.2 任意の有向グラフ G を考える．このとき， G が強連結であることと， G の直径が ∞ ではないことが同値であることを証明せよ．

復習問題 4.3 n 個の都市 $\{1, \dots, n\}$ 上の巡回セールスマン問題の頂点挿入近傍について，その近傍グラフの直径が $n - 3$ 以上であることを証明せよ．ただし， $n \geq 5$ とし，巡回セールスマン問題の解の表現として，次の条件を満たすものだけ考える．

- 最初に訪問する都市は 1 である．
- 2 番目に訪問する都市の番号は最後に訪問する都市の番号よりも小さい．

(この問題は難しいかもしれない．)

復習問題 4.4 n 個の都市 $\{1, \dots, n\}$ 上の巡回セールスマン問題の 2_{opt} 近傍について，その近傍グラフの直径が $\lceil n/2 \rceil$ 以上であることを証明せよ．ただし， $n \geq 5$ とし，巡回セールスマン問題の解の表現として，次の条件を満たすものだけ考える．

- 最初に訪問する都市は 1 である．
- 2 番目に訪問する都市の番号は最後に訪問する都市の番号よりも小さい．

(ヒント： 2_{opt} 操作によって，「新しい辺」は高々 2 つしか増加しないことに着目せよ．)

追加問題 4.5 機械が m 台，ジョブが n 個のとき，最終完了時刻最小化スケジューリング問題の移動近傍について，その近傍グラフの直径が n であることを証明せよ．ただし，最終完了時刻最小化スケジューリング問題の解の表現として， (A_1, \dots, A_m) というジョブの集合の順序付き分割を考えることとする．注意：「 n 以下であること」だけでなく「 n であること」を証明する必要がある．

追加問題 4.6 頂点数が n であるときのグラフ等分割問題の交換近傍について，その近傍グラフの直径は何であるか，答えよ．ただし， $n \geq 2$ は偶数であるとする．(解の表現によって，直径が変わる可能性があるので，解の表現として何を考えるかも明確に述べよ．)