数理解析 第 12 回
二部グラフのマッチング

岡本 吉央
okamotoy@uec.ac.jp

電気通信大学

2014 年 1 月 7 日

最終更新：2014 年 1 月 6 日　17:59

概要

今日の目標

二部グラフのマッチングに関する重要な 2 つの定理

- Hall **の結婚定理：完全マッチング**
- Kőnig–Egerváry **の定理：最大マッチング**

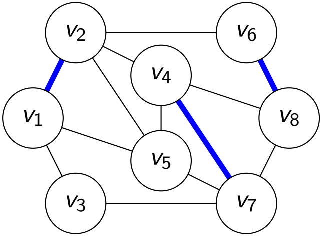
目次

グラフにおけるマッチング

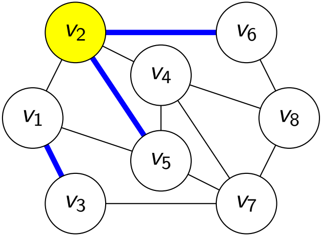
無向グラフ $G = (V, E)$

マッチングとは？

G の**マッチング**とは辺部分集合 $M \subseteq E$ で，
M のどの 2 辺も同じ頂点に接続しないもの



$\{\{v_1, v_2\}, \{v_4, v_7\}, \{v_6, v_8\}\}$ は
マッチングである



$\{\{v_1, v_3\}, \{v_2, v_5\}, \{v_2, v_6\}\}$ は
マッチングではない

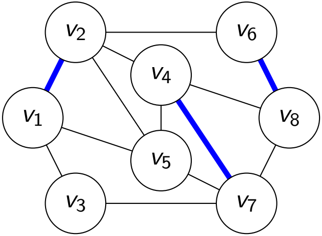
マッチングの辺 $e \in M$ は e の端点を**飽和**する

最大マッチング

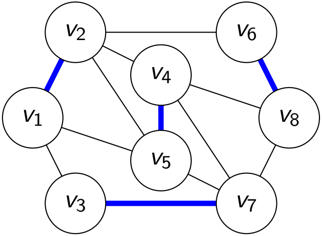
無向グラフ $G = (V, E)$

最大マッチングとは？

G の**最大マッチング**とは G のマッチング $M \subseteq E$ で，
G の任意のマッチング M' に対して $|M| \geq |M'|$ を満たすもの



最大マッチングではない



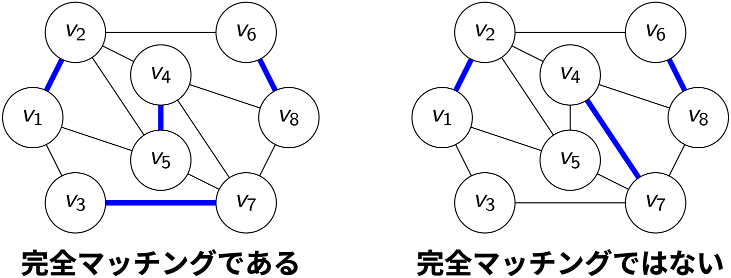
最大マッチングである

完全マッチング

無向グラフ $G = (V, E)$

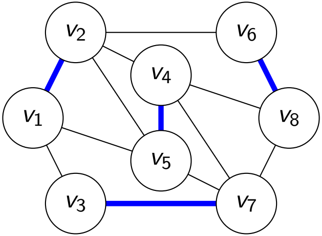
完全マッチングとは？

G の**完全マッチング**とは G のマッチング $M \subseteq E$ で，
G のすべての頂点が M によって飽和されるもの



最大性の確認法？

このマッチングが最大マッチングであることを確認するには
どうしたらよいか？



格言

ある性質を持つものを発見する方法を考えるときには
その性質を持つことを確認する方法をまず考える

最大性の確認法

格言 (再掲)

ある性質を持つものを発見する方法を考えるときには
その性質を持つことを確認する方法をまず考える

なぜ？

- 確認は発見より難しくない
- 確認法から発見法に対する道筋が見えることもある

最大性の確認法

2 つ紹介する

1. 増加道を用いる方法
2. 頂点被覆を用いる方法

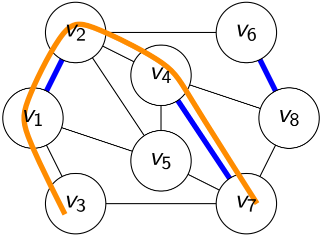
2 つとも重要

交互道

無向グラフ $G = (V, E)$**，マッチング** $M \subseteq E$

交互道とは？

M **に関する交互道とは，**G **における道** $v_1, \ldots, v_k$ **で** $(k \geq 1)$**，**
M **の辺と** $E - M$ **の辺が交互に現れるもの**



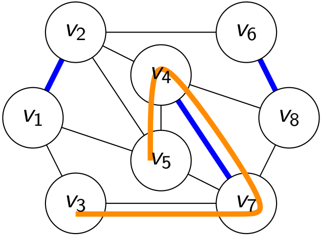
v_3, v_1, v_2, v_4, v_7 **は青のマッチングに関する交互道**

増加道

無向グラフ $G = (V, E)$，マッチング $M \subseteq E$

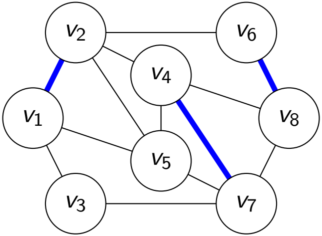
増加道とは？

M に関する**増加道**とは，M に関する交互道 $v_1, \ldots, v_k$ で $(k \geq 1)$，v_1 と v_k が M によって飽和されないもの



v_3, v_7, v_4, v_5 は青のマッチングに関する増加道

増加道に沿ってマッチングを大きくする



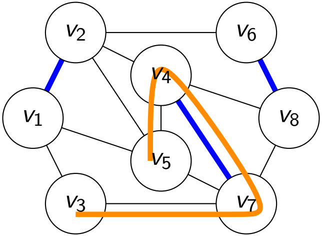
つまり

M に関する増加道が存在する $\Rightarrow$ M は最大マッチングではない

つまり (対偶を考えると)

M は最大マッチングである $\Rightarrow$ M に関する増加道が存在しない

増加道に沿ってマッチングを大きくする



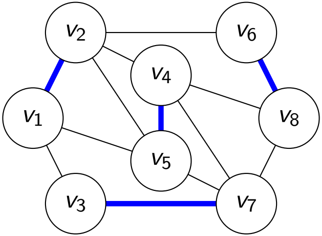
つまり

M に関する増加道が存在する $\Rightarrow$ M は最大マッチングではない

つまり (対偶を考えると)

M は最大マッチングである $\Rightarrow$ M に関する増加道が存在しない

増加道に沿ってマッチングを大きくする



つまり

M に関する増加道が存在する $\Rightarrow$ M は最大マッチングではない

つまり (対偶を考えると)

