離散最適化基礎論 **2014 年 2 月 14 日**
期末試験 **岡本 吉央**

14:40〜16:10. A4 用紙 (両面自筆書き込み) のみ持ち込み可.
携帯電話，タブレット等は**電源を切って**カバンの中にしまうこと.
注意： 解答がどのように導かれるのか，必ず書き下すこと．記法は講義のものに従う.
採点が終了したら，授業のウェブページにて告知する．採点結果を知りたい場合は，その後で，岡本の居室 (西 4-206) まで問合せを.
(メールや電話では答えられないので注意．)

問題中に出現する「離散最適化問題 P」とは,

$$\begin{array}{ll} \text{最小化} & f(x) \\ \text{条　件} & x \in S \end{array}$$

という最適化問題を指すこととする．ここで，S は空ではない有限集合であり，$f\colon S \to \mathbb{R}$ は目的関数である.

問題 1． 離散最適化問題 P に対して，2 つの近傍関数 $N_1\colon S \to 2^S$ と $N_2\colon S \to 2^S$ を考える．任意の $x \in S$ に対して $N_1(x) \subseteq N_2(x)$ が成り立つと仮定する．このとき，N_2 に関する局所最適解は N_1 に関する局所最適解でもあることを証明せよ.

問題 2． 任意の離散最適化問題 P に対して，厳密近傍関数が存在することを証明せよ.

問題 3． 都市数 n の巡回セールスマン問題を考える．ただし，都市 i と j の間の距離は $c(i,j)$ で与えられるとする．以下の問いに答えよ.

1. $2 \le i < j \le n$ を満たす都市 i と j に対して，都市 $\{1,\dots,j\}$ をちょうど一度ずつ訪問する経路の中で，次を満たすものの最短長を $D(i,j)$ で表す.
    - i から始まり j で終わる.
    - i から 1 まで，都市の番号が小さくなるように進む.
    - 1 から j まで，都市の番号が大きくなるように進む.

    このとき，ピラミッド型巡回路の最短長が $D(n-1,n)+c(n-1,n)$ で表されることを証明せよ.

2. 次の再帰式が成り立つことを証明せよ．$2 \le i < j \le n$ を満たす任意の都市 i と j に対して,

$$D(i,j) = \begin{cases} c(1,2)+c(1,3) & (i=2,\ j=3 \text{ のとき}) \\ D(i,j-1)+c(j-1,j) & (i+1<j \text{ のとき}) \\ \min_{k<i}\{D(k,i)+c(k,j)\} & (i+1=j \text{ のとき}). \end{cases}$$

問題 4． 3 台の機械を入力に持つ最終完了時刻最小化スケジューリング問題を考える．このとき，移動近傍に関する局所探索法の近似比が 3/2 以上となる入力を構成せよ.

問題 5． 自然数 $n \ge 1$ に対して，次のような許容集合 S と目的関数 f を持つ離散最適化問題 P を考える.

- $S = \{1,\dots,n\}$.
- 任意の $x \in S$ に対して，$f(x) = x$.

近傍関数 $N\colon S \to 2^S$ を，任意の $x \in S$ に対して

$$N(x) = \begin{cases} \{1\} & (x = 1 \text{ のとき}), \\ \{1, x-1, x\} & (x \ne 1 \text{ のとき}) \end{cases}$$

であると定義し，N に関する局所最適解を計算するための局所探索法を考える.

1. 即時移動による最悪反復回数を定めよ.
2. 最良移動による最悪反復回数を定めよ.

問題 6． 2 つの局所最適化問題 Π_{loc}, Π'_{loc} を考える．問題 Π_{loc} から Π'_{loc} への PLS 帰着が存在し，Π'_{loc} が多項式時間で解けると仮定する．このとき，Π_{loc} も多項式時間で解けることを証明せよ.

以上