

数理解析 第 11 回
マッチング

岡本 吉央
okamotoy@uec.ac.jp

電気通信大学

2013 年 12 月 10 日

最終更新 : 2013 年 12 月 9 日 15:54

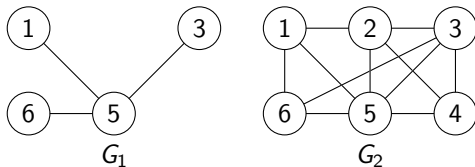
復習：部分グラフ

無向グラフ $G_1 = (V_1, E_1)$, $G_2 = (V_2, E_2)$

部分グラフとは？

G_1 が G_2 の部分グラフであるとは、次を満たすこと

- ▶ $V_1 \subseteq V_2$
- ▶ $E_1 \subseteq E_2$



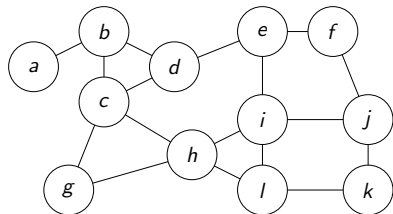
復習：誘導部分グラフ

無向グラフ $G = (V, E)$, 頂点部分集合 $U \subseteq V$

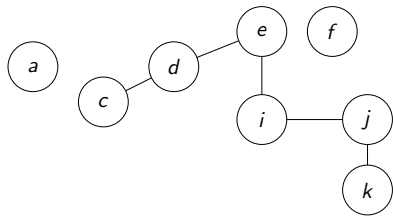
誘導部分グラフとは？

G において U が誘導する部分グラフとは、次で定義されるグラフ

- ▶ 頂点集合は U
- ▶ 辺集合は $\{\{u, v\} \in E \mid u, v \in U\}$



G



G の誘導部分グラフではない

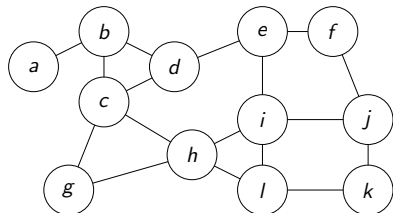
復習：誘導部分グラフ

無向グラフ $G = (V, E)$, 頂点部分集合 $U \subseteq V$

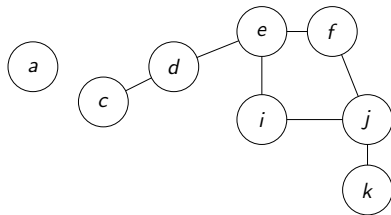
誘導部分グラフとは？

G において U が誘導する部分グラフとは、次で定義されるグラフ

- ▶ 頂点集合は U
- ▶ 辺集合は $\{\{u, v\} \in E \mid u, v \in U\}$



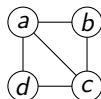
G



G の誘導部分グラフである

部分グラフと誘導部分グラフ (1)

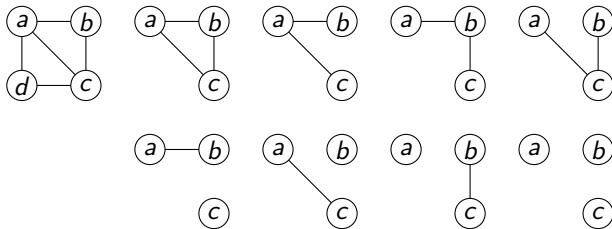
このグラフの部分グラフを考える



部分グラフはたくさんある

部分グラフと誘導部分グラフ (2)

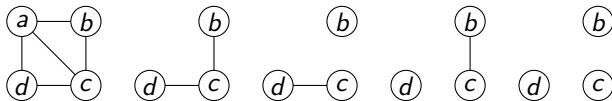
頂点集合を $\{a, b, c\}$ とする部分グラフは 8 個



この中で誘導部分グラフは 1 つだけ

部分グラフと誘導部分グラフ (3)

頂点集合を $\{b, c, d\}$ とする部分グラフは 4 個



この中で誘導部分グラフは 1 つだけ

目次

- ① グラフにおけるマッチング
- ② 最大マッチングと増加道
- ③ 最大マッチングと最小頂点被覆
- ④ 今日のまとめ

概要

今日の目標

「マッチング」を理解する

- ▶ マッチングの定義を理解する
- ▶ 最大マッチングと極大マッチングの違いを理解する
- ▶ 最大マッチングと増加道の関係を理解する
- ▶ 最大マッチングと最小頂点被覆の関係を理解する

