

数理解析 第 14 回
連結性

岡本 吉央
okamotoy@uec.ac.jp

電気通信大学

2014 年 1 月 14 日

最終更新：2014 年 1 月 20 日 15:44

スケジュール 後半 (予定)

8	グラフにおける次数	(11/19)
9	道と閉路	(11/26)
10	木	(12/3)
11	マッチング	(12/10)
*	山本野人先生担当分の試験	(12/17)
*	講義のない日	(12/24)
*	冬季休業	(12/31)
12	二部グラフのマッチング	(1/7)
13	彩色	(1/14)
14	連結性	(1/21)
*	休み	(1/28)
*	期末試験	(2/18)

2月18日(火) 10:40-12:10 @ 西6-201

▶ 出題形式

- ▶ 演習問題と同じ形式の問題を4題出題する
- ▶ その中の3題は演習問題として提示されたものと同じである
- ▶ 全問に解答する

▶ 配点：1題30点満点，計120点満点

▶ 成績において，100点以上は100点で打ち切り

- ▶ 科目全体の成績は山本野人先生担当分と総合して判定

▶ 時間：90分

▶ 持ち込み：A4用紙1枚分(裏表自筆書き込み)のみ可

レポート提出期限：1/28(火) 16:30

- ▶ 提出法：私に手渡し，あるいは，
西4号館4階事務室前レポートBOX(「岡本」)

- ▶ 返却法：講義webページにて掲示

今日の目標

グラフの連結性に関する概念を理解する

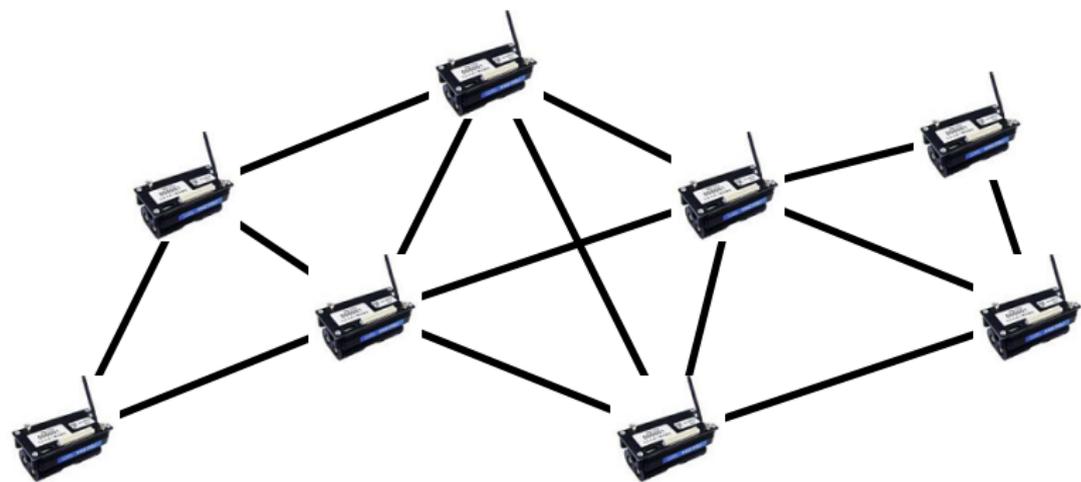
- ▶ 局所連結度と大域連結度
- ▶ 連結度と次数の関係
- ▶ 弱双対性

センサネットワークにおける通信



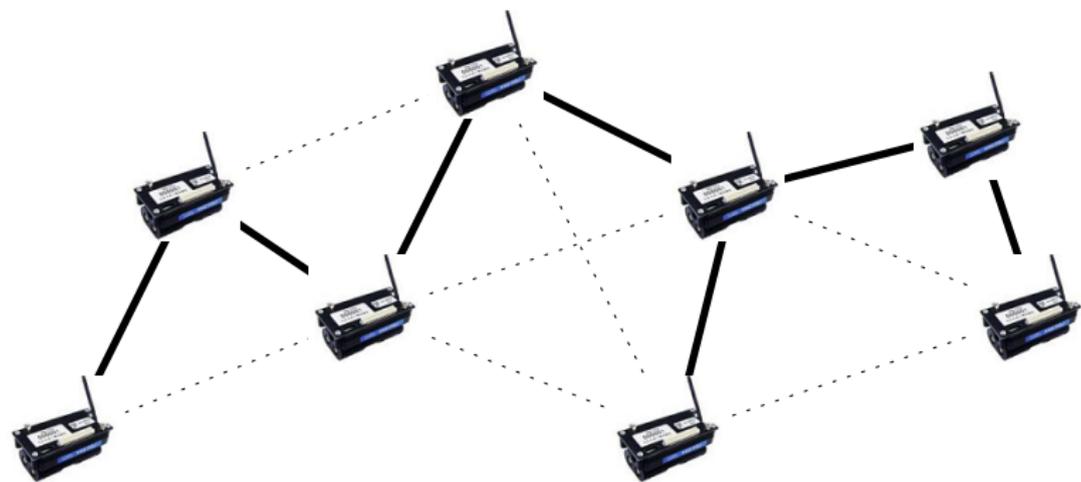
<http://www.ipros.jp/product/detail/153568008/>

センサネットワークにおける通信



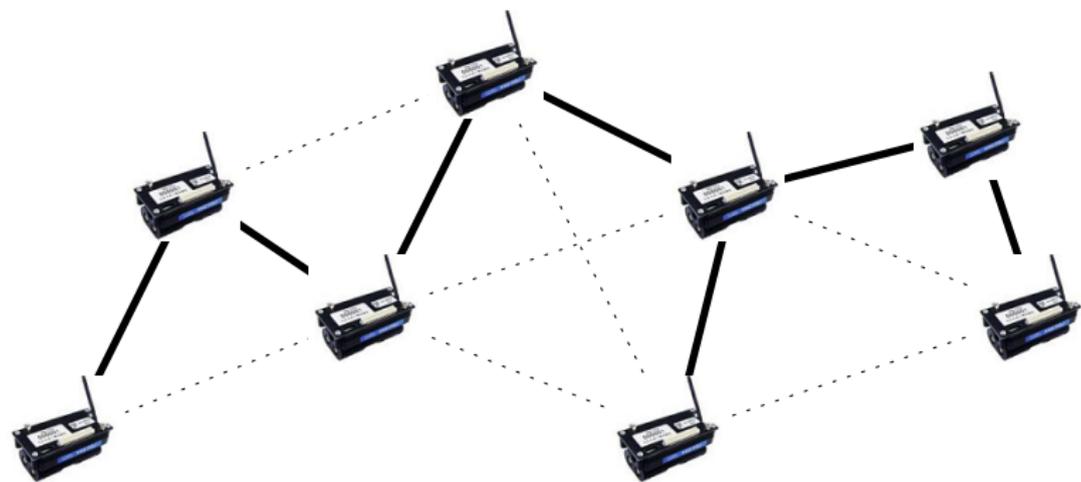
<http://www.ipros.jp/product/detail/153568008/>

センサネットワークにおける通信



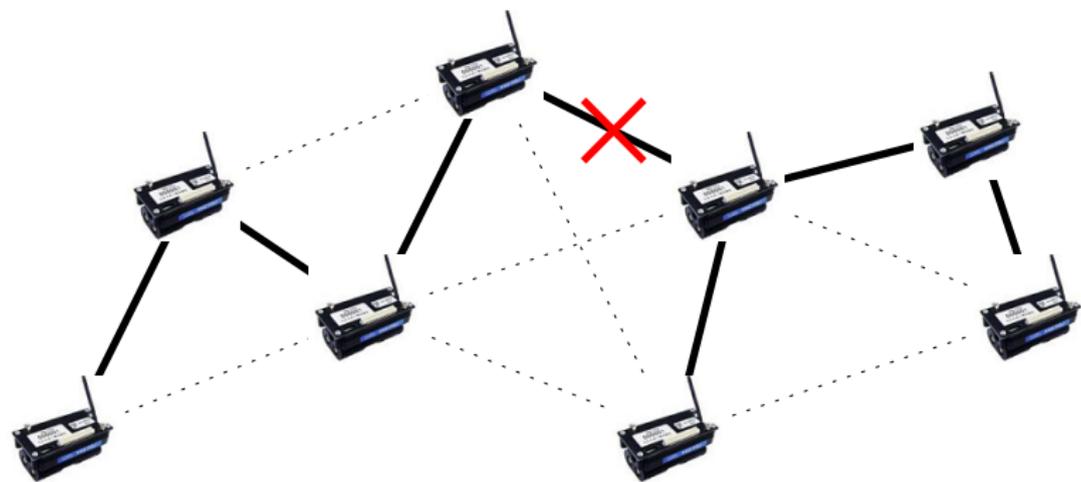
<http://www.ipros.jp/product/detail/153568008/>

センサネットワークにおける通信：リンク故障



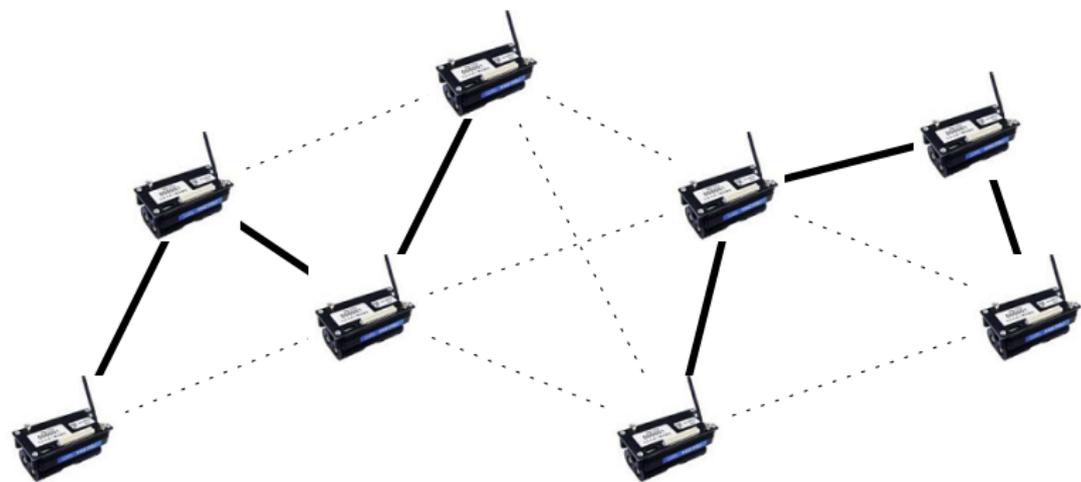
<http://www.ipros.jp/product/detail/153568008/>

センサネットワークにおける通信：リンク故障



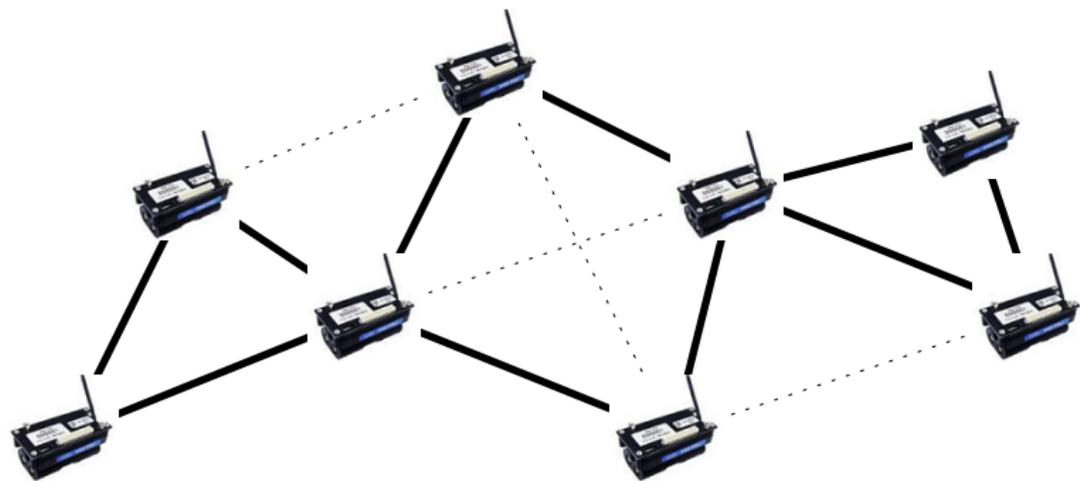
<http://www.ipros.jp/product/detail/153568008/>

センサネットワークにおける通信：リンク故障



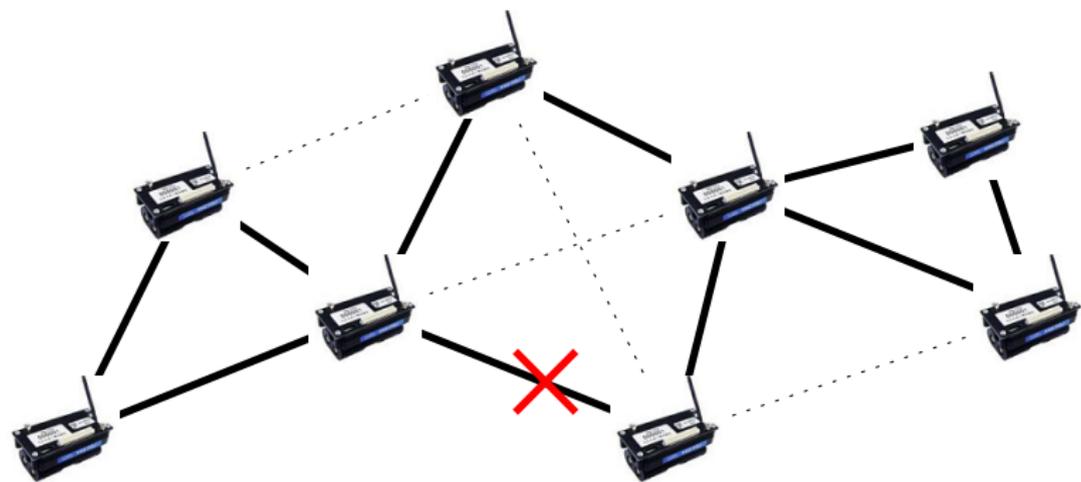
<http://www.ipros.jp/product/detail/153568008/>