M は最大マッチングである $\Rightarrow$ M に関する増加道が存在しない

最大マッチングと増加道

無向グラフ $G = (V, E)$**，マッチング** $M \subseteq E$

最大マッチングと増加道の関係 (Berge '57)

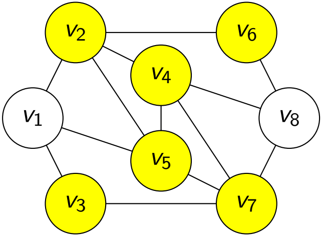
M **が** G **の最大マッチング** $\Leftrightarrow$ M **に関する増加道が存在しない**

頂点被覆

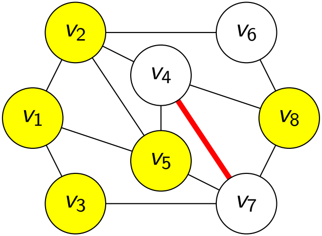
無向グラフ $G = (V, E)$

頂点被覆とは？

G の**頂点被覆**とは頂点部分集合 $C \subseteq V$ で，
G のどの辺もある C の頂点に接続しているもの



$\{v_2, v_3, v_4, v_5, v_6, v_7\}$ は
頂点被覆である



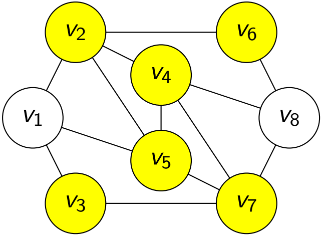
$\{v_1, v_2, v_3, v_5, v_8\}$ は
頂点被覆ではない

最小頂点被覆

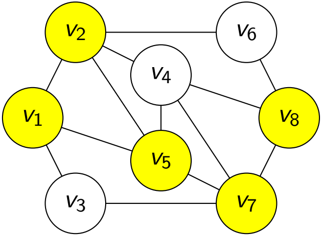
無向グラフ $G = (V, E)$

最小頂点被覆とは？

G の**最小頂点被覆**とは頂点被覆 $C \subseteq V$ で，
G の任意の頂点被覆 C' に対して $|C| \leq |C'|$ を満たすもの



$\{v_2, v_3, v_4, v_5, v_6, v_7\}$ は
最小頂点被覆ではない



$\{v_1, v_2, v_5, v_7, v_8\}$ は
最小頂点被覆である

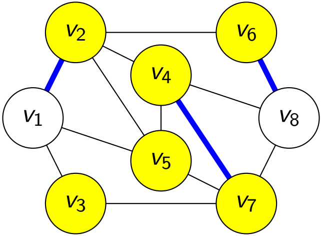
マッチングと頂点被覆の関係

無向グラフ $G = (V, E)$

マッチングと頂点被覆の関係

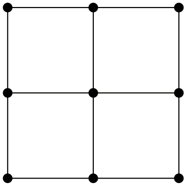
M **が** G **のマッチング**
C **が** G **の頂点被覆** $\Rightarrow |M| \leq |C|$

例： $|M| = 3,\ |C| = 6$



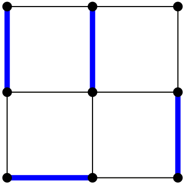
頂点被覆の重要性

次のグラフの最大マッチングの辺数は何か？



頂点被覆の重要性

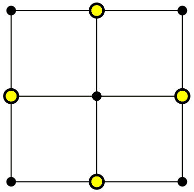
次のグラフの最大マッチングの辺数は何か？



最大マッチングの辺数 ≥ 4

頂点被覆の重要性 (続き)

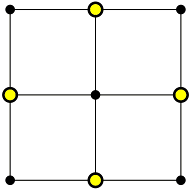
次のグラフの最大マッチングの辺数は何か？



これは頂点被覆なので，
最大マッチングの辺数 $\leq$ 最小頂点被覆の頂点数 ≤ 4

頂点被覆の重要性 (続き)

次のグラフの最大マッチングの辺数は何か？



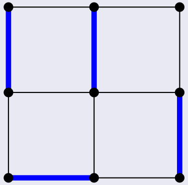
これは頂点被覆なので，
最大マッチングの辺数 $\leq$ **最小頂点被覆の頂点数** ≤ 4

- **したがって，最大マッチングの辺数** $= 4$ **である**!!!

頂点被覆の重要性：今一度

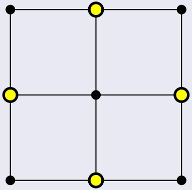
次のグラフの最大マッチングの辺数は何か？

下界



最大マッチングの辺数 ≥ 4

上界



最大マッチングの辺数 ≤ 4

したがって，最大マッチングの辺数 $= 4$

格言

頂点被覆を見ることで，マッチングの最大性が**保証**される

頂点被覆の重要性：まとめ

次の 2 つを同時に行う

下界

辺数 k のマッチングを見つける

- このとき，
  最大マッチングの辺数 $\geq k$

上界

頂点数 k の頂点被覆を見つける

- このとき，
  最大マッチングの辺数 $\leq k$

よって，この 2 つができれば

最大マッチングの辺数 $= k$

今日行うこと

- 二部グラフに対しては必ず

  $$\text{最大マッチングの辺数} = \text{最小頂点被覆の頂点数}$$

  が成り立つことを証明する (Kőnig–Egerváry の定理)
- 二部グラフが完全マッチングを持つための必要十分条件を証明する (Hall の結婚定理)
  - Kőnig–Egerváry の定理を使った証明
- Hall の結婚定理の応用を見る

二部グラフ

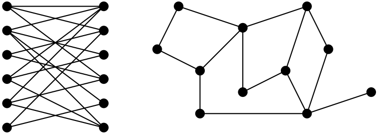
無向グラフ $G = (V, E)$

二部グラフとは？

次を満たす $A, B \subseteq V$ **が存在するとき，** G **は二部グラフと呼ばれる**

- $A \cup B = V$，**かつ，** $A \cap B = \emptyset$
- $\{u, v\} \in E$ **ならば，** $\{u, v\} \cap A \neq \emptyset$ **かつ** $\{u, v\} \cap B \neq \emptyset$

二部グラフの例



このとき， A **と** B **を** G **の部集合と呼ぶ**

二部グラフ

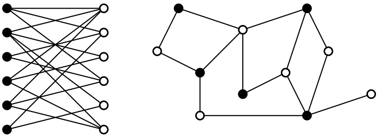
無向グラフ $G = (V, E)$

二部グラフとは？

次を満たす $A, B \subseteq V$ **が存在するとき，** G **は二部グラフと呼ばれる**

- $A \cup B = V$，**かつ，** $A \cap B = \emptyset$
- $\{u, v\} \in E$ **ならば，** $\{u, v\} \cap A \neq \emptyset$ **かつ** $\{u, v\} \cap B \neq \emptyset$