重要な概念

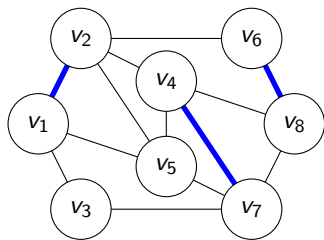
- ▶ 最適性の保証 \rightsquigarrow 最適化の基礎

グラフにおけるマッチング

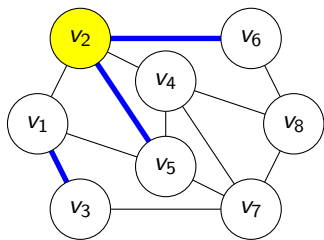
無向グラフ $G = (V, E)$

マッチングとは？

G の**マッチング**とは辺部分集合 $M \subseteq E$ で、
 M のどの2辺も同じ頂点に接続しないもの



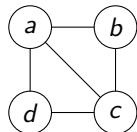
$\{\{v_1, v_2\}, \{v_4, v_7\}, \{v_6, v_8\}\}$ は
 マッチングである



$\{\{v_1, v_3\}, \{v_2, v_5\}, \{v_2, v_6\}\}$ は
 マッチングではない

グラフにおけるすべてのマッチング

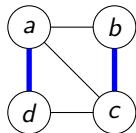
このグラフのマッチングは以下のもの



- ▶ \emptyset
- ▶ $\{\{a, b\}\}$
- ▶ $\{\{a, c\}\}$
- ▶ $\{\{a, d\}\}$
- ▶ $\{\{b, c\}\}$
- ▶ $\{\{c, d\}\}$
- ▶ $\{\{a, b\}, \{c, d\}\}$
- ▶ $\{\{a, d\}, \{b, c\}\}$

グラフにおけるすべてのマッチング

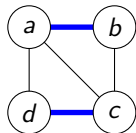
このグラフのマッチングは以下のもの



- ▶ \emptyset
- ▶ $\{\{a, b\}\}$
- ▶ $\{\{a, c\}\}$
- ▶ $\{\{a, d\}\}$
- ▶ $\{\{b, c\}\}$
- ▶ $\{\{c, d\}\}$
- ▶ $\{\{a, b\}, \{c, d\}\}$
- ▶ $\{\{a, d\}, \{b, c\}\}$

グラフにおけるすべてのマッチング

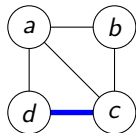
このグラフのマッチングは以下のもの



- ▶ \emptyset
- ▶ $\{\{a, b\}\}$
- ▶ $\{\{a, c\}\}$
- ▶ $\{\{a, d\}\}$
- ▶ $\{\{b, c\}\}$
- ▶ $\{\{c, d\}\}$
- ▶ $\{\{a, b\}, \{c, d\}\}$
- ▶ $\{\{a, d\}, \{b, c\}\}$

グラフにおけるすべてのマッチング

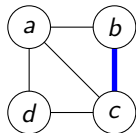
このグラフのマッチングは以下のもの



- ▶ \emptyset
- ▶ $\{\{a, b\}\}$
- ▶ $\{\{a, c\}\}$
- ▶ $\{\{a, d\}\}$
- ▶ $\{\{b, c\}\}$
- ▶ $\{\{c, d\}\}$
- ▶ $\{\{a, b\}, \{c, d\}\}$
- ▶ $\{\{a, d\}, \{b, c\}\}$

グラフにおけるすべてのマッチング

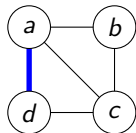
このグラフのマッチングは以下のもの



- ▶ \emptyset
- ▶ $\{\{a, b\}\}$
- ▶ $\{\{a, c\}\}$
- ▶ $\{\{a, d\}\}$
- ▶ $\{\{b, c\}\}$
- ▶ $\{\{c, d\}\}$
- ▶ $\{\{a, b\}, \{c, d\}\}$
- ▶ $\{\{a, d\}, \{b, c\}\}$

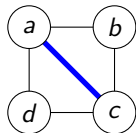
グラフにおけるすべてのマッチング

このグラフのマッチングは以下のもの



- ▶ \emptyset
- ▶ $\{\{a, b\}\}$
- ▶ $\{\{a, c\}\}$
- ▶ $\{\{a, d\}\}$
- ▶ $\{\{b, c\}\}$
- ▶ $\{\{c, d\}\}$
- ▶ $\{\{a, b\}, \{c, d\}\}$
- ▶ $\{\{a, d\}, \{b, c\}\}$

グラフにおけるすべてのマッチング

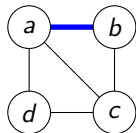


このグラフのマッチングは以下のもの

- ▶ \emptyset
- ▶ $\{\{a, b\}\}$
- ▶ $\{\{a, c\}\}$
- ▶ $\{\{a, d\}\}$
- ▶ $\{\{b, c\}\}$
- ▶ $\{\{c, d\}\}$
- ▶ $\{\{a, b\}, \{c, d\}\}$
- ▶ $\{\{a, d\}, \{b, c\}\}$

