

注意： 解答がどのように導かれるのか，すなわち証明，を必ず書き下すこと．

復習問題 2.1 完了時刻和最小化スケジューリング問題において，機械が1台のとき，最適解を計算する $O(n \log n)$ 時間アルゴリズムを設計せよ．なぜ最適解を出力するのか，なぜ時間計算量が $O(n \log n)$ であるのかも証明せよ．

補足問題 2.2 n 個の実数 a_1, \dots, a_n が $a_1 \geq \dots \geq a_n$ を満たしていないとする．このとき，ある $i \in \{1, \dots, n-1\}$ が存在して， $a_i < a_{i+1}$ となることを証明せよ．

補足問題 2.3 遅延時間最小化スケジューリング問題において，機械が1台のとき，最適解を計算する $O(n \log n)$ 時間アルゴリズムを設計せよ．なぜ最適解を出力するのか，なぜ時間計算量が $O(n \log n)$ であるのかも証明せよ．(ヒント：完了時刻和最小化スケジューリング問題のときと同様に背理法で証明したい．矛盾を導くためには，選ぶ i に工夫が必要かもしれない．)

追加問題 2.4 n 個の都市 $\{1, \dots, n\}$ 上の巡回セールスマン問題について，次の条件を満たす許容解の数はいくつか，答えよ．

- 最初に訪問する都市が1である．
- 2番目に訪問する都市の番号が最後に訪問する都市の番号よりも小さい．

ただし， $n \geq 1$ とする．

追加問題 2.5 重み付き完了時刻和最小化スケジューリング問題では，普通の完了時刻和最小化スケジューリング問題の設定に加えて，各ジョブに対して非負の重みが与えられている．目的は各ジョブの完了時刻に重みをかけたものの和を最小化することである．重み付き完了時刻和最小化スケジューリング問題において，機械が1台のとき，最適解を計算する $O(n \log n)$ 時間アルゴリズムを設計せよ．なぜ最適解を出力するのか，なぜ時間計算量が $O(n \log n)$ であるのかも証明せよ．