二部グラフの例

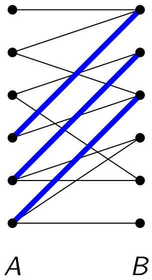


このとき， A **と** B **を** G **の部集合と呼ぶ**

目次

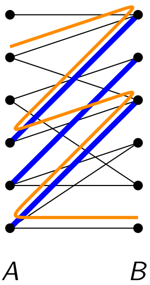
二部グラフとマッチング

二部グラフ G (部集合は A と B) とそのマッチング M



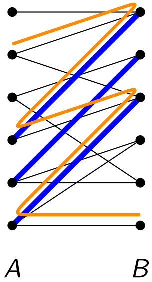
二部グラフとマッチング

M に関する増加道は (存在すれば)，A で始まり，B で終わる



二部グラフとマッチング

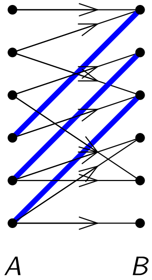
M に関する増加道は (存在すれば)，A で始まり，B で終わる



これをうまく扱うために有向グラフを構成する

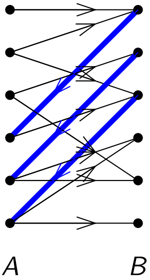
二部グラフとマッチング：有向グラフ

G において，M に属さない辺は A から B へ向き付ける



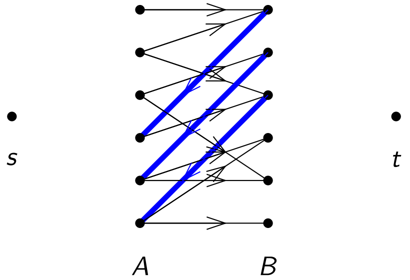
二部グラフとマッチング

G において，M に属する辺は B から A へ向き付ける



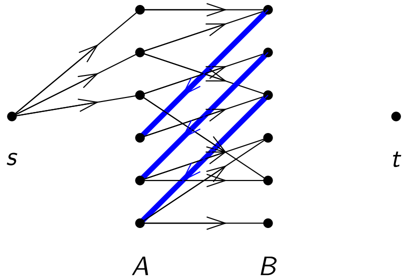
二部グラフとマッチング

新しい頂点を 2 つ用意する (s と t とする)



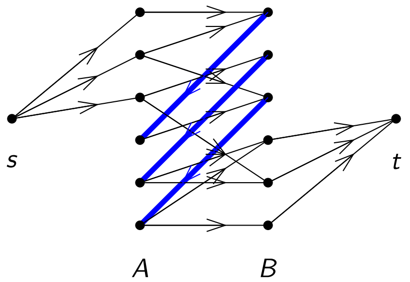
二部グラフとマッチング

A において M が飽和しない頂点に向けて s から弧を引く



二部グラフとマッチング

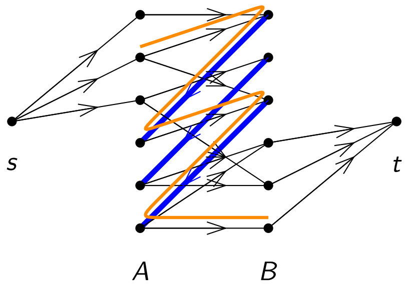
B において M が飽和しない頂点から t へ向けて弧を引く



この有向グラフを G_M と書くことにする

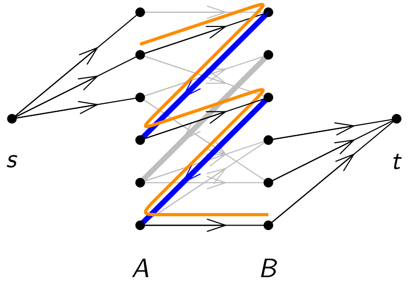
二部グラフとマッチング

M に関する増加道が存在 $\Leftrightarrow$ G_M に s から t へ至る道が存在



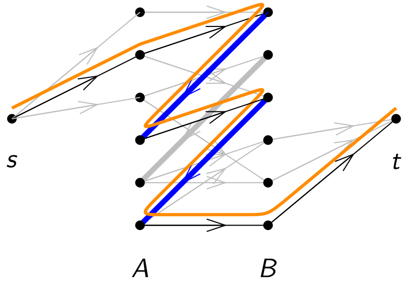
二部グラフとマッチング

M に関する増加道が存在 $\Leftrightarrow$ G_M に s から t へ至る道が存在



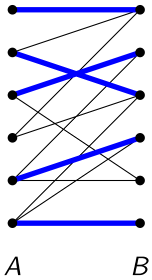
二部グラフとマッチング

M に関する増加道が存在 $\Leftrightarrow$ G_M に s から t へ至る道が存在



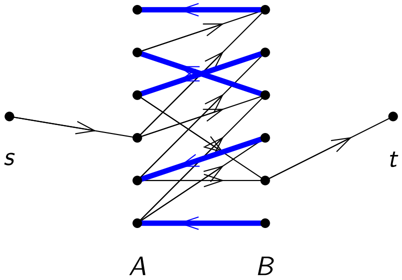
二部グラフとマッチング

M が G の最大マッチングであるとき，



二部グラフとマッチング

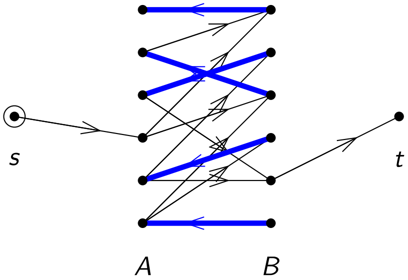
G_M に s から t へ至る道は存在しない



なぜなら，M に関する増加道が存在しないから

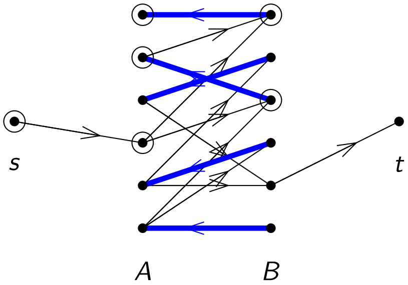
二部グラフとマッチング

s から到達できる頂点にすべて印をつけてみる



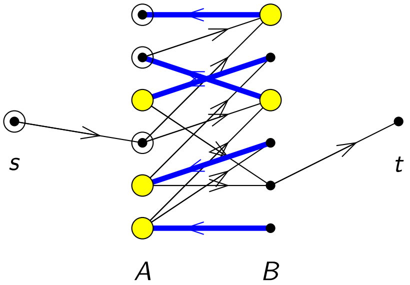
二部グラフとマッチング

s から到達できる頂点にすべて印をつけてみる



二部グラフとマッチング

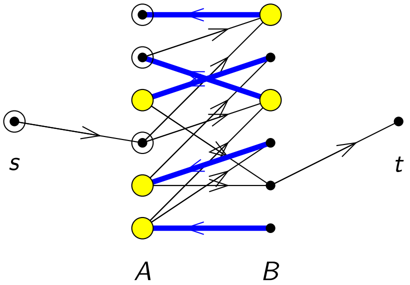
次のようにして，頂点部分集合 C を作る



- **M に属する辺を 1 つずつ見ていく**
- **その辺の両端点が s から到達可 $\Rightarrow$ B に属する端点を C に入れる**
- **その辺のどちらの端点も s から到達不可**
  $\Rightarrow$ A に属する端点を C に入れる