グラフにおけるすべてのマッチング

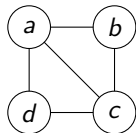
このグラフのマッチングは以下のもの



- ▶ \emptyset
- ▶ $\{\{a, b\}\}$
- ▶ $\{\{a, c\}\}$
- ▶ $\{\{a, d\}\}$
- ▶ $\{\{b, c\}\}$
- ▶ $\{\{c, d\}\}$
- ▶ $\{\{a, b\}, \{c, d\}\}$
- ▶ $\{\{a, d\}, \{b, c\}\}$

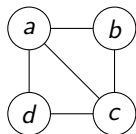
グラフにおけるすべてのマッチング

このグラフのマッチングは以下のもの

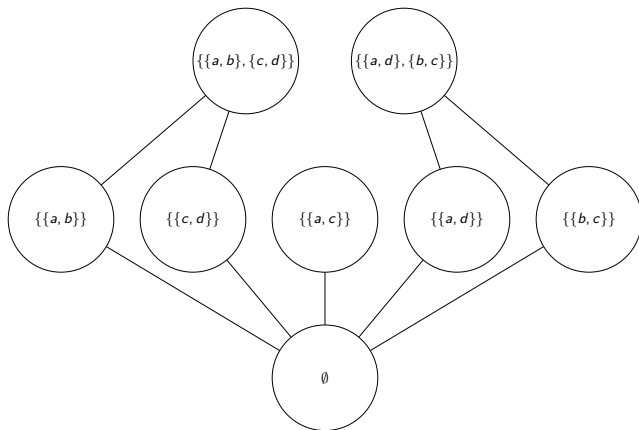


- ▶ \emptyset
- ▶ $\{\{a, b\}\}$
- ▶ $\{\{a, c\}\}$
- ▶ $\{\{a, d\}\}$
- ▶ $\{\{b, c\}\}$
- ▶ $\{\{c, d\}\}$
- ▶ $\{\{a, b\}, \{c, d\}\}$
- ▶ $\{\{a, d\}, \{b, c\}\}$

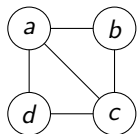
グラフにおけるすべてのマッチング：ハッセ図 (1)



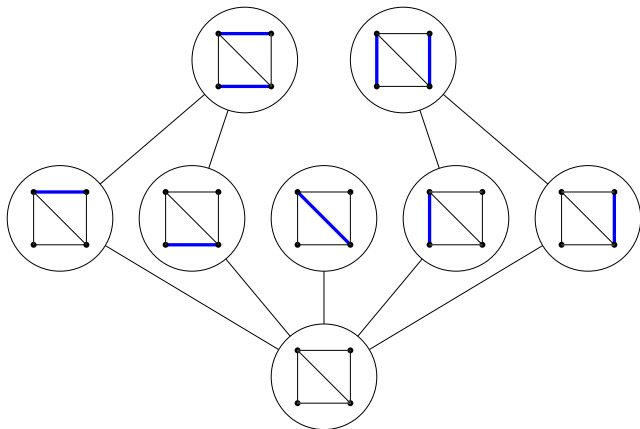
このグラフのすべてのマッチングを
包含関係に関してハッセ図にしたものが
下の図



グラフにおけるすべてのマッチング：ハッセ図 (2)



このグラフのすべてのマッチングを
包含関係に関してハッセ図にしたものが
下の図

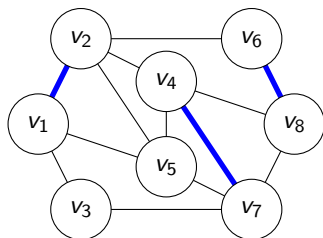


最大マッチング

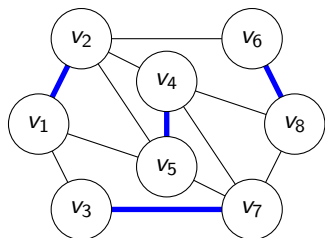
無向グラフ $G = (V, E)$

最大マッチングとは？

G の最大マッチングとは G のマッチング $M \subseteq E$ で、
 G の任意のマッチング M' に対して $|M| \geq |M'|$ を満たすもの