センサネットワークにおける通信：リンク故障



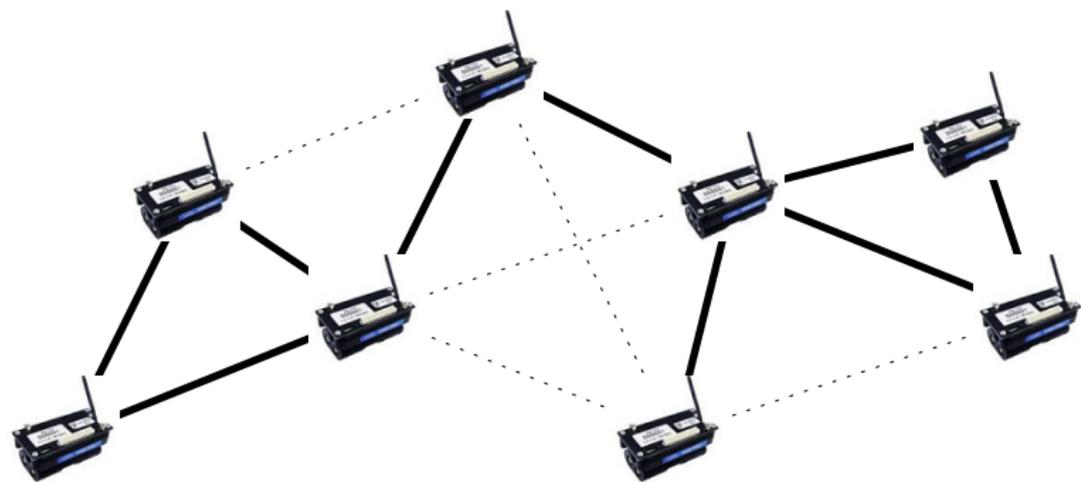
<http://www.ipros.jp/product/detail/153568008/>

センサネットワークにおける通信：リンク故障



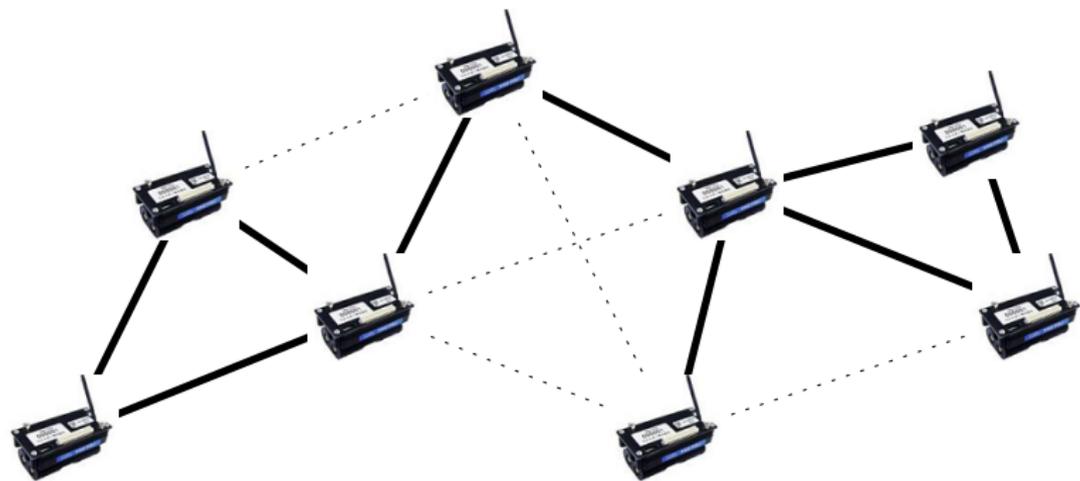
<http://www.ipros.jp/product/detail/153568008/>

センサネットワークにおける通信：リンク故障



<http://www.ipros.jp/product/detail/153568008/>

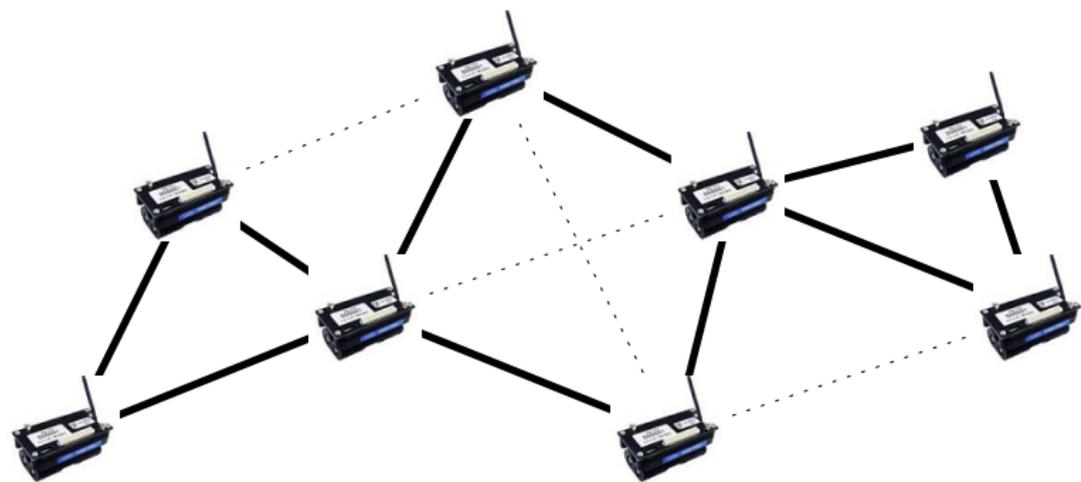
センサネットワークにおける通信：リンク故障



<http://www.ipros.jp/product/detail/153568008/>

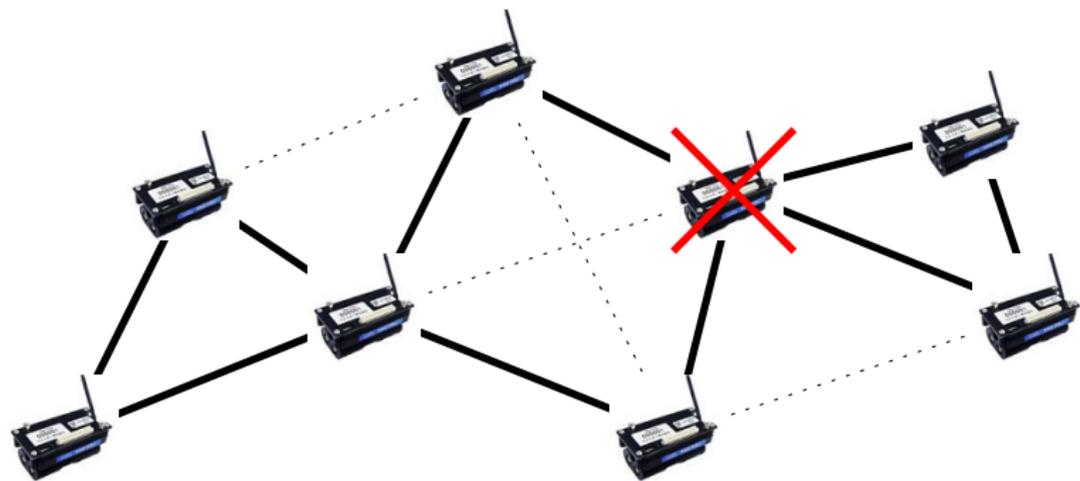
⇒ 辺連結度：リンク故障への耐性を表す数

センサネットワークにおける通信：ノード故障



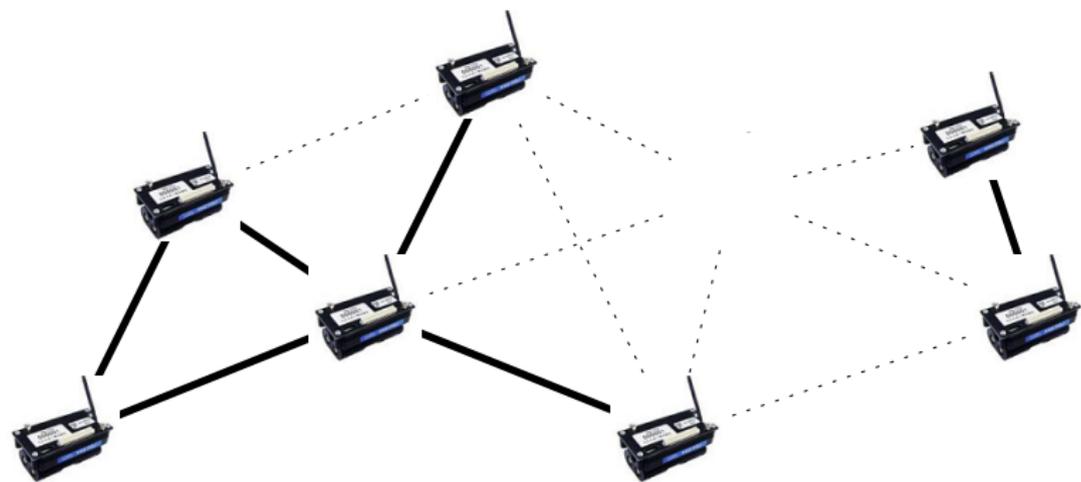
<http://www.ipros.jp/product/detail/153568008/>

センサネットワークにおける通信：ノード故障



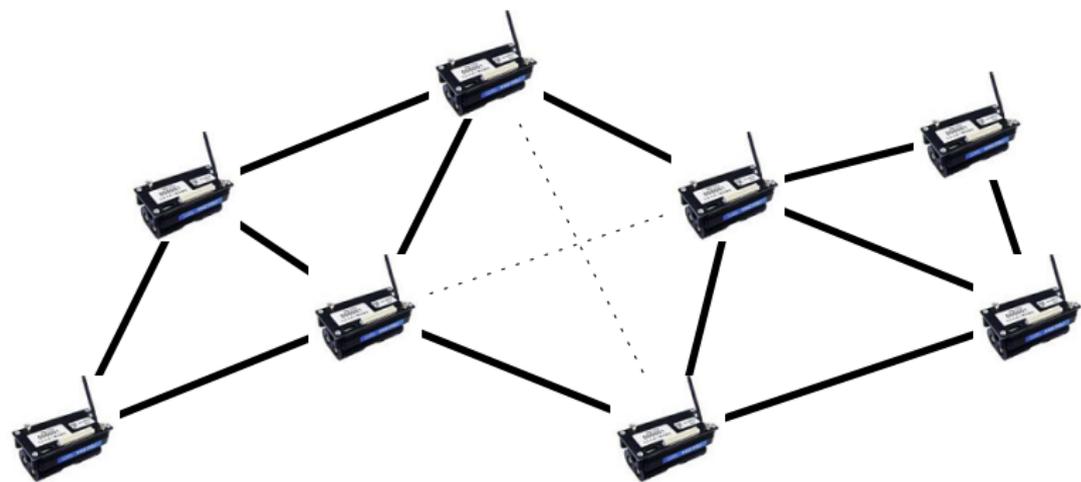
<http://www.ipros.jp/product/detail/153568008/>

センサネットワークにおける通信：ノード故障



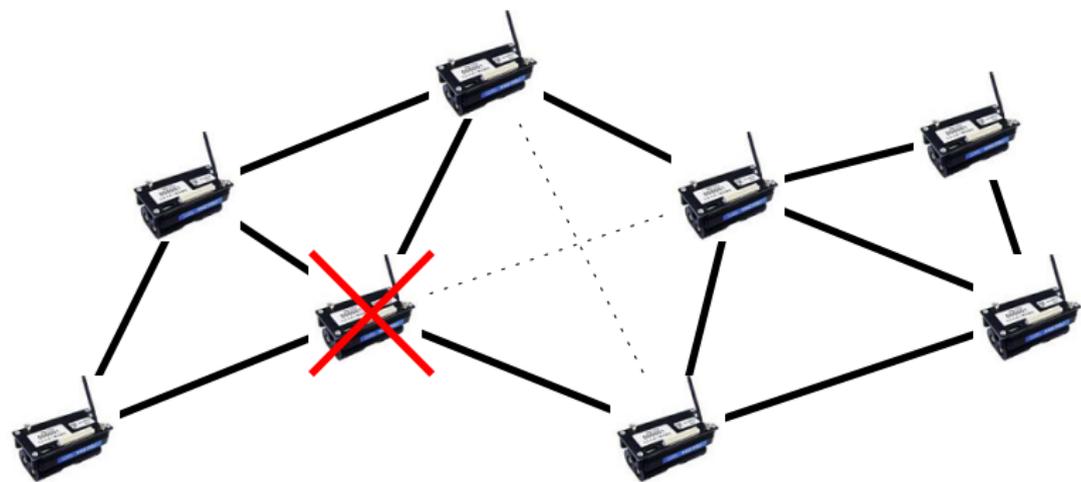
<http://www.ipros.jp/product/detail/153568008/>

