

注意： 解答がどのように導かれるのか，すなわち証明，を必ず書き下すこと．

復習問題 3.1 任意の離散最適化問題とその任意の近傍関数に対して，その遷移グラフに有向閉路は存在しないことを証明せよ．

復習問題 3.2 次の許容集合 S と目的関数 $f: S \rightarrow \mathbb{R}$ で定義される離散最適化問題を考える．

$$S = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\},$$
$$f(x) = \begin{cases} x+3 & (x \text{ が偶数のとき}) \\ x & (x \text{ が奇数のとき}). \end{cases}$$

以下の問に答えよ．

1. 近傍関数 $N_1: S \rightarrow 2^S$ を $N_1(x) = \{y \in S \mid |x - y| \leq 1\}$ と定義する．このとき， N_1 に対する近傍グラフと遷移グラフを描け．
2. N_1 を用いて局所探索法を実行したとき，その近似比は何になるか？ 答えよ．
3. N_1 を用いて局所探索法を実行したとき， x を初期解としたときの局所操作回数の最大値を $T(x)$ とする． $\max_{x \in S} T(x)$ は何になるか？ 答えよ．
4. 近傍の大きさの最大値 $\max_{x \in S} |N_1(x)|$ は何になるか？ 答えよ．

復習問題 3.3 問題 3.2 と同じ離散最適化問題を考える．以下の問に答えよ．

1. 近傍関数 $N_2: S \rightarrow 2^S$ を $N_2(x) = \{y \in S \mid |x - y| \leq 2\}$ と定義する．このとき， N_2 に対する近傍グラフと遷移グラフを描け．
2. N_2 を用いて局所探索法を実行したとき，その近似比は何になるか？ 答えよ．
3. N_2 を用いて局所探索法を実行したとき， x を初期解としたときの局所操作回数の最大値を $T(x)$ とする． $\max_{x \in S} T(x)$ は何になるか？ 答えよ．
4. 近傍の大きさの最大値 $\max_{x \in S} |N_2(x)|$ は何になるか？ 答えよ．

補足問題 3.4 問題 3.2 と同じ離散最適化問題を考える．以下の問に答えよ．

1. 近傍関数 $N_3: S \rightarrow 2^S$ を $N_3(x) = \{y \in S \mid |x - y| = 0 \text{ または } 2\}$ と定義する．このとき， N_3 に対する近傍グラフと遷移グラフを描け．
2. N_3 を用いて局所探索法を実行したとき，その近似比は何になるか？ 答えよ．
3. N_3 を用いて局所探索法を実行したとき， x を初期解としたときの局所操作回数の最大値を $T(x)$ とする． $\max_{x \in S} T(x)$ は何になるか？ 答えよ．
4. 近傍の大きさの最大値 $\max_{x \in S} |N_3(x)|$ は何になるか？ 答えよ．

補足問題 3.5 n 個の都市 $\{1, \dots, n\}$ 上の巡回セールスマン問題の頂点挿入近傍について，各許容解の近傍の大きさが $n(n-3)+1$ であることを証明せよ．ただし， $n \geq 5$ とし，巡回セールスマン問題の解の表現として，次の条件を満たすものだけ考える．

- 最初に訪問する都市は 1 である．
- 2 番目に訪問する都市の番号は最後に訪問する都市の番号よりも小さい．

補足問題 3.6 最終完了時刻最小化スケジューリング問題に対する移動近傍 (より正確には，その近傍関数) が対称であることを証明せよ．

補足問題 3.7 機械が 2 台，ジョブが n 個のとき，最終完了時刻最小化スケジューリング問題の移動近傍について，各許容解の近傍の大きさが $n+1$ であることを証明せよ．ただし，機械が 2 台のときの最終完了時刻最小化スケジューリング問題の解の表現として， (A_1, A_2) というジョブの集合の順序付き分割を考えることとする．(すなわち， $(\{J_1, J_2\}, \{J_3\})$ と $(\{J_3\}, \{J_1, J_2\})$ は違う解であると見なす．)

追加問題 3.8 問題 3.2 と同じ離散最適化問題を考える．以下の問に答えよ．

1. 近傍関数 $N_4: S \rightarrow 2^S$ を $N_4(x) = \{y \in S \mid |x - y| \leq 9\}$ と定義する．このとき， N_4 に対する近傍グラフと遷移グラフを描け．(見やすく描くように工夫すること．)
2. N_4 を用いて局所探索法を実行したとき，その近似比は何になるか？ 答えよ．
3. N_4 を用いて局所探索法を実行したとき， x を初期解としたときの局所操作回数の最大値を $T(x)$ とする． $\max_{x \in S} T(x)$ は何になるか？ 答えよ．
4. 近傍の大きさの最大値 $\max_{x \in S} |N_4(x)|$ は何になるか？ 答えよ．

追加問題 3.9 機械が m 台，ジョブが n 個のとき，最終完了時刻最小化スケジューリング問題の移動近傍について，各許容解の近傍の大きさが $(m-1)n+1$ であることを証明せよ．ただし，最終完了時刻最小化スケジューリング問題の解の表現として， (A_1, \dots, A_m) というジョブの集合の順序付き分割を考えることとする．

追加問題 3.10 頂点数が n であるときのグラフ等分割問題の交換近傍について，各許容解の近傍の大きさが何であるか，答えよ．ただし， $n \geq 2$ は偶数であるとする．(解の表現によって，大きさが変わる可能性があるので，解の表現として何を考えるかも明確に述べよ．)