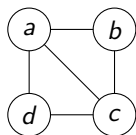


最大マッチングではない

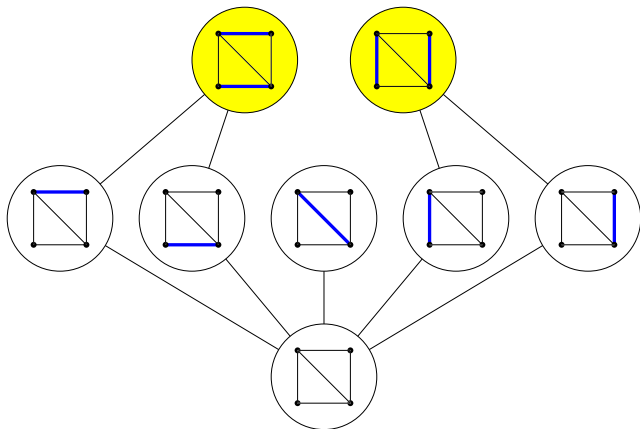


最大マッチングである

最大マッチング：ハッセ図において



黄色のマッチングが最大マッチング

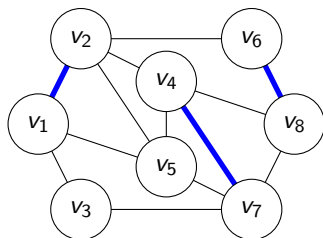


極大マッチング

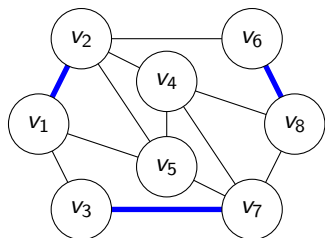
無向グラフ $G = (V, E)$

極大マッチングとは？

G の極大マッチングとは G のマッチング $M \subseteq E$ で、
任意の辺 $e \in E - M$ に対して $M \cup \{e\}$ が G のマッチングではないもの

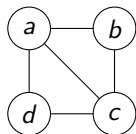


極大マッチングである

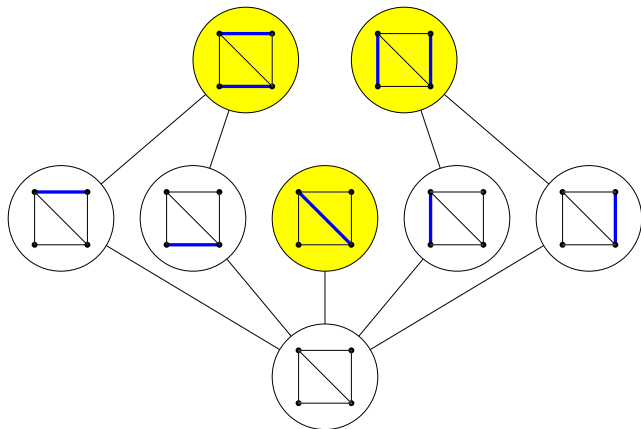


極大マッチングではない

極大マッチング：ハッセ図において



黄色のマッチングが極大マッチング

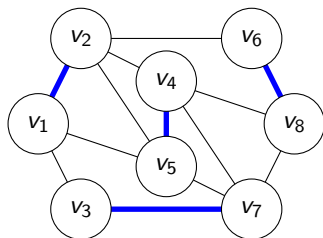


完全マッチング

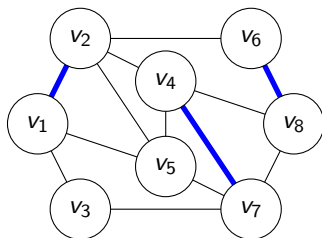
無向グラフ $G = (V, E)$

完全マッチングとは？

G の完全マッチングとは G のマッチング $M \subseteq E$ で、
 G の任意の頂点に M のある辺が接続しているもの



完全マッチングである

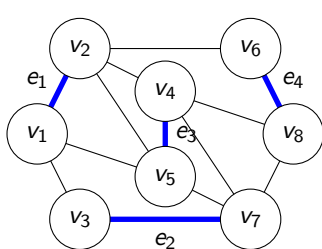


完全マッチングではない

完全マッチングの辺数

無向グラフ $G = (V, E)$

完全マッチングの辺数は？

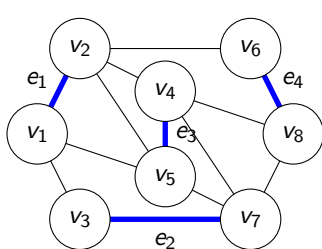
 $M \subseteq E$ が G の完全マッチング $\Rightarrow |V| = 2|M|$ 証明の着想：数え上げ論法

$M \setminus V$	v_1	v_2	v_3	v_4	v_5	v_6	v_7	v_8
e_1	1	1						
e_2				1				1
e_3					1	1		
e_4							1	1