二部グラフとマッチング：今から行いたいこと

証明したいこと：この C は G の頂点被覆



C は M の端点を 1 つずつ選んでいるので，$|M| = |C|$

つまり

最大マッチングの辺数 $=$ 最小頂点被覆の頂点数

目次

二部グラフの最大マッチング：Kőnig–Egerváry の定理

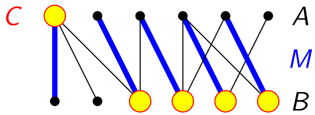
二部グラフ $G = (V, E)$

二部グラフにおけるマッチングと頂点被覆の関係
(Kőnig–Egerváry の定理)

G **のあるマッチング** M**，ある頂点被覆** C **が存在して**

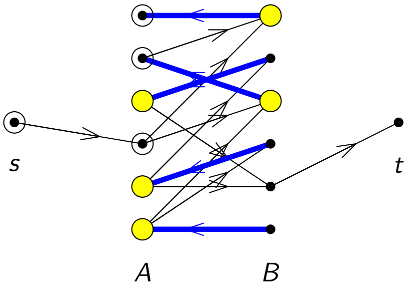
$$|M| = |C|$$

例： $|M| = |C| = 5$



Kőnig–Egerváry の定理：証明 (1)

M を G の**最大**マッチングとして，C を先ほどの説明のように作成する



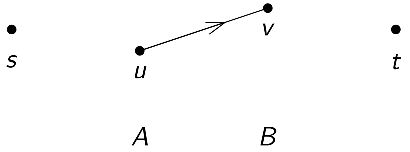
証明したいことは，この C が G の頂点被覆となることである

- これが証明できたと仮定する
- C は M の各辺に対して 1 つずつ頂点を選んで作ったので，$|M| = |C|$
- つまり，これで証明が完了する

Kőnig–Egerváry の定理：証明 (2)

背理法：C が頂点被覆ではないと仮定

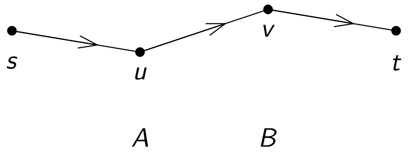
- つまり，G のある辺 $\{u, v\}$ の端点は C に属さない ($u \in A$, $v \in B$ とする)



このときに矛盾を導く (場合を分けて考える)

Kőnig–Egerváry の定理：証明 (3)

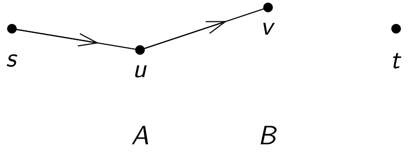
u も v も M に飽和されていないとき



- G_M の構成法を思い出すと，
  s から u へ向かう弧，v から t へ向かう弧が G_M には存在
- $\therefore$ s, u, v, t は G_M における道
- つまり，M に関する増加道が存在
- これは M の最大性に矛盾
- よって，u か v は M に飽和される .... 〈 観察 1 〉

Kőnig–Egerváry の定理：証明 (3)

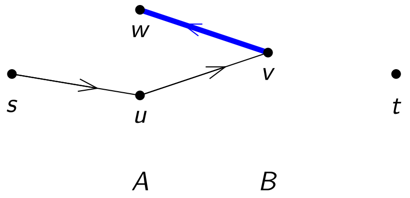
u が M に飽和されていないとき



- G_M の構成法を思い出すと，s から u へ向かう弧が G_M には存在

Kőnig–Egerváry の定理：証明 (3)

u が M に飽和されていないとき

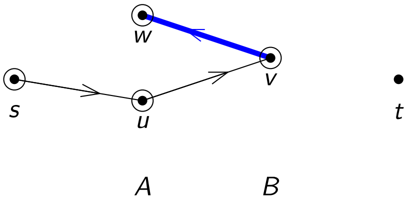


- G_M の構成法を思い出すと，s から u へ向かう弧が G_M には存在
- 観察 1 より，M のある辺が v に接続している

(その辺を $\{w, v\}$ とする)

Kőnig–Egerváry の定理：証明 (3)

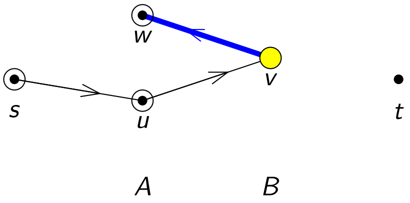
u が M に飽和されていないとき



- G_M の構成法を思い出すと，s から u へ向かう弧が G_M には存在
- 観察 1 より，M のある辺が v に接続している
  (その辺を $\{w, v\}$ とする)
- v は s から到達可能なので，C に属さなければならない

Kőnig–Egerváry の定理：証明 (3)

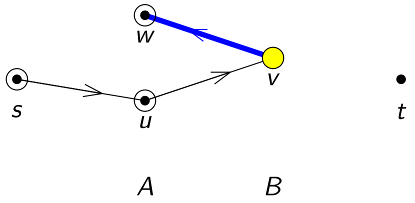
u が M に飽和されていないとき



- G_M の構成法を思い出すと，s から u へ向かう弧が G_M には存在
- 観察 1 より，M のある辺が v に接続している (その辺を $\{w, v\}$ とする)
- v は s から到達可能なので，C に属さなければならない

Kőnig–Egerváry の定理：証明 (3)

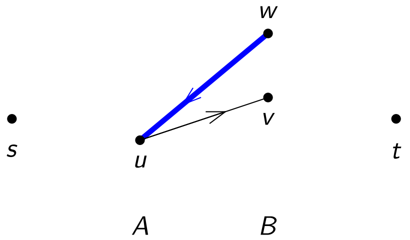
u が M に飽和されていないとき



- G_M の構成法を思い出すと，s から u へ向かう弧が G_M には存在
- 観察 1 より，M のある辺が v に接続している
  (その辺を $\{w, v\}$ とする)
- v は s から到達可能なので，C に属さなければならない
- これは，辺 $\{u, v\}$ の端点が C に属さないことに矛盾
- よって，u は M に飽和される

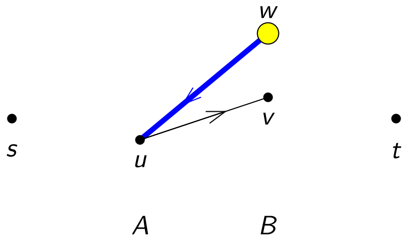
Kőnig–Egerváry の定理：証明 (4)

M の辺 $\{u, w\}$ が u に接続しているとする



Kőnig–Egerváry の定理：証明 (4)

