

注意： 解答がどのように導かれるのか，すなわち証明，を必ず書き下すこと．

この演習問題では，離散最適化問題

$$\begin{array}{ll} \text{最小化} & f(x) \\ \text{条件} & x \in S \end{array}$$

を考察対象とする．ここで， S は空ではない有限集合であり， $f: S \rightarrow \mathbb{R}$ は目的関数である．この離散最適化問題を以後 P と呼ぶ．

復習問題 1.1 問題 P に対する近傍関数 $N: S \rightarrow 2^S$ を考え，それを用いて局所探索法を実行する．その出力として得られた許容解を $x \in S$ とする．このとき， x は N に関する P の局所最適解であることを証明せよ．

復習問題 1.2 問題 P の任意の最適解 $x \in S$ を考える．このとき，任意の近傍関数 $N: S \rightarrow 2^S$ に対して， x は N に関する P の局所最適解であることを証明せよ．

補足問題 1.3 問題 P の 2 つの最適解 $x_1, x_2 \in S$ に対して， $f(x_1) = f(x_2)$ が成り立つことを証明せよ．

追加問題 1.4 $n \times n$ 行列を入力とする巡回セールスマン問題において，許容解の数はいくつ？ 理由も述べよ．(注意：理由によって，許容解の数が異なる可能性がある．)

追加問題 1.5 5 個のジョブ，2 台の機械を入力に持つ最終完了時刻最小化スケジューリング問題において，許容解の数はいくつ？ 理由も述べよ．(注意：理由によって，許容解の数が異なる可能性がある．)

追加問題 1.6 5 個のジョブ，2 台の機械を入力に持つ完了時刻和最小化スケジューリング問題において，許容解の数はいくつ？ 理由も述べよ．(注意：理由によって，許容解の数が異なる可能性がある．)

追加問題 1.7 頂点数 n の無向グラフを入力とするグラフ等分割問題において，許容解の数はいくつ？ 理由も述べよ．ただし， n は偶数であるとする．(注意：理由によって，許容解の数が異なる可能性がある．)

追加問題 1.8 離散最適化問題 P に対して，2 つの近傍関数 $N_1: S \rightarrow 2^S$ と $N_2: S \rightarrow 2^S$ を考える．任意の $x \in S$ に対して $N_1(x) \subseteq N_2(x)$ が成り立つと仮定する．このとき， N_2 に関する局所最適解は N_1 に関する局所最適解でもあることを証明せよ．

追加問題 1.9 局所探索法における反復継続条件「ある $x' \in N(x)$ が存在して， $f(x') < f(x)$ 」を変更して「ある $x' \in N(x)$ が存在して， $f(x') \leq f(x)$ 」とすると，不都合が起きる．どのような不都合がなぜ起きるのか，説明せよ．