完全マッチングの辺数

無向グラフ $G = (V, E)$

完全マッチングの辺数は？

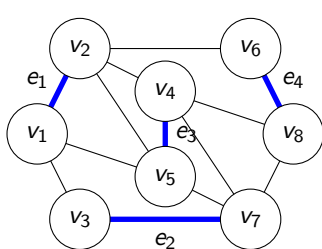
 $M \subseteq E$ が G の完全マッチング $\Rightarrow |V| = 2|M|$ 証明の着想：数え上げ論法

$M \setminus V$	v_1	v_2	v_3	v_4	v_5	v_6	v_7	v_8	
e_1	1	1							= 2
e_2			1				1		= 2
e_3				1	1				= 2
e_4						1		1	= 2

完全マッチングの辺数

無向グラフ $G = (V, E)$

完全マッチングの辺数は？

 $M \subseteq E$ が G の完全マッチング $\Rightarrow |V| = 2|M|$ 証明の着想：数え上げ論法

$M \setminus V$	v_1	v_2	v_3	v_4	v_5	v_6	v_7	v_8	
e_1	1	1							= 2
e_2			1				1		= 2
e_3				1	1				= 2
e_4						1		1	= 2
	└┘	└┘	└┘	└┘	└┘	└┘	└┘	└┘	

完全マッチングの辺数：証明

無向グラフ $G = (V, E)$

完全マッチングの辺数は？

 $M \subseteq E$ が G の完全マッチング $\Rightarrow |V| = 2|M|$ 証明：

- ▶ M は完全マッチングなので，各 $v \in V$ に接続する M の辺の数は 1

$$\therefore |\{(v, e) \in V \times M \mid v \in e\}| = \sum_{v \in V} 1 = |V|$$

完全マッチングの辺数：証明

無向グラフ $G = (V, E)$

完全マッチングの辺数は？

 $M \subseteq E$ が G の完全マッチング $\Rightarrow |V| = 2|M|$

証明：

- ▶ M は完全マッチングなので，各 $v \in V$ に接続する M の辺の数は 1

$$\therefore |\{(v, e) \in V \times M \mid v \in e\}| = \sum_{v \in V} 1 = |V|$$

- ▶ 各 $e \in M$ に接続する V の頂点数は 2

$$\therefore |\{(v, e) \in V \times M \mid v \in e\}| = \sum_{e \in M} 2 = 2|M|$$

完全マッチングの辺数：証明

無向グラフ $G = (V, E)$

完全マッチングの辺数は？

 $M \subseteq E$ が G の完全マッチング $\Rightarrow |V| = 2|M|$

証明：

- ▶ M は完全マッチングなので，各 $v \in V$ に接続する M の辺の数は 1

$$\therefore |\{(v, e) \in V \times M \mid v \in e\}| = \sum_{v \in V} 1 = |V|$$

- ▶ 各 $e \in M$ に接続する V の頂点数は 2

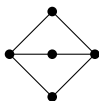
$$\therefore |\{(v, e) \in V \times M \mid v \in e\}| = \sum_{e \in M} 2 = 2|M|$$

- ▶ $\therefore |V| = |\{(v, e) \in V \times M \mid v \in e\}| = 2|M|$

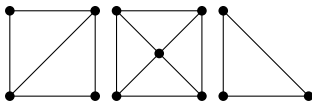
□

完全マッチングと最大マッチングの関係

- ▶ 完全マッチングを持たないグラフもある
 - ▶ 例えば，頂点数が奇数のグラフ

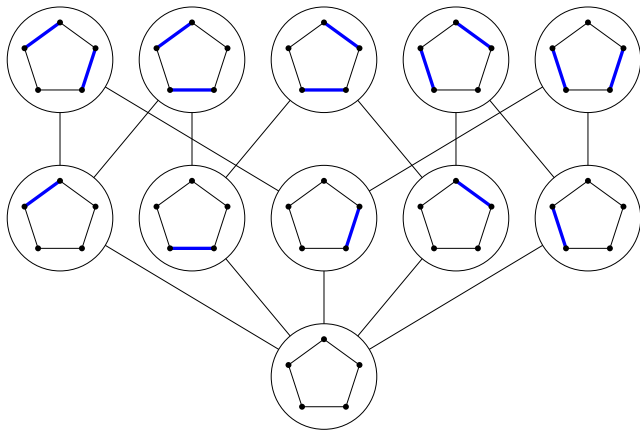


- ▶ 例えば，頂点数が奇数の連結成分を持つグラフ



- ▶ 頂点数が偶数である連結グラフでもそのようなものがある (演習問題)
- ▶ 完全マッチングを持つグラフにおいて，
完全マッチングは最大マッチングである (演習問題)