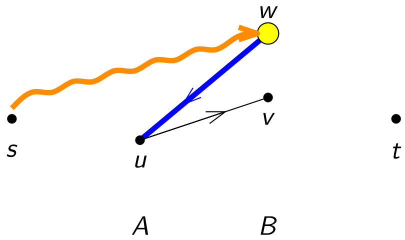
M の辺 $\{u, w\}$ が u に接続しているとする



- u は C に属さないので，w が C に属する

Kőnig–Egerváry の定理：証明 (4)

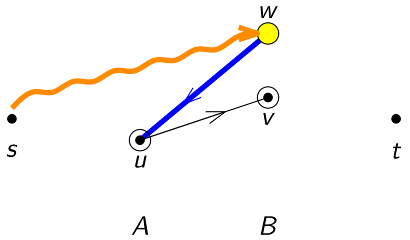
M の辺 $\{u, w\}$ が u に接続しているとする



- u は C に属さないので，w が C に属する
- すなわち，G_M において w は s から到達可能

Kőnig–Egerváry の定理：証明 (4)

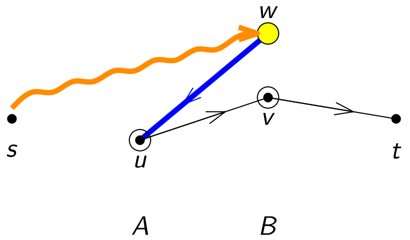
M の辺 $\{u, w\}$ が u に接続しているとする



- u は C に属さないので，w が C に属する
- すなわち，G_M において w は s から到達可能
- すなわち，u も v も s から到達可能

Kőnig–Egerváry の定理：証明 (4)

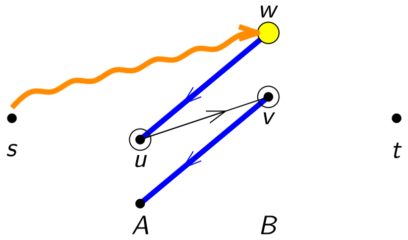
M の辺 $\{u, w\}$ が u に接続しているとする



- u は C に属さないので，w が C に属する
- すなわち，G_M において w は s から到達可能
- すなわち，u も v も s から到達可能
- G_M において v から t へ弧があると，
  s から t に至る道が存在することになり，M の最大性に矛盾
- よって，G_M において v から t へ弧はない

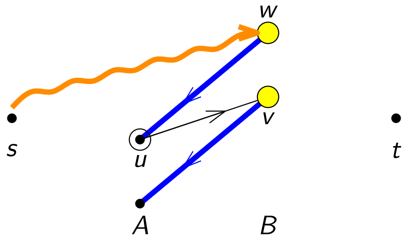
Kőnig–Egerváry の定理：証明 (5)

すなわち，M の別の辺が v に接続している



Kőnig–Egerváry の定理：証明 (5)

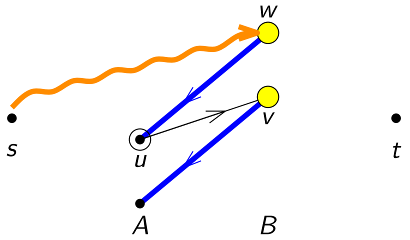
すなわち，M の別の辺が v に接続している



- このとき，v は C に入ることになる．

Kőnig–Egerváry の定理：証明 (5)

すなわち，M の別の辺が v に接続している



- このとき，v は C に入ることになる．
- これは，u, v がどちらも C に属さないことに矛盾 □

頂点被覆の重要性：まとめ

次の 2 つを同時に行う

下界

辺数 k のマッチングを見つける

- このとき，
  最大マッチングの辺数 $\geq k$

上界

頂点数 k の頂点被覆を見つける

- このとき，
  最大マッチングの辺数 $\leq k$

よって，この 2 つができれば

最大マッチングの辺数 $= k$

Kőnig–Egerváry の定理の帰結

二部グラフに対しては「この 2 つができれば」が必ず可能である

目次

今日行うこと

- 二部グラフに対しては必ず

  最大マッチングの辺数 = 最小頂点被覆の頂点数

  が成り立つことを証明する (Kőnig–Egerváry の定理)
- 二部グラフが完全マッチングを持つための必要十分条件を証明する (Hall の結婚定理)
  - Kőnig–Egerváry の定理を使った証明
- Hall の結婚定理の応用を見る

近傍

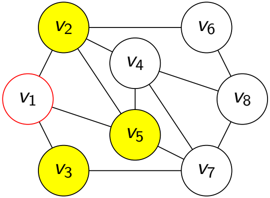
近傍とは？

無向グラフ $G = (V, E)$ における頂点 $v \in V$ の近傍とは v の隣接頂点全体の集合

$$N(v) = \{u \in V \mid \{u, v\} \in E\}$$

G における頂点集合 $S \subseteq V$ の近傍とは

$$N(S) = \left(\bigcup_{v \in S} N(v)\right) - S$$



- $N(v_1) = \{v_2, v_3, v_5\}$
- $N(\{v_1, v_2\}) = \{v_3, v_4, v_5, v_6\}$

近傍

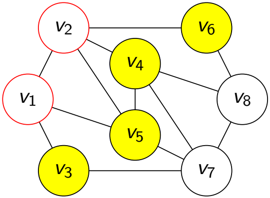
近傍とは？

無向グラフ $G = (V, E)$ における頂点 $v \in V$ の近傍とは v の隣接頂点全体の集合

$$N(v) = \{u \in V \mid \{u, v\} \in E\}$$

G における頂点集合 $S \subseteq V$ の近傍とは

$$N(S) = \left(\bigcup_{v \in S} N(v)\right) - S$$



- $N(v_1) = \{v_2, v_3, v_5\}$
- $N(\{v_1, v_2\}) = \{v_3, v_4, v_5, v_6\}$

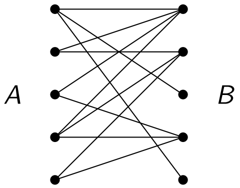
二部グラフの完全マッチング

二部グラフ $G = (V, E)$**，部集合** A, B

二部グラフが完全マッチングを持つための必要十分条件
(Hall の結婚定理)

A **の頂点をすべて飽和するマッチングを** G **が持つ** $\Leftrightarrow$
任意の頂点集合 $S \subseteq A$ **に対して，**$|S| \leq |N(S)|$

例：



「$\Leftarrow$**」の証明に，**Kőnig–Egerváry **の定理を用いる**

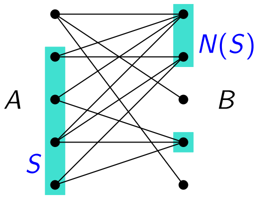
二部グラフの完全マッチング

二部グラフ $G = (V, E)$，**部集合** A, B

二部グラフが完全マッチングを持つための必要十分条件 (Hall の結婚定理)

A **の頂点をすべて飽和するマッチングを** G **が持つ** $\Leftrightarrow$
任意の頂点集合 $S \subseteq A$ **に対して，** $|S| \leq |N(S)|$

例：



「$\Leftarrow$**」の証明に，**König–Egerváry **の定理を用いる**

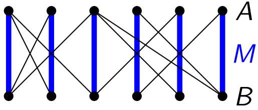
Hall の結婚定理：証明 (1)