センサネットワークにおける通信：ノード故障



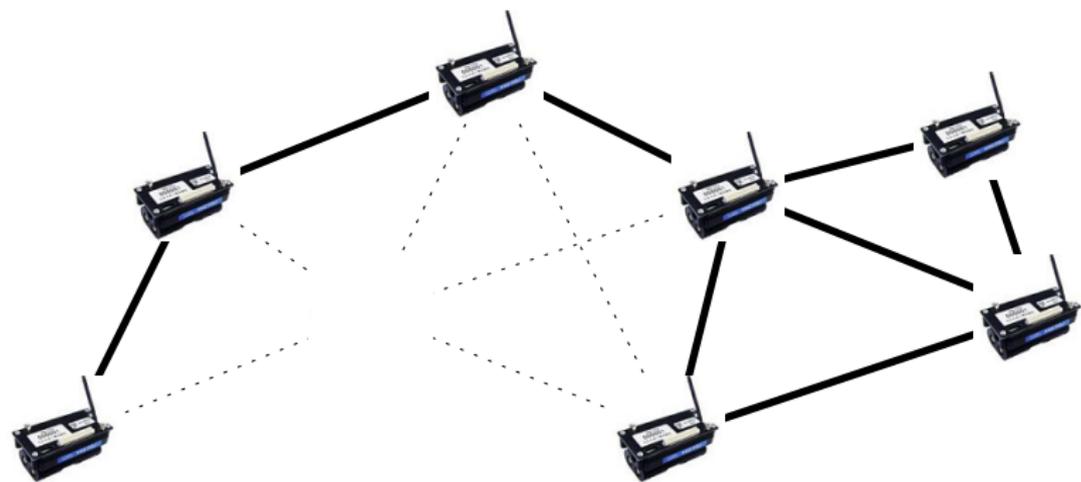
<http://www.ipros.jp/product/detail/153568008/>

センサネットワークにおける通信：ノード故障



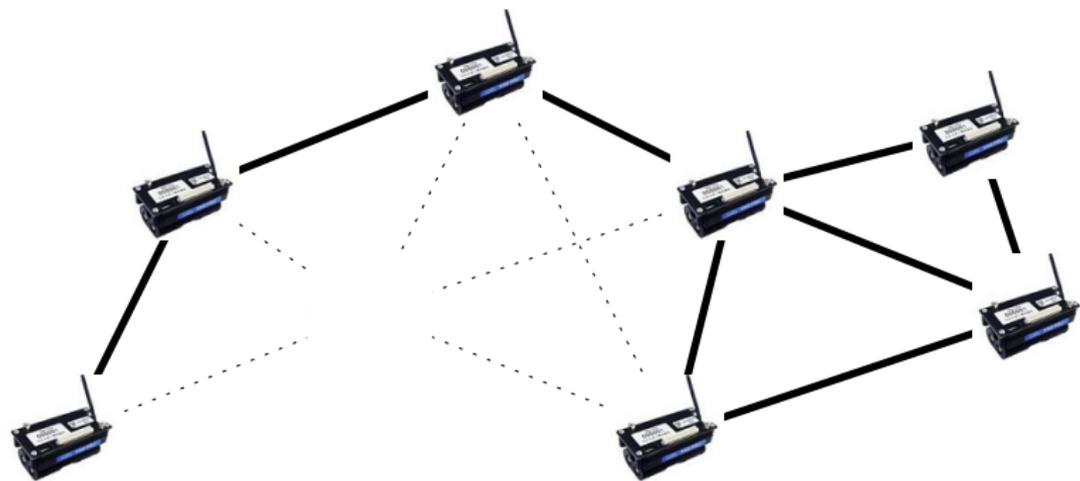
<http://www.ipros.jp/product/detail/153568008/>

センサネットワークにおける通信：ノード故障



<http://www.ipros.jp/product/detail/153568008/>

センサネットワークにおける通信：ノード故障



<http://www.ipros.jp/product/detail/153568008/>

⇒ 点連結度：ノード故障への耐性を表す数

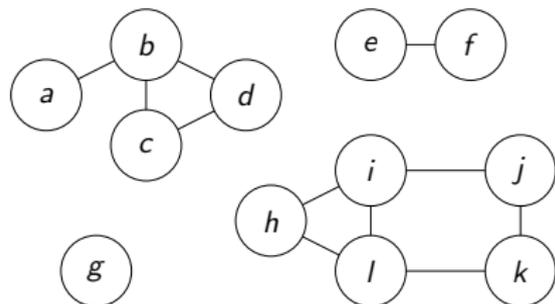
グラフの連結性 (復習)

無向グラフ $G = (V, E)$

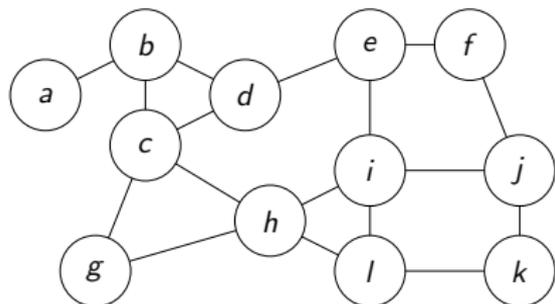
グラフが連結であるとは？

G が**連結**であるとは、
任意の2頂点 $u, v \in V$ に対して、 u から v へ至る道が存在すること

連結ではないグラフは**非連結**と呼ばれる



非連結グラフ



連結グラフ

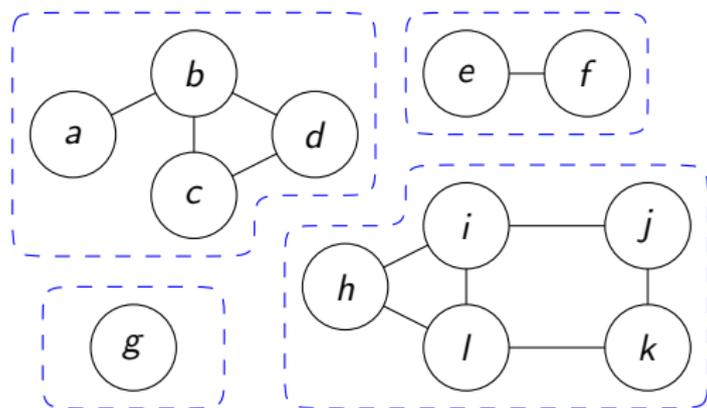
注：「グラフが連結している」とは言わない

グラフの連結成分 (復習)

無向グラフ $G = (V, E)$

グラフの連結成分とは？

G の連結成分とは、「歩道が存在」という同値関係における同値類 $U \subseteq V$ に対して、 U が誘導する G の部分グラフ



$\{a, b, c, d\}$, $\{e, f\}$, $\{g\}$, $\{h, i, j, k, l\}$ が連結成分を誘導する

グラフの切断辺 (復習)

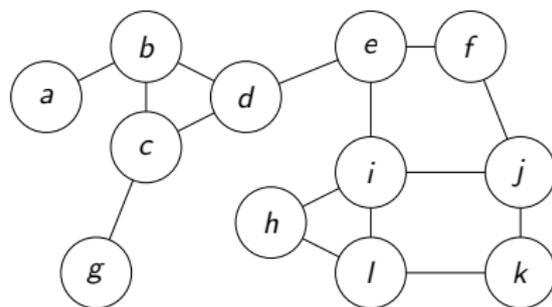
無向グラフ $G = (V, E)$, 辺 $e \in E$

グラフの切断辺とは？

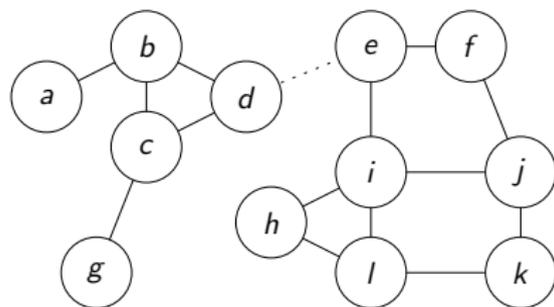
e が G の切断辺であるとは,
 G から e を除去したグラフ $G - e$ に対して次が成り立つこと

$G - e$ の連結成分の数 $>$ G の連結成分の数

$\{d, e\}$ は G の切断辺



G



$G - \{d, e\}$

グラフの切断点 (復習)

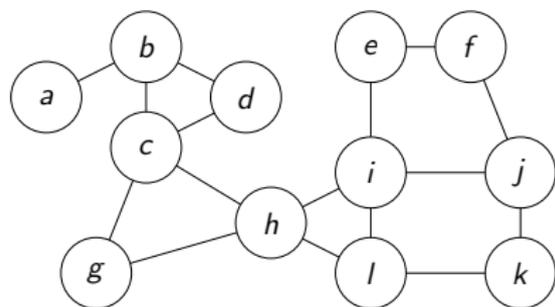
無向グラフ $G = (V, E)$, 頂点 $v \in V$

グラフの切断点とは?

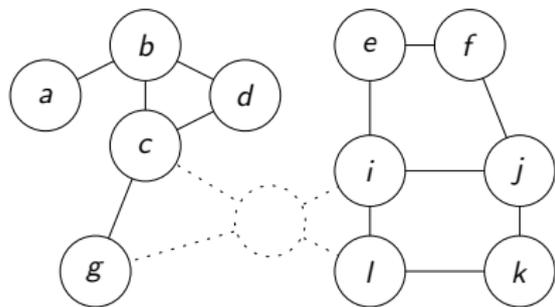
v が G の切断点であるとは,
 G から v を除去したグラフ $G - v$ に対して次が成り立つこと

$G - v$ の連結成分の数 $>$ G の連結成分の数

h は G の切断点 (「 v を除去」とは, v と v に接続する辺すべてを除去すること)



G



$G - h$

目次

- ① グラフの連結性と連結度
 - 無向グラフの辺連結度
 - 無向グラフの点連結度
 - 有向グラフの弧連結度・点連結度
- ② 連結度と次数
- ③ 連結度と互いに素な道の弱双対性
- ④ 今日のまとめと補足

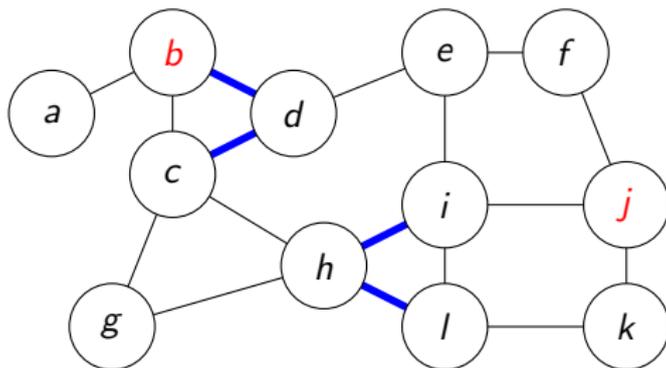
非連結化集合：無向グラフ

無向グラフ $G = (V, E)$, 異なる 2 頂点 $s, t \in V$

非連結化集合とは？

辺部分集合 $F \subseteq E$ が G の s, t 非連結化集合であるとは,
 $G - F$ において, s から t への道が存在しないこと

青い辺から成る集合は b, j 非連結化集合



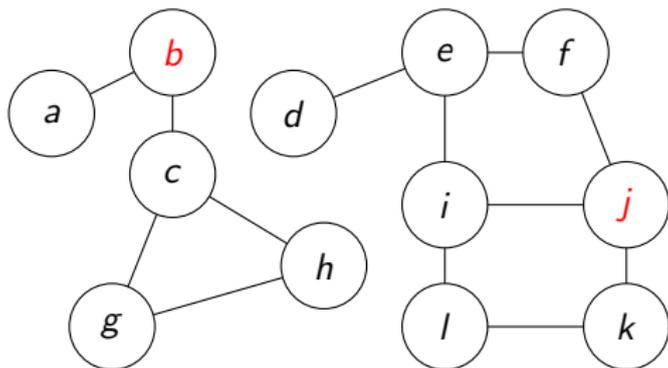
非連結化集合：無向グラフ

無向グラフ $G = (V, E)$, 異なる 2 頂点 $s, t \in V$

非連結化集合とは？

辺部分集合 $F \subseteq E$ が G の s, t 非連結化集合であるとは,
 $G - F$ において, s から t への道が存在しないこと

青い辺から成る集合は b, j 非連結化集合



辺連結度：無向グラフ

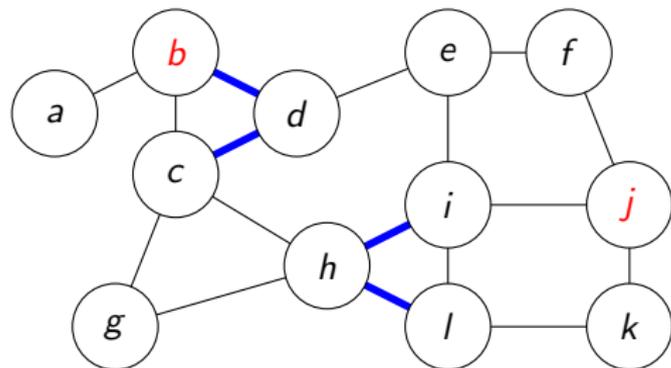
無向グラフ $G = (V, E)$, 異なる 2 頂点 $s, t \in V$

辺連結度とは？

G の s, t 辺連結度とは ,
 G の s, t 非連結化集合の要素数の最小値

$\lambda_{s,t}(G)$ で表す

($\lambda_G(s, t)$, $\lambda(G; s, t)$ と表すこともある)



$$\lambda_{b,j}(G) \leq 4$$

これは局所的，部分的なリンク故障耐性を表す

辺連結度：無向グラフ

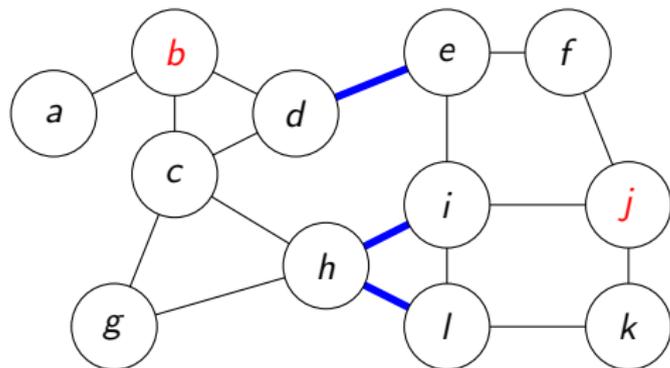
無向グラフ $G = (V, E)$, 異なる 2 頂点 $s, t \in V$