完全マッチングを持たないグラフと最大マッチング



最大マッチングと極大マッチングの関係

無向グラフ $G = (V, E)$

最大マッチングは極大マッチングである

 $M \subseteq E$ が G の最大マッチング $\Rightarrow M$ は G の極大マッチング証明 (背理法による) : M を G の最大マッチングとする

- ▶ M が G の極大マッチングではないと仮定する

- ▶

- ▶

- ▶ これは 矛盾 □

標語的なまとめ

 M が完全マッチング $\Rightarrow M$ が最大マッチング $\Rightarrow M$ が極大マッチング

最大マッチングと極大マッチングの関係

無向グラフ $G = (V, E)$

最大マッチングは極大マッチングである

$M \subseteq E$ が G の最大マッチング $\Rightarrow M$ は G の極大マッチング

証明 (背理法による) : M を G の最大マッチングとする

- ▶ M が G の極大マッチングではないと仮定する
- ▶ 極大マッチングの定義より,
ある $e \in E - M$ が存在して, $M \cup \{e\}$ は G のマッチング
- ▶
- ▶ これは 矛盾 □

標語的なまとめ

M が完全マッチング $\Rightarrow M$ が最大マッチング $\Rightarrow M$ が極大マッチング

最大マッチングと極大マッチングの関係

無向グラフ $G = (V, E)$

最大マッチングは極大マッチングである

$M \subseteq E$ が G の最大マッチング $\Rightarrow M$ は G の極大マッチング

証明 (背理法による) : M を G の最大マッチングとする

- ▶ M が G の極大マッチングではないと仮定する
- ▶ 極大マッチングの定義より,
ある $e \in E - M$ が存在して, $M \cup \{e\}$ は G のマッチング
- ▶ $|M \cup \{e\}| = |M| + 1 > |M|$
- ▶ これは 矛盾 □

標語的なまとめ

M が完全マッチング $\Rightarrow M$ が最大マッチング $\Rightarrow M$ が極大マッチング

最大マッチングと極大マッチングの関係

無向グラフ $G = (V, E)$

最大マッチングは極大マッチングである

$M \subseteq E$ が G の最大マッチング $\Rightarrow M$ は G の極大マッチング

証明 (背理法による) : M を G の最大マッチングとする

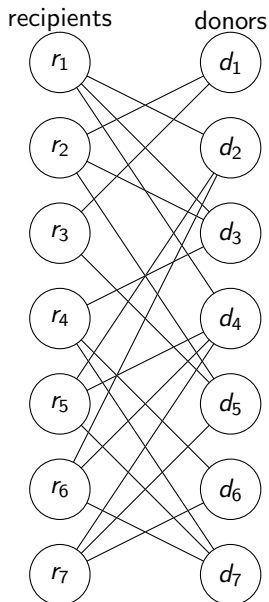
- ▶ M が G の極大マッチングではないと仮定する
- ▶ 極大マッチングの定義より,
ある $e \in E - M$ が存在して, $M \cup \{e\}$ は G のマッチング
- ▶ $|M \cup \{e\}| = |M| + 1 > |M|$
- ▶ これは M が最大マッチングであることに矛盾 □

標語的なまとめ

M が完全マッチング $\Rightarrow M$ が最大マッチング $\Rightarrow M$ が極大マッチング

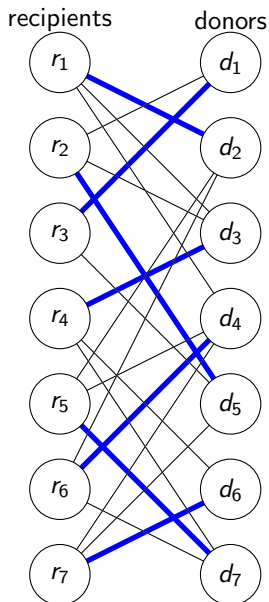
マッチングの応用例：腎交換 (kidney exchange)

- ▶ 腎臓病患者は腎臓を望んでいる
- ▶ 近親者や配偶者が腎臓を提供することが多い
- ▶ しかし、不適合により不可能であることもある
- ▶ そのとき、患者 (recipient) と提供者 (donor) をペアとして登録
- ▶ 登録されたペア全体の中で適合・不適合の確認
- ▶ \rightsquigarrow グラフの構成
- ▶ マッチング：可能な腎臓提供



マッチングの応用例：腎交換 (kidney exchange)