二部グラフ $G = (V, E)$，**部集合** A, B

Hall の結婚定理

A **の頂点をすべて飽和するマッチングを** G **が持つ** $\Leftrightarrow$
任意の頂点集合 $S \subseteq A$ **に対して，** $|S| \leq |N(S)|$

$\Rightarrow$ の証明：A **の頂点をすべて飽和するマッチングを** M **とする**



Hall の結婚定理：証明 (1)

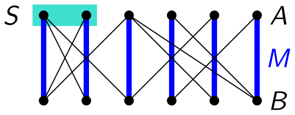
二部グラフ $G = (V, E)$，部集合 A, B

Hall の結婚定理

A の頂点をすべて飽和するマッチングを G が持つ $\Leftrightarrow$
任意の頂点集合 $S \subseteq A$ に対して，$|S| \leq |N(S)|$

$\Rightarrow$ の証明：A の頂点をすべて飽和するマッチングを M とする

- 任意の $S \subseteq A$ を考える



Hall の結婚定理：証明 (1)

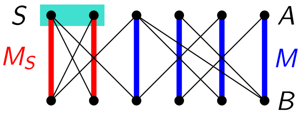
二部グラフ $G = (V, E)$**，部集合** A, B

Hall の結婚定理

A **の頂点をすべて飽和するマッチングを** G **が持つ** $\Leftrightarrow$
任意の頂点集合 $S \subseteq A$ **に対して，** $|S| \leq |N(S)|$

$\Rightarrow$ の証明：A **の頂点をすべて飽和するマッチングを** M **とする**

- **任意の** $S \subseteq A$ **を考える**
- S **を飽和する** M **の辺を集めた集合を** M_S **とすると，** $|S| = |M_S|$



Hall の結婚定理：証明 (1)

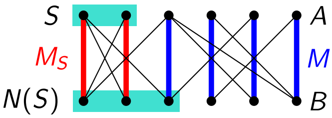
二部グラフ $G = (V, E)$，部集合 A, B

Hall の結婚定理

A の頂点をすべて飽和するマッチングを G が持つ $\Leftrightarrow$ 任意の頂点集合 $S \subseteq A$ に対して，$|S| \leq |N(S)|$

$\Rightarrow$ の証明：A の頂点をすべて飽和するマッチングを M とする

- **任意の $S \subseteq A$ を考える**
- **S を飽和する M の辺を集めた集合を M_S とすると，$|S| = |M_S|$**
- **M_S が飽和する B の頂点はすべて $N(S)$ の要素**



Hall の結婚定理：証明 (1)

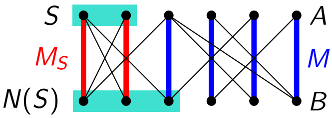
二部グラフ $G = (V, E)$，部集合 A, B

Hall の結婚定理

A の頂点をすべて飽和するマッチングを G が持つ $\Leftrightarrow$
任意の頂点集合 $S \subseteq A$ に対して，$|S| \leq |N(S)|$

$\Rightarrow$ の証明：A の頂点をすべて飽和するマッチングを M とする

- 任意の $S \subseteq A$ を考える
- S を飽和する M の辺を集めた集合を M_S とすると，$|S| = |M_S|$
- M_S が飽和する B の頂点はすべて $N(S)$ の要素
- $\therefore |M_S| \leq |N(S)|$



Hall の結婚定理：証明 (1)

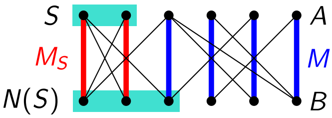
二部グラフ $G = (V, E)$，部集合 A, B

Hall の結婚定理

A の頂点をすべて飽和するマッチングを G が持つ $\Leftrightarrow$
任意の頂点集合 $S \subseteq A$ に対して，$|S| \leq |N(S)|$

$\Rightarrow$ の証明：A の頂点をすべて飽和するマッチングを M とする

- 任意の $S \subseteq A$ を考える
- S を飽和する M の辺を集めた集合を M_S とすると，$|S| = |M_S|$
- M_S が飽和する B の頂点はすべて $N(S)$ の要素
- $\therefore |M_S| \leq |N(S)|$
- $\therefore |S| \leq |N(S)|$



Hall の結婚定理：証明 (2)

二部グラフ $G = (V, E)$，部集合 A, B

Hall の結婚定理

A の頂点をすべて飽和するマッチングを G が持つ $\Leftrightarrow$
任意の頂点集合 $S \subseteq A$ に対して，$|S| \leq |N(S)|$

$\Leftarrow$ の証明：対偶を証明する

証明すること

A の頂点をすべて飽和するマッチングを G が持たない $\Rightarrow$
ある頂点集合 $S \subseteq A$ に対して，$|S| > |N(S)|$

A の頂点をすべて飽和するマッチングを G が持たないとき，

$$G \text{ の最大マッチングの辺数} < |A|$$

Hall の結婚定理：証明 (3)

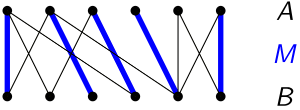
二部グラフ $G = (V, E)$，**部集合** A, B

証明すること

A **の頂点をすべて飽和するマッチングを** G **が持たない** $\Rightarrow$
ある頂点集合 $S \subseteq A$ **に対して，** $|S| > |N(S)|$

証明：A **の頂点をすべて飽和するマッチングを** G **が持たないとする**

- **このとき，**G **の最大マッチングの辺数** $< |A|$



Hall の結婚定理：証明 (3)

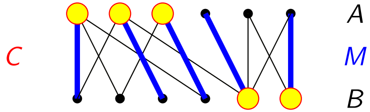
二部グラフ $G=(V,E)$，部集合 A,B

証明すること

A の頂点をすべて飽和するマッチングを G が持たない $\Rightarrow$
ある頂点集合 $S\subseteq A$ に対して，$|S|>|N(S)|$

証明：A の頂点をすべて飽和するマッチングを G が持たないとする

- このとき，G の最大マッチングの辺数 $<|A|$
- Kőnig–Egerváry の定理より，G の最小頂点被覆の頂点数 $<|A|$
- C を G の最小頂点被覆とする ($|C|<|A|$)



Hall の結婚定理：証明 (3)

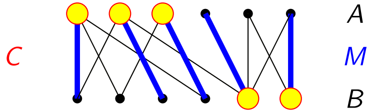
二部グラフ $G = (V, E)$，**部集合** A, B

証明すること

A **の頂点をすべて飽和するマッチングを** G **が持たない** $\Rightarrow$
ある頂点集合 $S \subseteq A$ **に対して，** $|S| > |N(S)|$

証明：A **の頂点をすべて飽和するマッチングを** G **が持たないとする**

- **このとき，** G **の最大マッチングの辺数** $< |A|$
- König–Egerváry **の定理より，** G **の最小頂点被覆の頂点数** $< |A|$
- C **を** G **の最小頂点被覆とする** $(|C| < |A|)$
- $A \cap C$ **と** $B \cap C$ **を考える**