辺連結度とは？

G の s, t 辺連結度とは ,
 G の s, t 非連結化集合の要素数の最小値

$\lambda_{s,t}(G)$ で表す

($\lambda_G(s, t)$, $\lambda(G; s, t)$ と表すこともある)



$$\lambda_{b,j}(G) \leq 3$$

これは局所的，部分的なリンク故障耐性を表す

辺連結度：無向グラフ

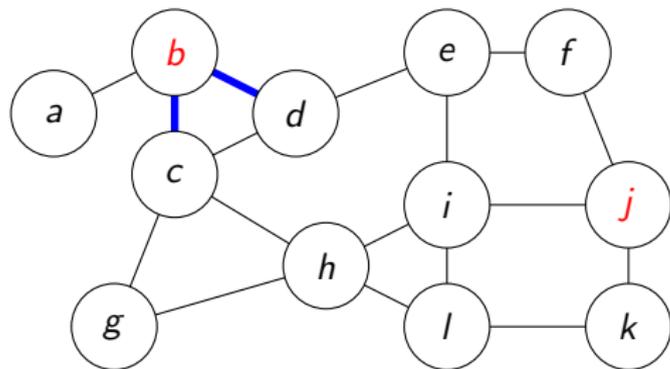
無向グラフ $G = (V, E)$, 異なる 2 頂点 $s, t \in V$

辺連結度とは？

G の s, t 辺連結度とは ,
 G の s, t 非連結化集合の要素数の最小値

$\lambda_{s,t}(G)$ で表す

($\lambda_G(s, t)$, $\lambda(G; s, t)$ と表すこともある)



$$\lambda_{b,j}(G) = 2$$

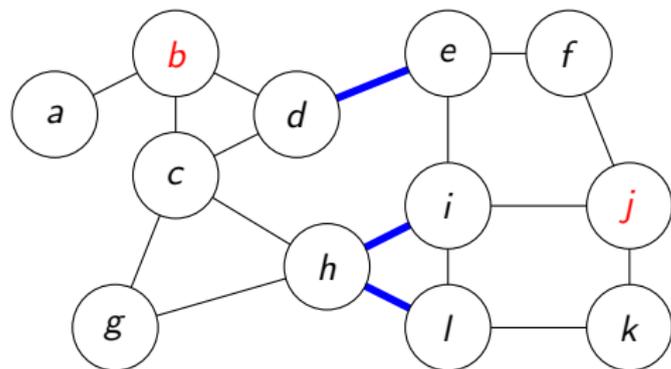
これは局所的，部分的なリンク故障耐性を表す

大域辺連結度：無向グラフ

無向グラフ $G = (V, E)$

大域辺連結度とは？

G の大域辺連結度とは， $\lambda(G) = \min\{\lambda_{s,t}(G) \mid s, t \in V, s \neq t\}$
つまり， s, t 辺連結度の $(s, t$ の選び方に関する) 最小値



$$\lambda(G) \leq \lambda_{b,j}(G) = 2$$

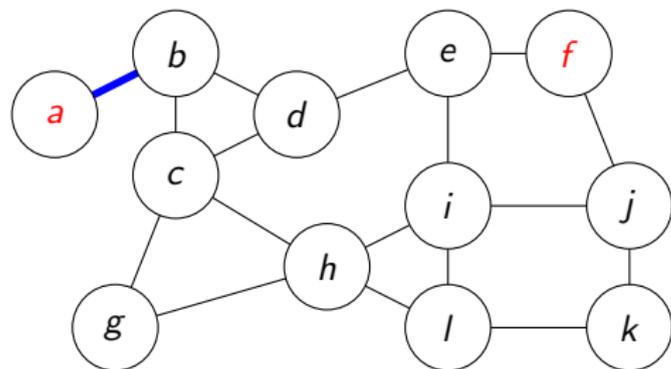
これは大域的，全体的なリンク故障耐性を表す

大域辺連結度：無向グラフ

無向グラフ $G = (V, E)$

大域辺連結度とは？

G の大域辺連結度とは, $\lambda(G) = \min\{\lambda_{s,t}(G) \mid s, t \in V, s \neq t\}$
つまり, s, t 辺連結度の (s, t の選び方に関する) 最小値



$$\lambda(G) = \lambda_{a,f}(G) = 1$$

これは大域的, 全体的なリンク故障耐性を表す

辺連結性：無向グラフ

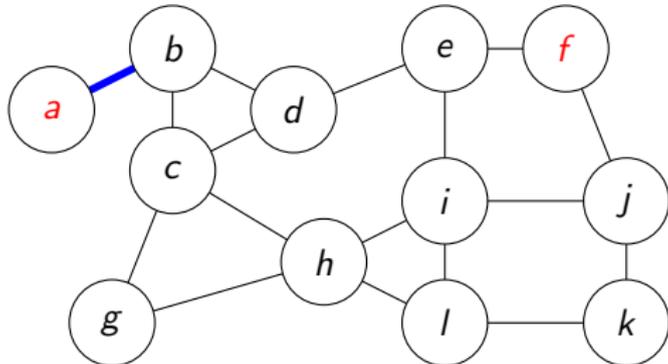
無向グラフ $G = (V, E)$, 自然数 $k \geq 0$

辺連結性とは？

G が k 辺連結であるとは、 $\lambda(G) \geq k$ であること

つまり、要素数 $k-1$ 以下の辺部分集合を除去して G を非連結にできない

このグラフは 1 辺連結であるが、2 辺連結ではない



注： G が連結 $\Leftrightarrow G$ が 1 辺連結

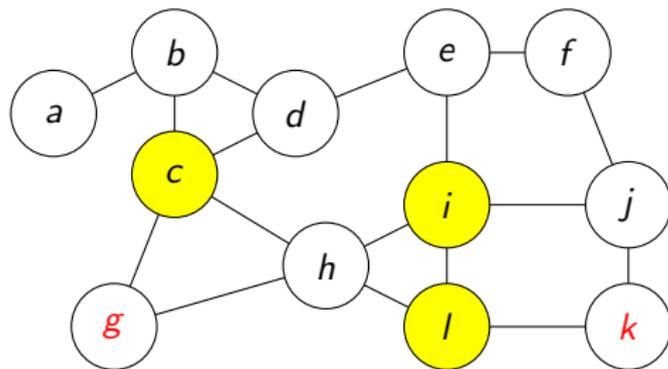
分離集合：無向グラフ

無向グラフ $G = (V, E)$, 異なる 2 頂点 $s, t \in V$ (ただし, $\{s, t\} \notin E$)

分離集合とは？

頂点集合 $S \subseteq V - \{s, t\}$ が G の s, t 分離集合であるとは, $G - S$ において, s から t への道が存在しないこと

黄色の頂点から成る集合は g, k 分離集合



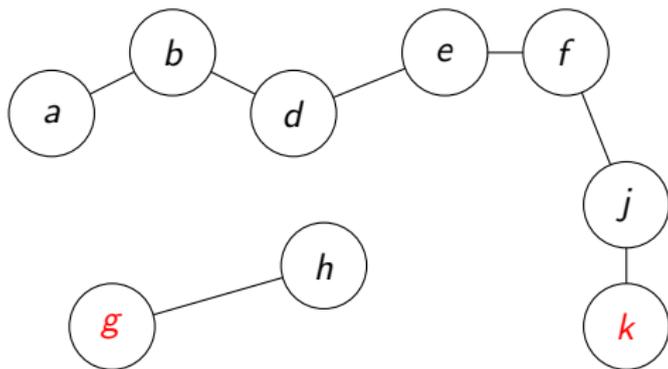
分離集合：無向グラフ

無向グラフ $G = (V, E)$, 異なる 2 頂点 $s, t \in V$ (ただし, $\{s, t\} \notin E$)

分離集合とは？

頂点集合 $S \subseteq V - \{s, t\}$ が G の s, t 分離集合であるとは,
 $G - S$ において, s から t への道が存在しないこと

黄色の頂点から成る集合は g, k 分離集合



点連結度：無向グラフ

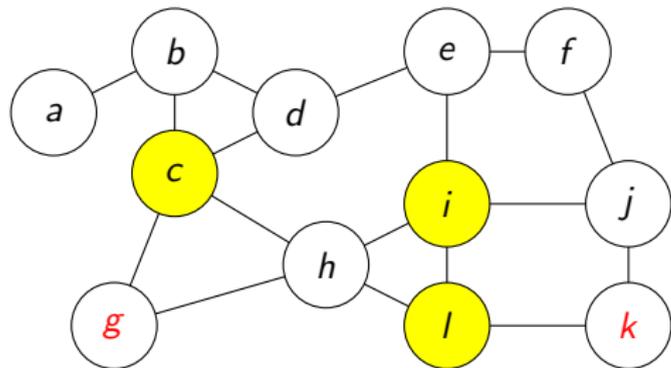
無向グラフ $G = (V, E)$, 異なる 2 頂点 $s, t \in V$ (ただし, $\{s, t\} \notin E$)

点連結度とは？

G の s, t 点連結度とは,
 G の s, t 分離集合の要素数の最小値

$\kappa_{s,t}(G)$ で表す

($\kappa_G(s, t)$, $\kappa(G; s, t)$ と表すこともある)



$$\kappa_{g,k}(G) \leq 3$$

これは局所的，部分的なノード故障耐性を表す

点連結度：無向グラフ

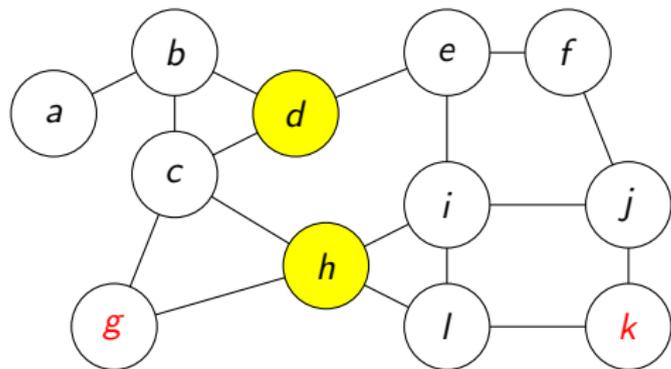
無向グラフ $G = (V, E)$, 異なる 2 頂点 $s, t \in V$ (ただし, $\{s, t\} \notin E$)

点連結度とは？

G の s, t 点連結度とは,
 G の s, t 分離集合の要素数の最小値

$\kappa_{s,t}(G)$ で表す

($\kappa_G(s, t)$, $\kappa(G; s, t)$ と表すこともある)



$$\kappa_{g,k}(G) = 2$$

これは局所的，部分的なノード故障耐性を表す

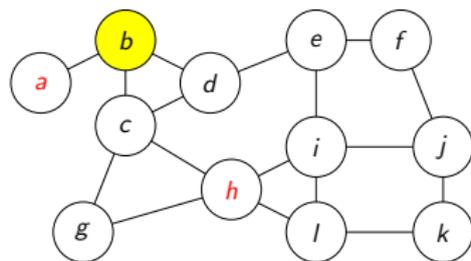
大域点連結度：無向グラフ

無向グラフ $G = (V, E)$

大域点連結度とは？

 G の大域点連結度とは， G が完全グラフではない場合

$$\kappa(G) = \min\{\kappa_{s,t}(G) \mid s, t \in V, s \neq t, \{s, t\} \notin E\}$$

つまり， s, t 点連結度の (s, t の選び方に関する) 最小値頂点数 n の完全グラフ K_n に対して， $\kappa(K_n) = n - 1$ と定義する

これは大域的，全体的なノード故障耐性を表す

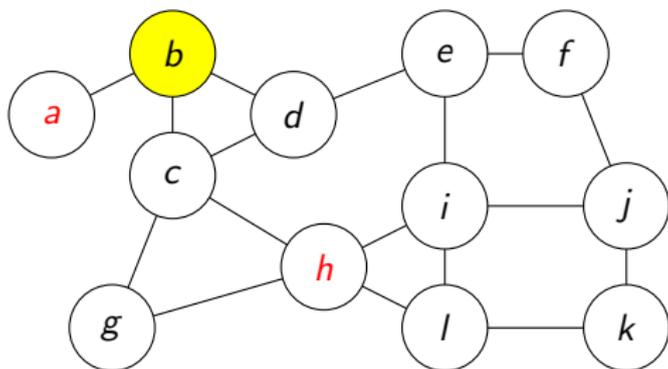
点連結性：無向グラフ

無向グラフ $G = (V, E)$, 自然数 $k \geq 0$

点連結性とは？

G が k 点連結であるとは、 $\kappa(G) \geq k$ であること
つまり、要素数 $k-1$ 以下の頂点部分集合を除去しても G は連結

このグラフは1点連結であるが、2点連結ではない



注： G が連結 $\Leftrightarrow G$ が1点連結

用語の対応：無向グラフ

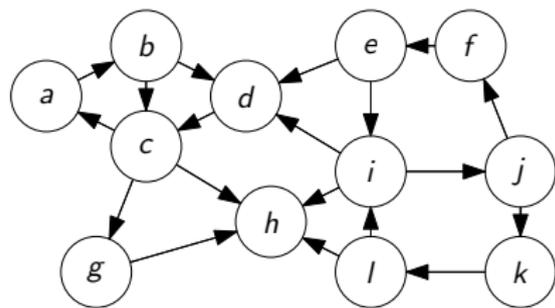
辺	頂点
s, t 非連結化集合	s, t 分離集合
s, t 辺連結度	s, t 点連結度
$\lambda_{s,t}(G)$	$\kappa_{s,t}(G)$
大域辺連結度	大域点連結度
$\lambda(G)$	$\kappa(G)$
k 辺連結	k 点連結