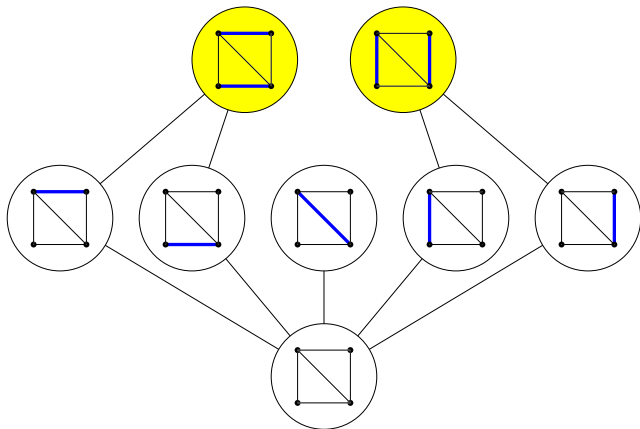
- ▶ 腎臓病患者は腎臓を望んでいる
- ▶ 近親者や配偶者が腎臓を提供することが多い
- ▶ しかし、不適合により不可能であることもある
- ▶ そのとき、患者 (recipient) と提供者 (donor) をペアとして登録
- ▶ 登録されたペア全体の中で適合・不適合の確認
- ▶ ⇨ グラフの構成
- ▶ マッチング：可能な腎臓提供



目次

- ① グラフにおけるマッチング
- ② **最大マッチングと増加道**
- ③ 最大マッチングと最小頂点被覆
- ④ 今日のまとめ

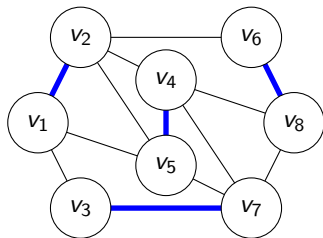
最大マッチングをどのように見つければよい？



辺を1つずつ追加していくような方法では、
 極大マッチングを見つけることはできるが、
 最大マッチングを見つけられるとは限らない

最大性の確認法？

このマッチングが最大マッチングであることを確認するには
どうしたらよいか？



格言

ある性質を持つものを発見する方法を考えるときには
その性質を持つことを確認する方法をまず考える

最大性の確認法

格言 (再掲)

ある性質を持つものを発見する方法を考えるときには
その性質を持つことを確認する方法をまず考える

なぜ？

- ▶ 確認は発見より難しくない
- ▶ 確認法から発見法に対する道筋が見えることもある

最大性の確認法

2つ紹介する

- 1 増加道を用いる方法
- 2 頂点被覆を用いる方法

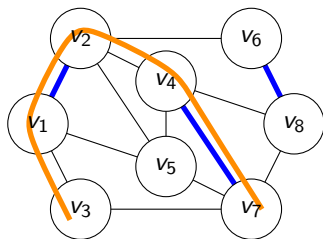
2つとも重要

交互道

無向グラフ $G = (V, E)$, マッチング $M \subseteq E$

交互道とは？

M に関する**交互道**とは, G における道 v_1, \dots, v_k で ($k \geq 1$) ,
 M の辺と $E - M$ の辺が交互に現れるもの



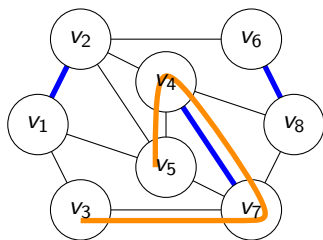
v_3, v_1, v_2, v_4, v_7 は青のマッチングに関する交互道

増加道

無向グラフ $G = (V, E)$, マッチング $M \subseteq E$

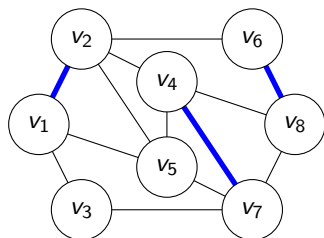
増加道とは？

M に関する**増加道**とは, M に関する交互道 v_1, \dots, v_k で ($k \geq 1$) , v_1 と v_k が M の辺と接続しないもの