Hall の結婚定理：証明 (4)

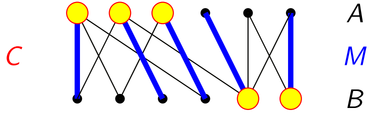
二部グラフ $G = (V, E)$，**部集合** A, B

証明すること

A **の頂点をすべて飽和するマッチングを** G **が持たない** $\Rightarrow$
ある頂点集合 $S \subseteq A$ **に対して，** $|S| > |N(S)|$

証明 (続き)：

- $|A \cap C| + |B \cap C| = |C| < |A|$



Hall の結婚定理：証明 (4)

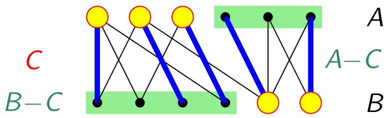
二部グラフ $G = (V, E)$，**部集合** A, B

証明すること

A **の頂点をすべて飽和するマッチングを** G **が持たない** $\Rightarrow$
ある頂点集合 $S \subseteq A$ **に対して，** $|S| > |N(S)|$

証明 (続き)：

- $|A \cap C| + |B \cap C| = |C| < |A|$
- **よって，** $|B \cap C| < |A| - |A \cap C| = |A - C|$



Hall の結婚定理：証明 (4)

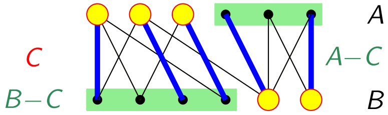
二部グラフ $G = (V, E)$，**部集合** A, B

証明すること

A **の頂点をすべて飽和するマッチングを** G **が持たない** $\Rightarrow$
ある頂点集合 $S \subseteq A$ **に対して，** $|S| > |N(S)|$

証明 (続き)：

- $|A \cap C| + |B \cap C| = |C| < |A|$
- **よって，** $|B \cap C| < |A| - |A \cap C| = |A - C|$
- C **は頂点被覆なので，** $A - C$ **と** $B - C$ **の間に辺はない**
- **したがって，** $N(A - C) \subseteq B \cap C$



Hall の結婚定理：証明 (5)

二部グラフ $G = (V, E)$，部集合 A, B

証明すること

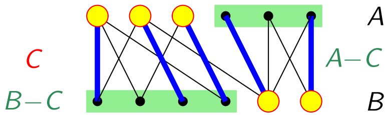
A の頂点をすべて飽和するマッチングを G が持たない $\Rightarrow$
ある頂点集合 $S \subseteq A$ に対して，$|S| > |N(S)|$

証明 (続き)：

- 以上をまとめると，

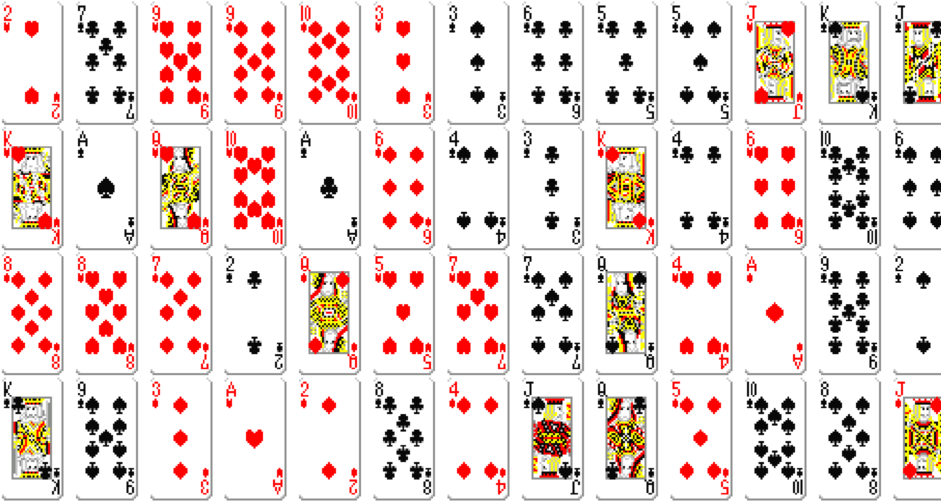
$$|N(A - C)| \leq |B \cap C| < |A - C|$$

- つまり，$S = A - C$ とすると，$|N(S)| < |S|$ $\square$

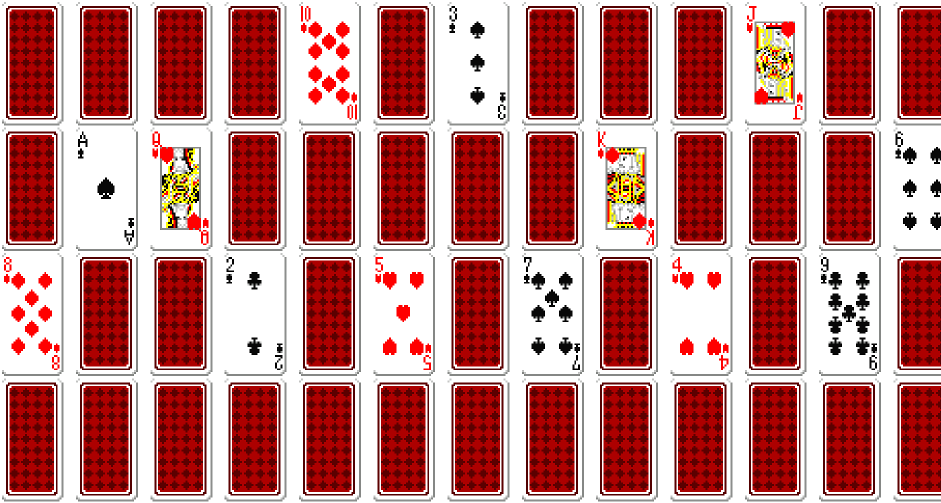


目次

トランプ・マジック？



トランプ・マジック？ (続)



トランプ・マジック（？）のからくり

命題

トランプのカード 52 枚を 4 枚ずつ 13 個の組へ任意に分けたとき，
各組から 1 枚ずつカードをうまく選ぶと，
A, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, J, Q, K を 1 つずつ取り出せる

Hall の結婚定理を使って，この命題を証明する

考えなくてはならないこと

どのようにマッチングを使うのか？

$\rightsquigarrow$ グラフを使って，問題をモデル化する

トランプ・マジック（？）のからくり：二部グラフの構成 (1)

13 個のグループを表す頂点 (a から m まで)