有向グラフの強連結性

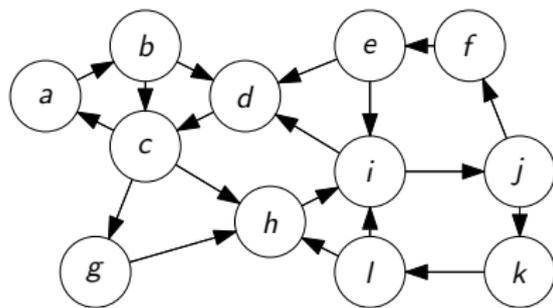
有向グラフ $G = (V, A)$

有向グラフが強連結であるとは？

G が強連結であるとは、
 任意の2頂点 $u, v \in V$ に対して、 u から v へ至る有向道が存在すること



強連結でない



強連結である

注：「グラフが強連結している」とは言わない

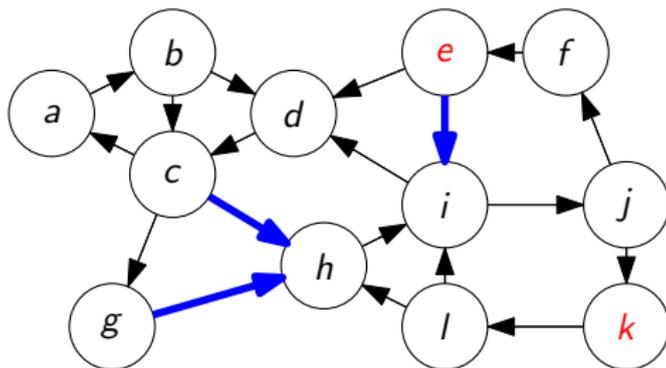
非連結化集合：有向グラフ

有向グラフ $G = (V, A)$, 異なる 2 頂点 $s, t \in V$

非連結化集合とは？

弧部分集合 $F \subseteq A$ が G の s, t 非連結化集合であるとは,
 $G - F$ において, s から t への有向道が存在しないこと

青い弧から成る集合は e, k 非連結化集合



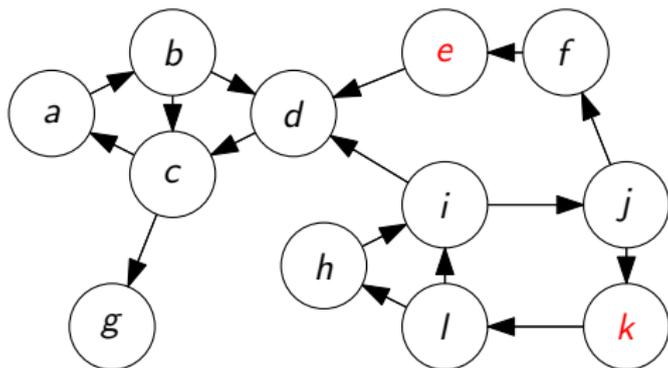
非連結化集合：有向グラフ

有向グラフ $G = (V, A)$, 異なる 2 頂点 $s, t \in V$

非連結化集合とは？

弧部分集合 $F \subseteq A$ が G の s, t 非連結化集合であるとは,
 $G - F$ において, s から t への有向道が存在しないこと

青い弧から成る集合は e, k 非連結化集合



弧連結度：有向グラフ

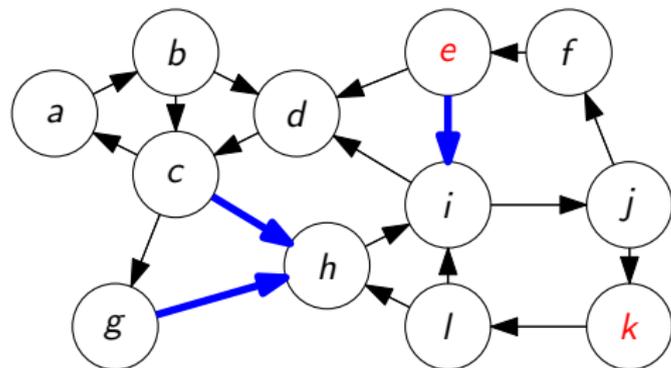
有向グラフ $G = (V, A)$, 異なる 2 頂点 $s, t \in V$

弧連結度とは？

G の s, t 弧連結度とは ,
 G の s, t 非連結化集合の要素数の最小値

$\lambda_{s,t}(G)$ で表す

($\lambda_G(s, t)$, $\lambda(G; s, t)$ と表すこともある)



$$\lambda_{e,k}(G) \leq 3$$

これは局所的，部分的なリンク故障耐性を表す

弧連結度：有向グラフ

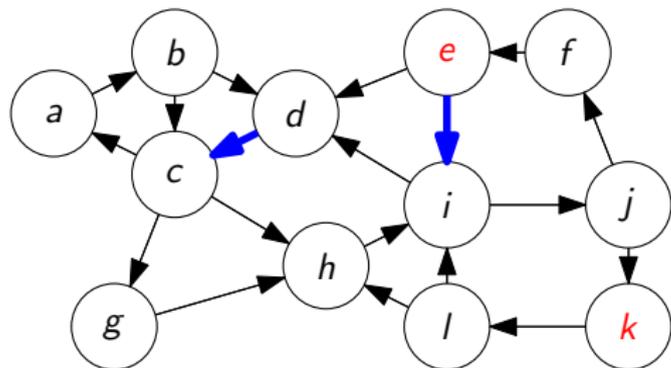
有向グラフ $G = (V, A)$, 異なる 2 頂点 $s, t \in V$

弧連結度とは？

G の s, t 弧連結度とは ,
 G の s, t 非連結化集合の要素数の最小値

$\lambda_{s,t}(G)$ で表す

($\lambda_G(s, t)$, $\lambda(G; s, t)$ と表すこともある)



$$\lambda_{e,k}(G) \leq 2$$

これは局所的，部分的なリンク故障耐性を表す

弧連結度：有向グラフ

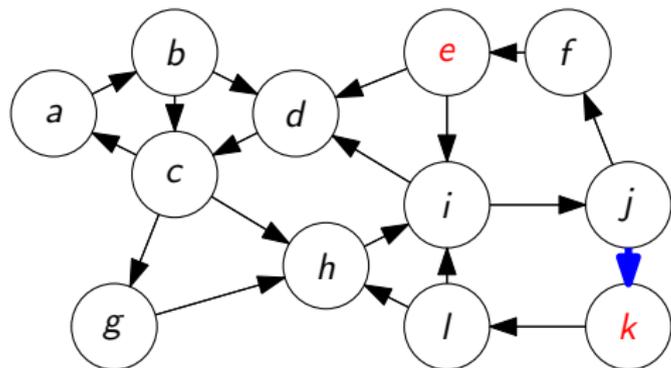
有向グラフ $G = (V, A)$, 異なる 2 頂点 $s, t \in V$

弧連結度とは？

G の s, t 弧連結度とは ,
 G の s, t 非連結化集合の要素数の最小値

$\lambda_{s,t}(G)$ で表す

($\lambda_G(s, t)$, $\lambda(G; s, t)$ と表すこともある)



$$\lambda_{e,k}(G) = 1$$

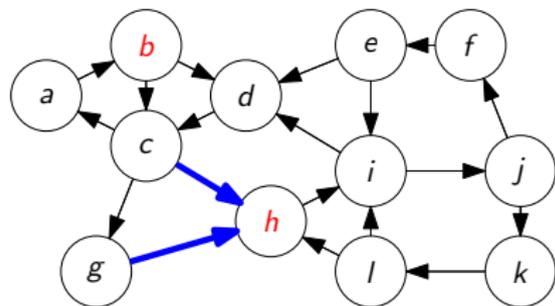
これは局所的，部分的なリンク故障耐性を表す

弧連結度：有向グラフ (注意)

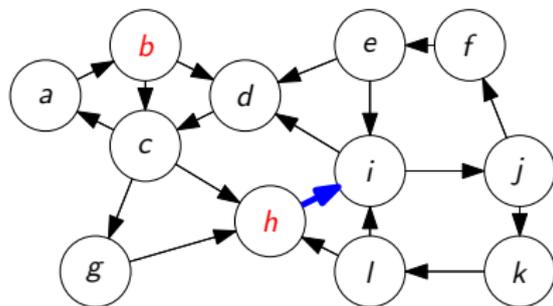
有向グラフ $G = (V, A)$, 異なる 2 頂点 $s, t \in V$

注意

$\lambda_{s,t}(G) \neq \lambda_{t,s}(G)$ かもしれない



$$\lambda_{b,h}(G) = 2$$



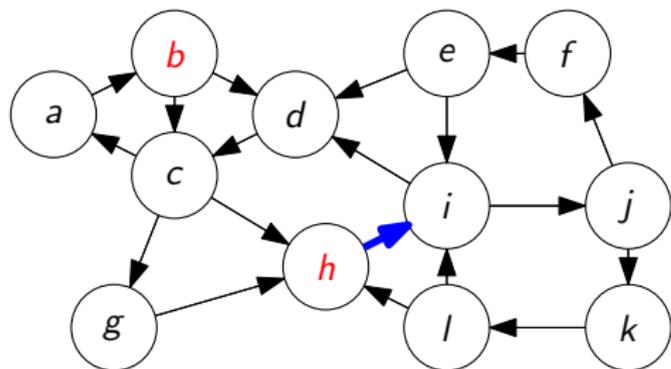
$$\lambda_{h,b}(G) = 1$$

大域弧連結度：有向グラフ

有向グラフ $G = (V, A)$

大域弧連結度とは？

G の大域弧連結度とは， $\lambda(G) = \min\{\lambda_{s,t}(G) \mid s, t \in V, s \neq t\}$
つまり， s, t 弧連結度の $(s, t$ の選び方に関する) 最小値



$$\lambda(G) = 1$$

これは大域的，全体的なリンク故障耐性を表す

弧連結性：有向グラフ

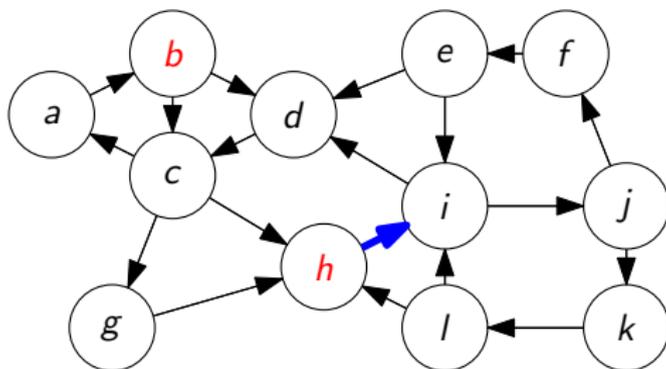
有向グラフ $G = (V, A)$, 自然数 $k \geq 0$

弧連結性とは？

G が k 弧連結であるとは, $\lambda(G) \geq k$ であること

つまり, 要素数 $k-1$ 以下の弧部分集合をどう除去しても G は強連結

このグラフは 1 弧連結であるが, 2 弧連結ではない



注： G が強連結 $\Leftrightarrow G$ が 1 弧連結

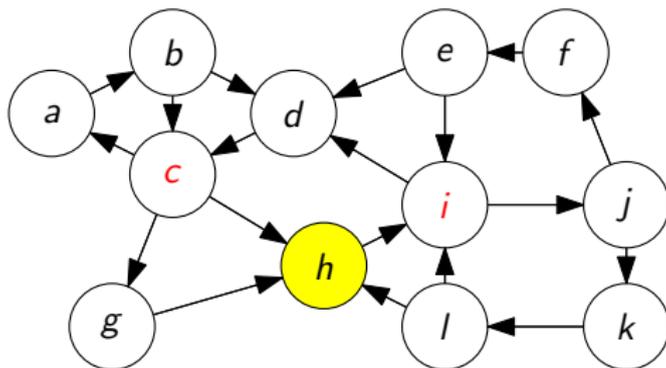
分離集合：有向グラフ

有向グラフ $G = (V, A)$, 異なる 2 頂点 $s, t \in V$ (ただし, $(s, t) \notin A$)

分離集合とは？

頂点集合 $S \subseteq V - \{s, t\}$ が G の s, t 分離集合であるとは, $G - S$ において, s から t への有向道が存在しないこと

黄色の頂点から成る集合は c, i 分離集合



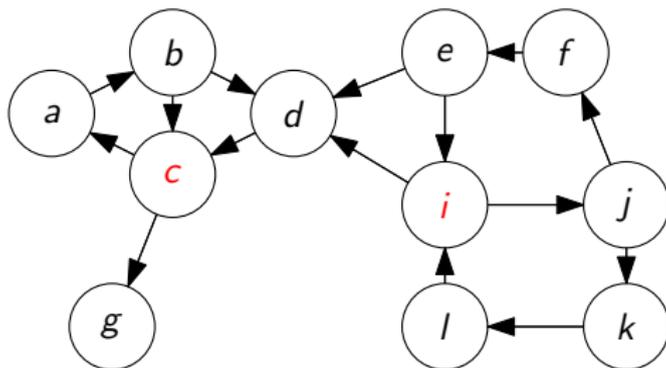
分離集合：有向グラフ

有向グラフ $G = (V, A)$, 異なる 2 頂点 $s, t \in V$ (ただし, $(s, t) \notin A$)

分離集合とは？

頂点集合 $S \subseteq V - \{s, t\}$ が G の s, t 分離集合であるとは, $G - S$ において, s から t への有向道が存在しないこと

黄色の頂点から成る集合は c, i 分離集合



点連結度：有向グラフ

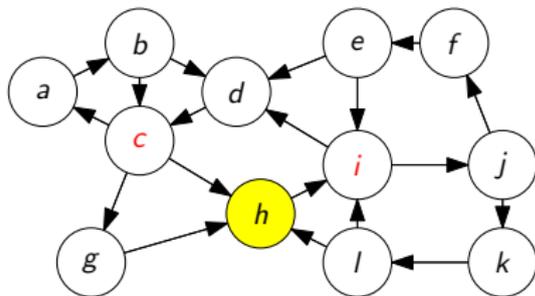
有向グラフ $G = (V, A)$, 異なる 2 頂点 $s, t \in V$ (ただし, $(s, t) \notin A$)

点連結度とは？

G の s, t 点連結度とは,
 G の s, t 分離集合の要素数の最小値

$\kappa_{s,t}(G)$ で表す

($\kappa_G(s, t)$, $\kappa(G; s, t)$ と表すこともある)



$$\kappa_{c,i}(G) = 1$$

これは局所的, 部分的なノード故障耐性を表す

注: $\kappa_{s,t}(G) \neq \kappa_{t,s}(G)$ かもしれない

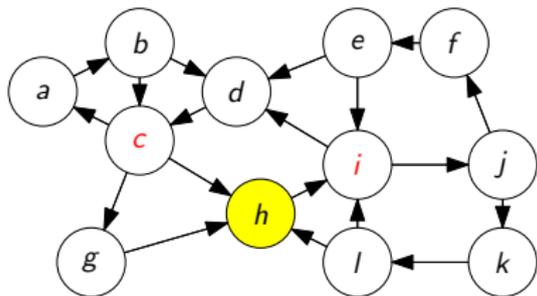
大域点連結度：有向グラフ

有向グラフ $G = (V, A)$

大域点連結度とは？

 G の大域点連結度とは，ある $u, v \in V$ に対して $(u, v) \notin A$ であるとき，

$$\kappa(G) = \min\{\kappa_{s,t}(G) \mid s, t \in V, s \neq t, (s, t) \notin A\}$$

つまり， s, t 点連結度の (s, t) の選び方に関する) 最小値任意の $u, v \in V$ ($u \neq v$) に対して $(u, v) \in A$ であるとき， $\kappa(G) = |V| - 1$ と定義

$$\kappa(G) = 1$$

これは大域的，全体的なノード故障耐性を表す

点連結性：有向グラフ

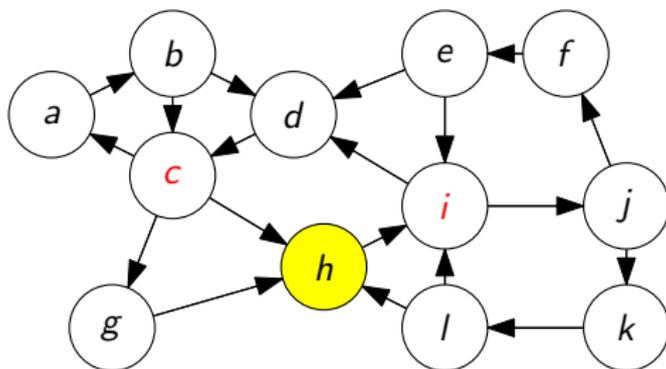
有向グラフ $G = (V, A)$, 自然数 $k \geq 0$

点連結性とは？

G が k 点連結であるとは, $\kappa(G) \geq k$ であること

つまり, 要素数 $k-1$ 以下の頂点部分集合をどう除去しても G は強連結

このグラフは 1 点連結であるが, 2 点連結ではない



注： G が強連結 $\Leftrightarrow G$ が 1 点連結

用語の対応：有向グラフ

弧	頂点
s, t 非連結化集合	s, t 分離集合
s, t 弧連結度	s, t 点連結度
$\lambda_{s,t}(G)$	$\kappa_{s,t}(G)$
大域弧連結度	大域点連結度
$\lambda(G)$	$\kappa(G)$
k 弧連結	k 点連結

目次

- ① グラフの連結性と連結度
 - 無向グラフの辺連結度
 - 無向グラフの点連結度
 - 有向グラフの弧連結度・点連結度
- ② 連結度と次数
- ③ 連結度と互いに素な道の弱双対性
- ④ 今日のまとめと補足

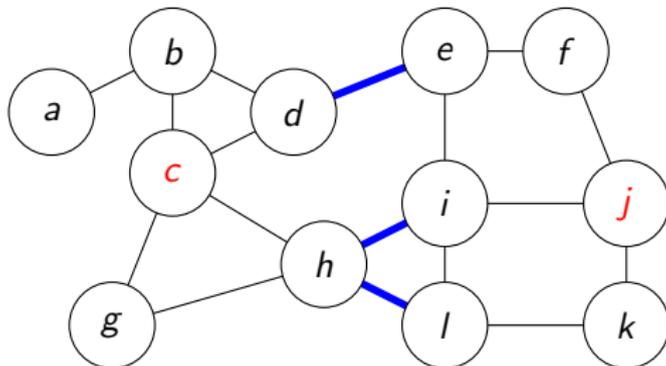
辺連結度と次数の関係

無向グラフ $G = (V, E)$, 異なる2頂点 $s, t \in V$

辺連結度と次数の関係

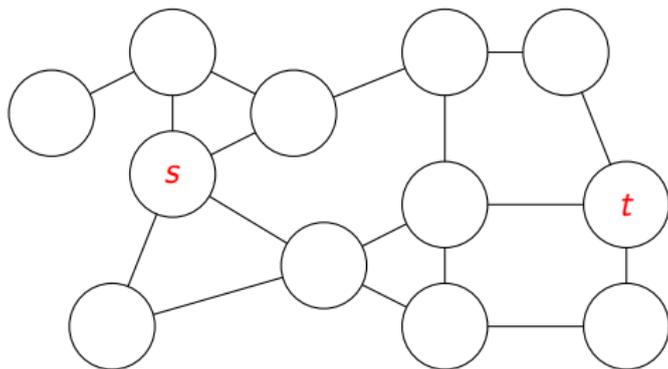
$$\lambda_{s,t}(G) \leq d_G(s)$$

例: $\lambda_{c,j}(G) = 3, d_G(c) = 4$



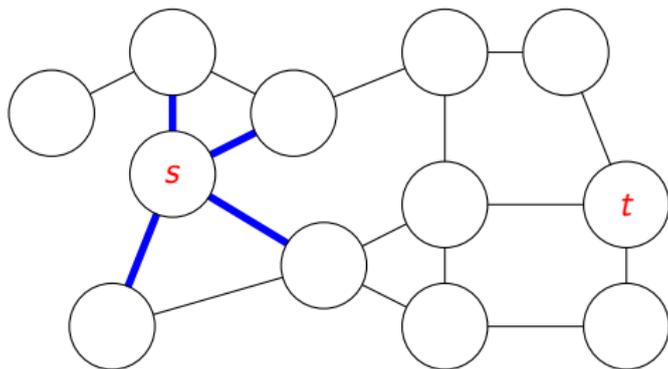
辺連結度と次数の関係：証明

- ▶ s に接続する辺全体から成る集合を F とする (つまり, $|F| = d_G(s)$)



辺連結度と次数の関係：証明

- ▶ s に接続する辺全体から成る集合を F とする (つまり, $|F| = d_G(s)$)

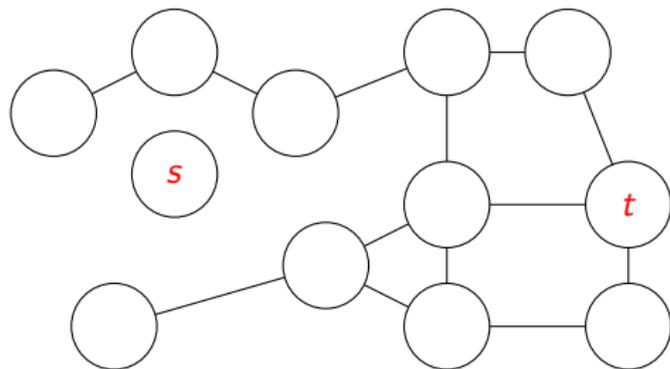


辺連結度と次数の関係：証明

- ▶ s に接続する辺全体から成る集合を F とする (つまり, $|F| = d_G(s)$)
- ▶ このとき, F は s, t 非連結化集合

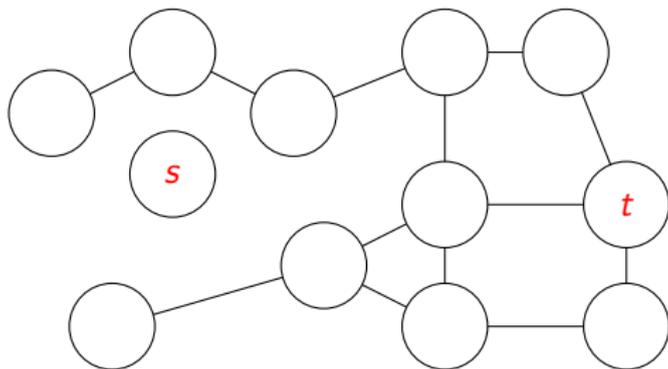
辺連結度と次数の関係：証明

- ▶ s に接続する辺全体から成る集合を F とする (つまり, $|F| = d_G(s)$)
- ▶ このとき, F は s, t 非連結化集合



辺連結度と次数の関係：証明

- ▶ s に接続する辺全体から成る集合を F とする (つまり, $|F| = d_G(s)$)
- ▶ このとき, F は s, t 非連結化集合
- ▶ よって, $\lambda_{s,t}(G) \leq |F| = d_G(s)$ □



点連結度と辺連結度の関係

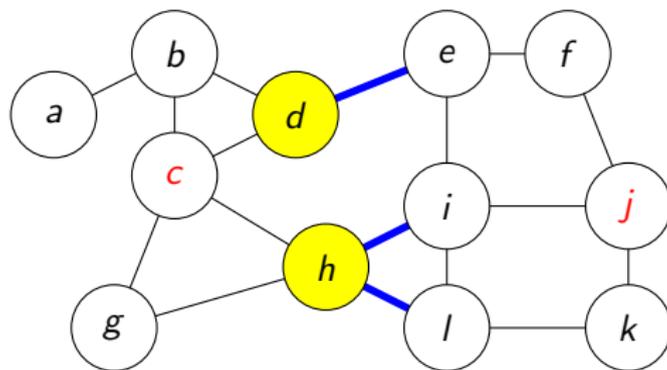
無向グラフ $G = (V, E)$, 異なる 2 頂点 $s, t \in V$, $\{s, t\} \notin E$

点連結度と辺連結度の関係

(Whitney '32)

$$\kappa_{s,t}(G) \leq \lambda_{s,t}(G)$$

例 : $\kappa_{c,j}(G) = 2$, $\lambda_{c,j}(G) = 3$



この証明は $\lambda_{s,t}(G) \leq d_G(s)$ に比べて , 少し複雑

点連結度と辺連結度の関係：証明

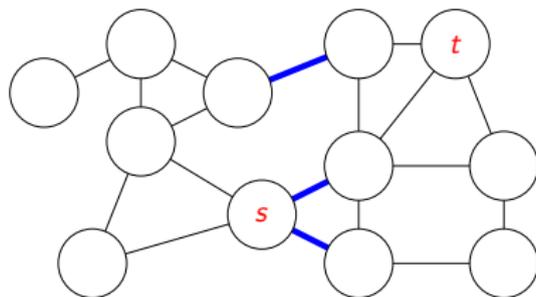
無向グラフ $G = (V, E)$, 異なる 2 頂点 $s, t \in V$, $\{s, t\} \notin E$

点連結度と辺連結度の関係

(Whitney '32)

$$\kappa_{s,t}(G) \leq \lambda_{s,t}(G)$$

証明 : $F \subseteq E$ を G の最小 s, t 非連結化集合とする ($|F| = \lambda_{s,t}(G)$)



点連結度と辺連結度の関係：証明

無向グラフ $G = (V, E)$, 異なる 2 頂点 $s, t \in V$, $\{s, t\} \notin E$

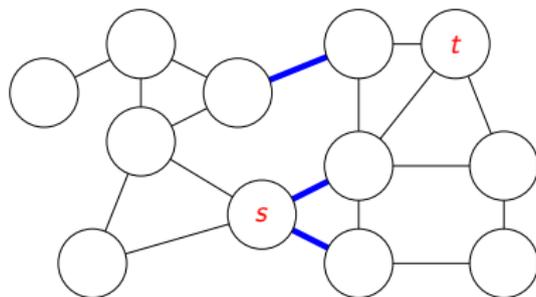
点連結度と辺連結度の関係

(Whitney '32)

$$\kappa_{s,t}(G) \leq \lambda_{s,t}(G)$$

証明 : $F \subseteq E$ を G の最小 s, t 非連結化集合とする ($|F| = \lambda_{s,t}(G)$)

- ▶ F の各辺 e に対して , その 1 端点を次の規則で選ぶ
 - ▶ e の 1 端点が s か t ならば , それではない方を選ぶ
 - ▶ e の端点が s でも t でもないならば , 任意の 1 端点を選ぶ