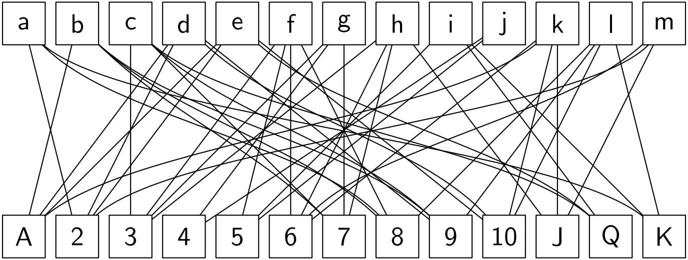
a	b	c	d	e	f	g	h	i	j	k	l	m

A	2	3	4	5	6	7	8	9	10	J	Q	K

13 個のカードのランクを表す頂点 (A から K まで)

トランプ・マジック（？）のからくり：二部グラフの構成 (2)

各グループとカードのランクの組に対して，

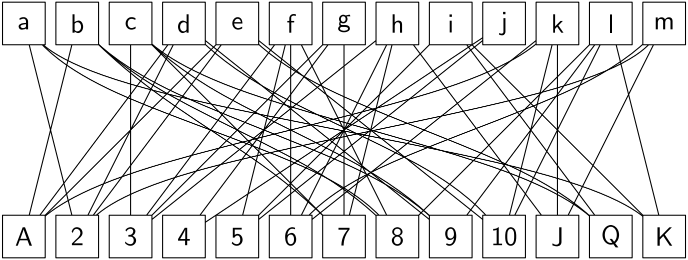


そのグループがそのランクのカードを含んでいれば辺を引く
そうでないときは辺を引かない

- $A =$ グループに対応する頂点の集合
- $B =$ カードのランクに対応する頂点の集合

トランプ・マジック（？）のからくり：Hall の結婚定理

Hall の結婚定理を使いたい

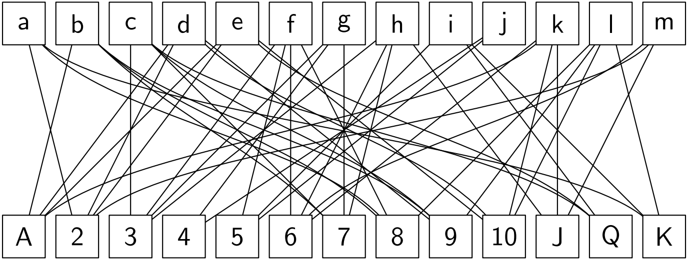


二部グラフが完全マッチングを持つための必要十分条件 (Hall の結婚定理)

A の頂点をすべて飽和するマッチングを G が持つ $\Leftrightarrow$
任意の頂点集合 $S \subseteq A$ に対して，$|S| \leq |N(S)|$

トランプ・マジック（？）のからくり：条件の確認

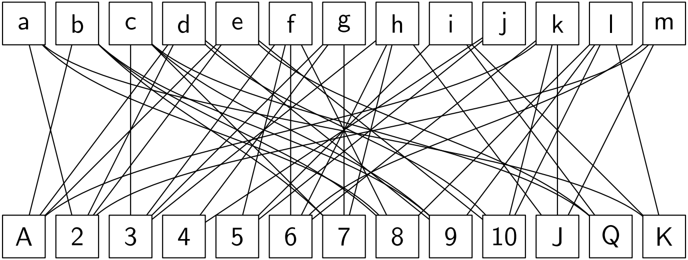
任意の $S \subseteq A$ を考える



- S **はグループの集合に対応**
- $N(S)$ **は** S **に属するグループに含まれるカードのランクに対応**

トランプ・マジック（？）のからくり：条件の確認 (続き)

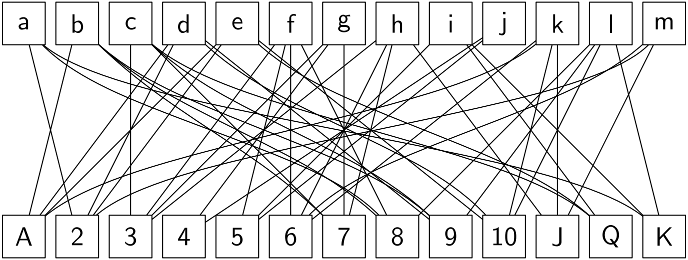
任意の $S \subseteq A$ を考える



- S **に属するグループに含まれるカードの数は** $4|S|$
- $N(S)$ **に対応するランクのカードの数は** $4|N(S)|$

トランプ・マジック（？）のからくり：条件の確認 (続き)

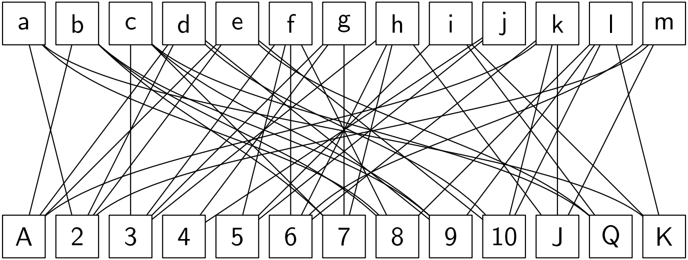
任意の $S \subseteq A$ を考える



- S **に属するグループに含まれるカードの数は** $4|S|$
- $N(S)$ **に対応するランクのカードの数は** $4|N(S)|$
- **背理法：** $|S| > |N(S)|$ **だと仮定すると，**
  $|S|$ **個のグループを** $N(S)$ **に対応するランクのカードだけで作れない**

トランプ・マジック（？）のからくり：条件の確認 (続き)

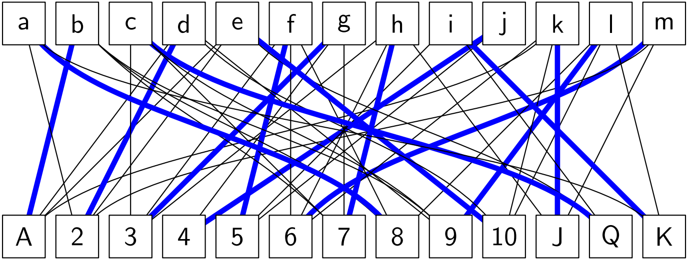
任意の $S \subseteq A$ を考える



- S **に属するグループに含まれるカードの数は** $4|S|$
- $N(S)$ **に対応するランクのカードの数は** $4|N(S)|$
- **背理法：** $|S| > |N(S)|$ **だと仮定すると，**
  $|S|$ **個のグループを** $N(S)$ **に対応するランクのカードだけで作れない**
- **よって，** $|S| \leq |N(S)|$ **でないといけない**

トランプ・マジック (？) のからくり：条件の確認 (続き)

つまり，Hall の結婚定理にある条件が必ず成り立つ．



- **つまり，A を飽和するマッチングが存在**
- **そこから，各グループでどのカードを選べばよいかが分かる** □

目次

今日のまとめ

今日の目標

- 二部グラフに対しては必ず

  最大マッチングの辺数 = 最小頂点被覆の頂点数

  が成り立つことを証明する (Kőnig–Egerváry の定理)
- 二部グラフが完全マッチングを持つための必要十分条件を証明する (Hall の結婚定理)
  - Kőnig–Egerváry の定理を使った証明
- Hall の結婚定理の応用を見る

目次