点連結度と辺連結度の関係：証明

無向グラフ $G = (V, E)$, 異なる 2 頂点 $s, t \in V$, $\{s, t\} \notin E$

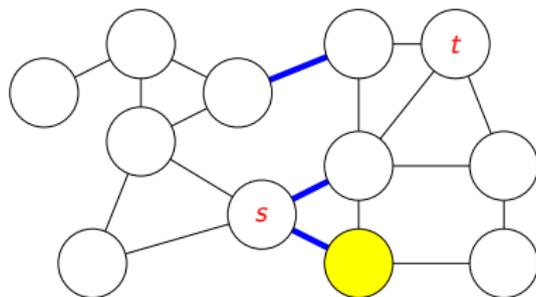
点連結度と辺連結度の関係

(Whitney '32)

$$\kappa_{s,t}(G) \leq \lambda_{s,t}(G)$$

証明 : $F \subseteq E$ を G の最小 s, t 非連結化集合とする ($|F| = \lambda_{s,t}(G)$)

- ▶ F の各辺 e に対して , その 1 端点を次の規則で選ぶ
 - ▶ e の 1 端点が s か t ならば , それではない方を選ぶ
 - ▶ e の端点が s でも t でもないならば , 任意の 1 端点を選ぶ



点連結度と辺連結度の関係：証明

無向グラフ $G = (V, E)$, 異なる 2 頂点 $s, t \in V$, $\{s, t\} \notin E$

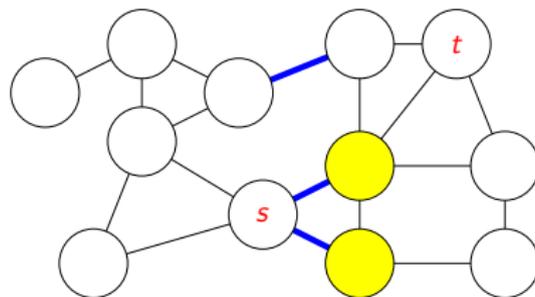
点連結度と辺連結度の関係

(Whitney '32)

$$\kappa_{s,t}(G) \leq \lambda_{s,t}(G)$$

証明 : $F \subseteq E$ を G の最小 s, t 非連結化集合とする ($|F| = \lambda_{s,t}(G)$)

- ▶ F の各辺 e に対して , その 1 端点を次の規則で選ぶ
 - ▶ e の 1 端点が s か t ならば , それではない方を選ぶ
 - ▶ e の端点が s でも t でもないならば , 任意の 1 端点を選ぶ



点連結度と辺連結度の関係：証明

無向グラフ $G = (V, E)$, 異なる 2 頂点 $s, t \in V$, $\{s, t\} \notin E$

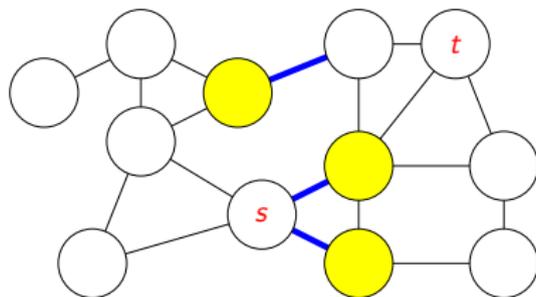
点連結度と辺連結度の関係

(Whitney '32)

$$\kappa_{s,t}(G) \leq \lambda_{s,t}(G)$$

証明 : $F \subseteq E$ を G の最小 s, t 非連結化集合とする ($|F| = \lambda_{s,t}(G)$)

- ▶ F の各辺 e に対して, その 1 端点を次の規則で選ぶ
 - ▶ e の 1 端点が s か t ならば, それではない方を選ぶ
 - ▶ e の端点が s でも t でもないならば, 任意の 1 端点を選ぶ



点連結度と辺連結度の関係：証明

無向グラフ $G = (V, E)$, 異なる 2 頂点 $s, t \in V$, $\{s, t\} \notin E$

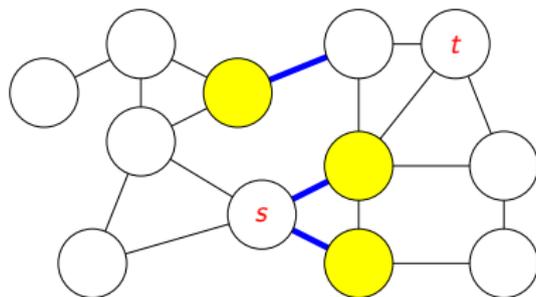
点連結度と辺連結度の関係

(Whitney '32)

$$\kappa_{s,t}(G) \leq \lambda_{s,t}(G)$$

証明 : $F \subseteq E$ を G の最小 s, t 非連結化集合とする ($|F| = \lambda_{s,t}(G)$)

- ▶ F の各辺 e に対して, その 1 端点を次の規則で選ぶ
 - ▶ e の 1 端点が s か t ならば, それではない方を選ぶ
 - ▶ e の端点が s でも t でもないならば, 任意の 1 端点を選ぶ
- ▶ 注意 : $\{s, t\} \notin E$ なので, このような選び方は必ず可能



点連結度と辺連結度の関係：証明 (続き)

無向グラフ $G = (V, E)$, 異なる 2 頂点 $s, t \in V$, $\{s, t\} \notin E$

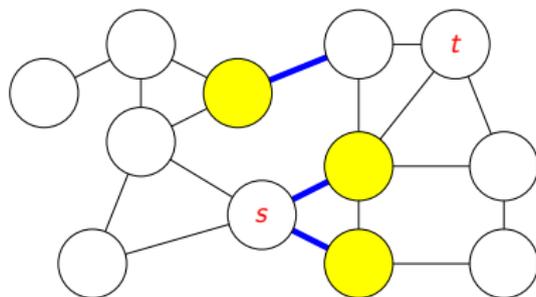
点連結度と辺連結度の関係

(Whitney '32)

$$\kappa_{s,t}(G) \leq \lambda_{s,t}(G)$$

証明 (続き) : 選ばれた頂点を集めた集合を S とする ($|S| \leq |F|$)

▶ このとき , $G - S \subseteq G - F$



点連結度と辺連結度の関係：証明 (続き)

無向グラフ $G = (V, E)$, 異なる 2 頂点 $s, t \in V$, $\{s, t\} \notin E$

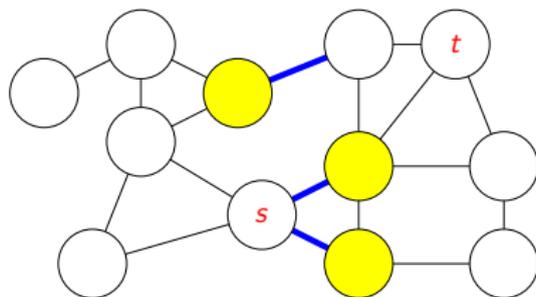
点連結度と辺連結度の関係

(Whitney '32)

$$\kappa_{s,t}(G) \leq \lambda_{s,t}(G)$$

証明 (続き) : 選ばれた頂点を集めた集合を S とする ($|S| \leq |F|$)

- ▶ このとき, $G - S \subseteq G - F$
- ▶ $G - F$ において, s から t へ至る道が存在しないので, $G - S$ にも存在しない



点連結度と辺連結度の関係：証明 (続き)

無向グラフ $G = (V, E)$, 異なる 2 頂点 $s, t \in V$, $\{s, t\} \notin E$

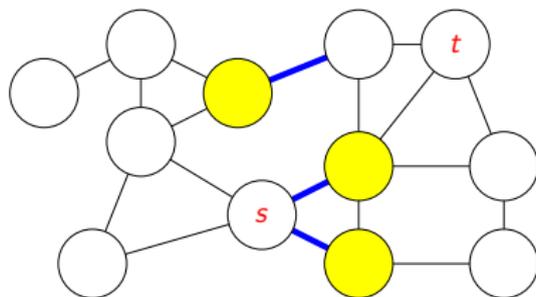
点連結度と辺連結度の関係

(Whitney '32)

$$\kappa_{s,t}(G) \leq \lambda_{s,t}(G)$$

証明 (続き) : 選ばれた頂点を集めた集合を S とする ($|S| \leq |F|$)

- ▶ このとき , $G - S \subseteq G - F$
- ▶ $G - F$ において , s から t へ至る道が存在しないので ,
 $G - S$ にも存在しない
- ▶ $\therefore S$ は s, t 分離集合



点連結度と辺連結度の関係：証明 (続き)

無向グラフ $G = (V, E)$, 異なる 2 頂点 $s, t \in V$, $\{s, t\} \notin E$

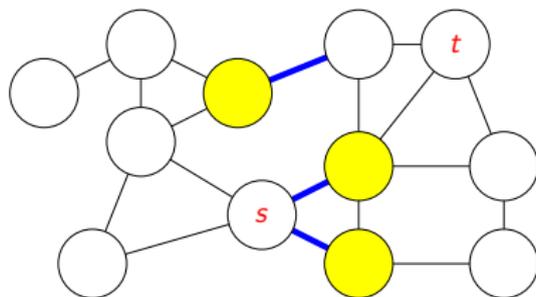
点連結度と辺連結度の関係

(Whitney '32)

$$\kappa_{s,t}(G) \leq \lambda_{s,t}(G)$$

証明 (続き) : 選ばれた頂点を集めた集合を S とする ($|S| \leq |F|$)

- ▶ このとき , $G - S \subseteq G - F$
- ▶ $G - F$ において , s から t へ至る道が存在しないので ,
 $G - S$ にも存在しない
- ▶ $\therefore S$ は s, t 分離集合で , $\kappa_{s,t}(G) \leq |S|$



点連結度と辺連結度の関係：証明 (続き)

無向グラフ $G = (V, E)$, 異なる 2 頂点 $s, t \in V$, $\{s, t\} \notin E$

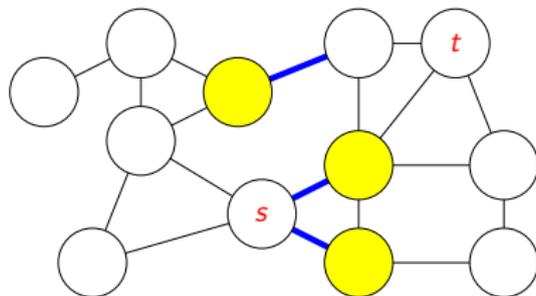
点連結度と辺連結度の関係

(Whitney '32)

$$\kappa_{s,t}(G) \leq \lambda_{s,t}(G)$$

証明 (続き) : 選ばれた頂点を集めた集合を S とする ($|S| \leq |F|$)

- ▶ このとき , $G - S \subseteq G - F$
- ▶ $G - F$ において , s から t へ至る道が存在しないので ,
 $G - S$ にも存在しない
- ▶ $\therefore S$ は s, t 分離集合で , $\kappa_{s,t}(G) \leq |S| \leq |F|$



点連結度と辺連結度の関係：証明 (続き)

無向グラフ $G = (V, E)$, 異なる 2 頂点 $s, t \in V$, $\{s, t\} \notin E$

点連結度と辺連結度の関係

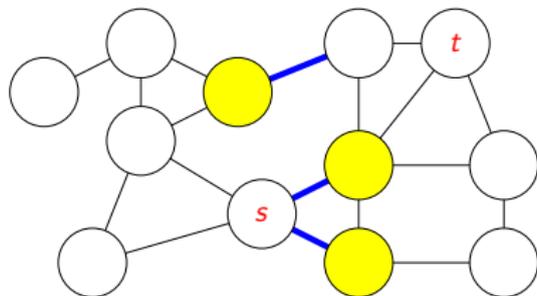
(Whitney '32)

$$\kappa_{s,t}(G) \leq \lambda_{s,t}(G)$$

証明 (続き) : 選ばれた頂点を集めた集合を S とする ($|S| \leq |F|$)

- ▶ このとき , $G - S \subseteq G - F$
- ▶ $G - F$ において , s から t へ至る道が存在しないので , $G - S$ にも存在しない
- ▶ $\therefore S$ は s, t 分離集合で , $\kappa_{s,t}(G) \leq |S| \leq |F| = \lambda_{s,t}(G)$

□



連結度と次数の関係：まとめ

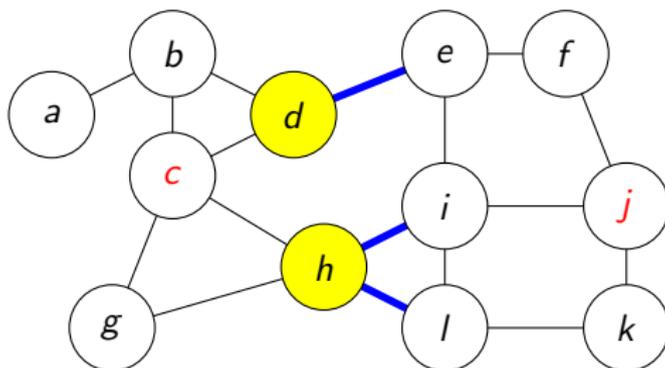
無向グラフ $G = (V, E)$, 異なる 2 頂点 $s, t \in V$, $\{s, t\} \notin E$

連結度と次数の関係

(Whitney '32)

$$\kappa_{s,t}(G) \leq \lambda_{s,t}(G) \leq d_G(s)$$

例 : $\kappa_{c,j}(G) = 2$, $\lambda_{c,j}(G) = 3$, $d_G(c) = 4$



注 : $d_G(s) - \lambda_{s,t}(G)$ と $\lambda_{s,t}(G) - \kappa_{s,t}(G)$ が任意に大きくなる例が存在

連結度と次数の関係：系

無向グラフ $G = (V, E)$

大域連結度と最小次数の関係

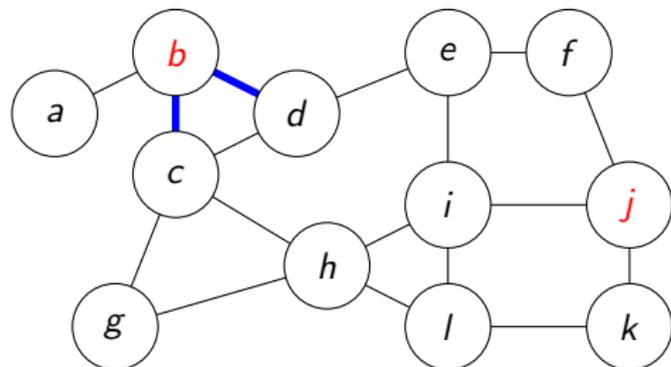
(Whitney '32)

$$\kappa(G) \leq \lambda(G) \leq \delta(G)$$

ただし, $\delta(G)$ は G の最小次数証明：演習問題注：「系」とは定理から直ちに証明が得られる命題のこと

目次

- ① グラフの連結性と連結度
 - 無向グラフの辺連結度
 - 無向グラフの点連結度
 - 有向グラフの弧連結度・点連結度
- ② 連結度と次数
- ③ 連結度と互いに素な道の弱双対性
- ④ 今日のまとめと補足

最小 s, t 非連結化集合を見つけるには？ s, t 辺連結度 = 最小 s, t 非連結化集合の要素数

$$\lambda_{b,j}(G) \leq 2$$

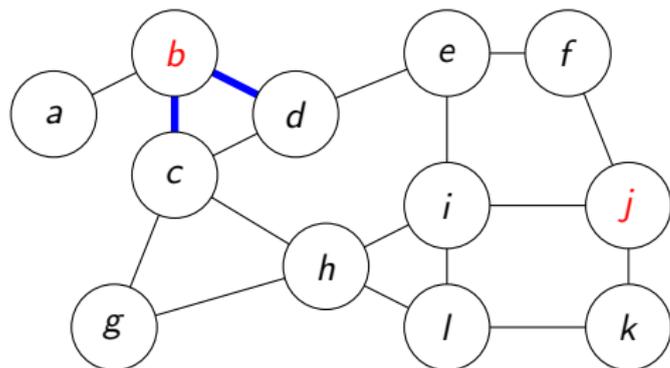
$$\lambda_{b,j}(G) = 2?$$

格言

ある性質を持つものを発見する方法を考えるときには
その性質を持つことを確認する方法をまず考える

最小性の確認法？

この s, t 非連結化集合の要素数が最小であることを確認するにはどうしたらよいか？



$$\lambda_{b,j}(G) \leq 2$$

格言

ある性質を持つものを発見する方法を考えるとときには
その性質を持つことを確認する方法をまず考える

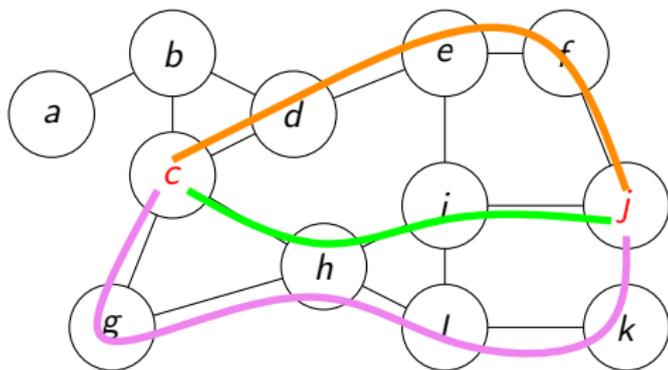
⇒ **弱双対性**を考えたい

辺素な道

無向グラフ $G = (V, E)$, 異なる 2 頂点 $s, t \in V$

辺素な道とは？

s を始点とし, t を終点とする道 P_1, P_2 が**辺素**であるとは,
 P_1 と P_2 が同じ辺を持たないこと



以後、「 s, t 道」と言ったら, s を始点とし t を終点とする道を指す

非連結化集合と互いに素な道の弱双対性

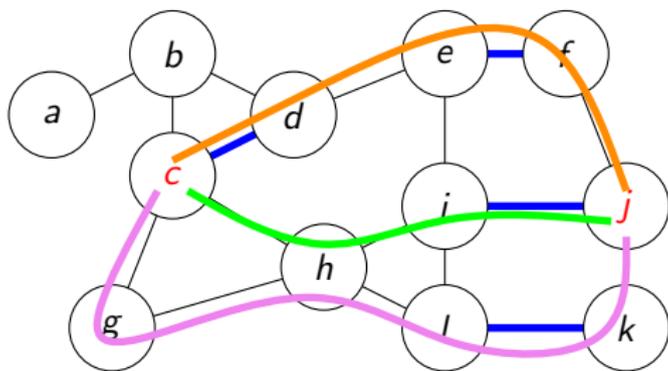
無向グラフ $G = (V, E)$, 異なる 2 頂点 $s, t \in V$

非連結化集合と互いに素な道の弱双対性

任意の s, t 非連結化集合 $F \subseteq E$ と

互いに素な任意の s, t 道 P_1, P_2, \dots, P_ℓ に対して

$$\ell \leq |F|$$



この図では, $\ell = 3, |F| = 4$

非連結化集合と互いに辺素な道の弱双対性：証明

無向グラフ $G = (V, E)$, 異なる 2 頂点 $s, t \in V$

非連結化集合と互いに辺素な道の弱双対性

任意の s, t 非連結化集合 $F \subseteq E$ と

互いに辺素な任意の s, t 道 P_1, P_2, \dots, P_ℓ に対して, $\ell \leq |F|$

証明：数え上げ論法による

- ▶ $\mathcal{P} = \{P_1, \dots, P_\ell\}$ とする
- ▶ \mathcal{P} の各道は辺素なので, F の各辺を通る \mathcal{P} の道の数 は 1 以下

$$\therefore |\{(P_i, e) \in \mathcal{P} \times F \mid e \text{ は } P_i \text{ の辺}\}| \leq \sum_{e \in F} 1 = |F|$$

- ▶ F は s, t 非連結化集合なので, \mathcal{P} のどの道も F のある辺を含む

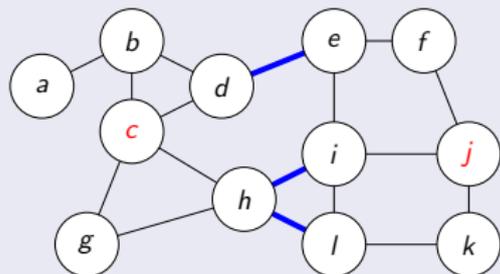
$$\therefore |\{(P_i, e) \in \mathcal{P} \times F \mid e \text{ は } P_i \text{ の辺}\}| \geq \sum_{P_i \in \mathcal{P}} 1 = |\mathcal{P}| = \ell$$

- ▶ $\therefore \ell \leq |\{(P_i, e) \in \mathcal{P} \times F \mid e \text{ は } P_i \text{ の辺}\}| \leq |F|$

□

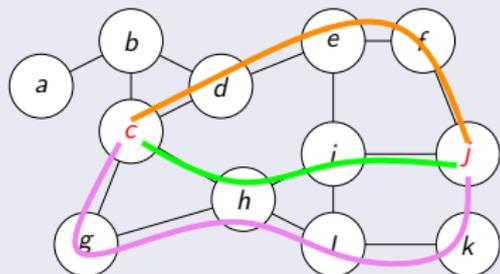
弱双対性の使い方

上界



$$\lambda_{c,j}(G) \leq 4$$

下界



$$\lambda_{c,j}(G) \geq 4$$

したがって, $\lambda_{c,j}(G) = 4$

格言

互いに素な道を見ることで, 辺連結度の値を証明できる

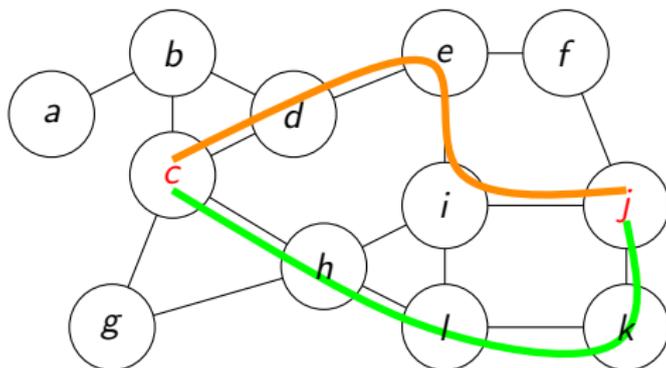
同じことを点連結度に対しても行いたい

内点素な道

無向グラフ $G = (V, E)$, 異なる 2 頂点 $s, t \in V$

内点素な道とは？

s, t 道 P_1, P_2 が内点素であるとは,
 P_1 と P_2 が s, t 以外に同じ頂点を持たないこと



分離集合と互いに内点素な道の弱双対性

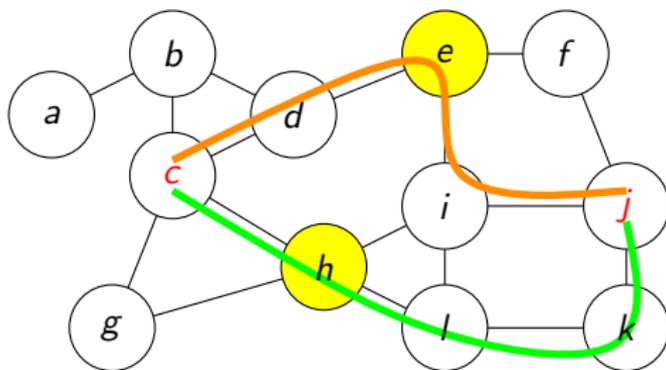
無向グラフ $G = (V, E)$, 異なる 2 頂点 $s, t \in V$, $\{s, t\} \notin E$

分離集合と互いに内点素な道の弱双対性

任意の s, t 分離集合 $S \subseteq V - \{s, t\}$ と

互いに内点素な任意の s, t 道 P_1, P_2, \dots, P_ℓ に対して

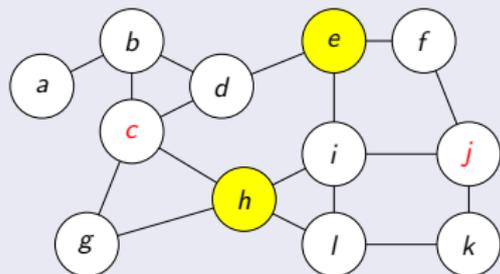
$$\ell \leq |S|$$



証明：演習問題

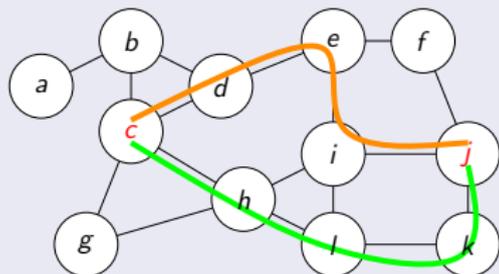
弱双対性の使い方

上界



$$\kappa_{c,j}(G) \leq 2$$

下界



$$\kappa_{c,j}(G) \geq 2$$

したがって, $\kappa_{c,j}(G) = 2$

格言

互いに内点素な道を見ることで, 点連結度の値を証明できる

同じような弱双対性が有向グラフに対しても成立する

用語の対応：無向グラフ

辺	頂点
s, t 非連結化集合	s, t 分離集合
s, t 辺連結度	s, t 点連結度
$\lambda_{s,t}(G)$	$\kappa_{s,t}(G)$
大域辺連結度	大域点連結度
$\lambda(G)$	$\kappa(G)$
k 辺連結	k 点連結
辺素な s, t 道	内点素な s, t 道

目次

- ① グラフの連結性と連結度
 - 無向グラフの辺連結度
 - 無向グラフの点連結度
 - 有向グラフの弧連結度・点連結度
- ② 連結度と次数
- ③ 連結度と互いに素な道の弱双対性
- ④ 今日のまとめと補足

今日のまとめ

今日やったこと

グラフの連結性に関する概念を理解する

- ▶ 局所連結度と大域連結度
- ▶ 連結度と次数の関係
- ▶ 弱双対性

まとめ：弱双対性

マッチングに関して，任意のグラフに対して

$$\text{最大マッチングの辺数} \leq \text{最小頂点被覆の頂点数}$$

彩色に関して，任意のグラフに対して

$$\text{最大クリークの頂点数} \leq \text{染色数}$$

辺連結度に関して，任意のグラフに対して

$$\text{互いに辺素な } s, t \text{ 道の最大数} \leq s, t \text{ 辺連結度}$$

点連結度に関して，任意のグラフに対して

$$\text{互いに内点素な } s, t \text{ 道の最大数} \leq s, t \text{ 点連結度}$$

まとめ：強双対性

マッチングに関して，二部グラフに対して (König–Egerváry の定理)

最大マッチングの辺数 = 最小頂点被覆の頂点数

彩色に関して，区間グラフに対して

最大クリークの頂点数 = 染色数

辺連結度に関して，任意のグラフに対して (Menger の定理)

互いに辺素な s, t 道の最大数 = s, t 辺連結度

点連結度に関して，任意のグラフに対して (Menger の定理)

互いに内点素な s, t 道の最大数 = s, t 点連結度

Menger の定理の証明は，この講義で行わない

目次

- ① グラフの連結性と連結度
 - 無向グラフの辺連結度
 - 無向グラフの点連結度
 - 有向グラフの弧連結度・点連結度
- ② 連結度と次数
- ③ 連結度と互いに素な道の弱双対性
- ④ 今日のまとめと補足