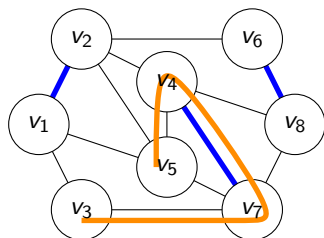
v_3, v_7, v_4, v_5 は青のマッチングに関する増加道

増加道に沿ってマッチングを大きくする



辺数3の
マッチング

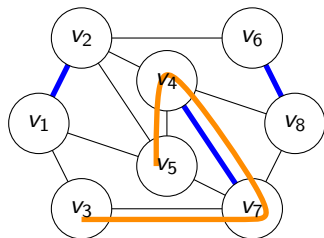
増加道に沿ってマッチングを大きくする



辺数 3 の
マッチング

増加道

増加道に沿ってマッチングを大きくする



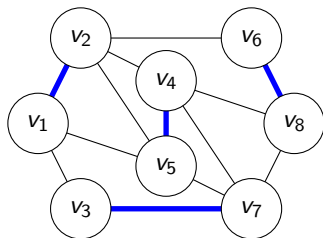
辺数 3 の
マッチング

〜

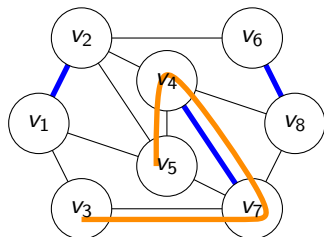
増加道に沿って
大きくする

〜

辺数 4 の
マッチング



増加道に沿ってマッチングを大きくする



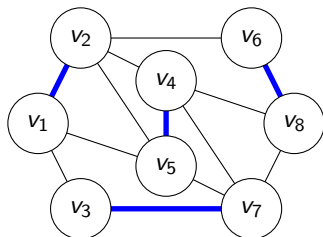
辺数 3 の
マッチング



増加道に沿って
大きくする



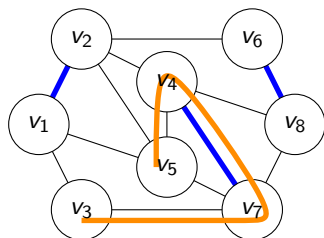
辺数 4 の
マッチング



つまり

M に関する増加道が存在する $\Rightarrow M$ は最大マッチングではない

増加道に沿ってマッチングを大きくする



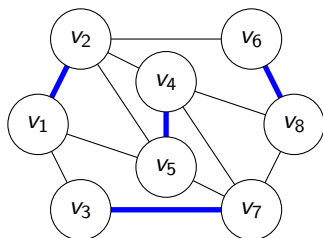
辺数 3 の
マッチング

~>

増加道に沿って
大きくする

~>

辺数 4 の
マッチング



つまり

M に関する増加道が存在する $\Rightarrow M$ は最大マッチングではない

つまり (対偶を考えると)

M は最大マッチングである $\Rightarrow M$ に関する増加道が存在しない

最大マッチングと増加道

無向グラフ $G = (V, E)$, マッチング $M \subseteq E$

最大マッチングと増加道の関係

(Berge '57)

M が G の最大マッチング $\Leftrightarrow M$ に関する増加道が存在しない

「 \Rightarrow 」の証明：演習問題 (前ページのスライドがヒント)

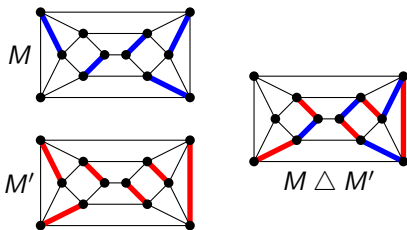
「 \Leftarrow 」の証明：対偶を証明する

- ▶ M が G の最大マッチングではないと仮定
- ▶ M' を G の最大マッチングとする
- ▶ つまり, $|M'| > |M|$
- ▶ ここを今から埋めていく
- ▶ $\therefore M$ に関する増加道が存在する



最大マッチングと増加道：証明 (続き 1)

M と M' の対称差 $M \triangle M'$ を考える



集合の対称差とは？

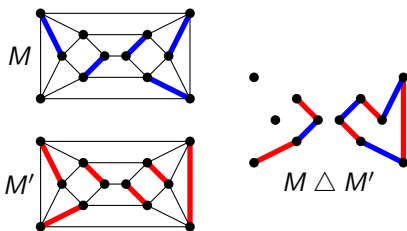
$$X \triangle Y = (X \cup Y) - (X \cap Y)$$

格言

対称差で2つの集合の違いが見える

最大マッチングと増加道：証明 (続き 2)

M と M' の対称差 $M \triangle M'$ を考える



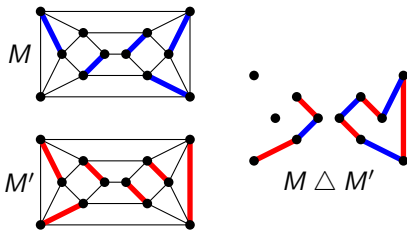
グラフ $(V, M \triangle M')$ の各頂点の次数は 0 か 1 か 2

このグラフ $(V, M \triangle M')$ の連結成分は何か？

- ▶ 次数 0 の頂点を持つ連結成分 \rightsquigarrow 孤立点
- ▶ 次数 1 の頂点を持つ連結成分 \rightsquigarrow 道
- ▶ 次数 2 の頂点だけから成る連結成分 \rightsquigarrow 閉路
 - ▶ M と M' の辺が交互に現れるので，その長さは偶数

最大マッチングと増加道：証明 (続き 3)

M と M' の対称差 $M \triangle M'$ を考える



グラフ $(V, M \triangle M')$ の連結成分は孤立点か，道か，長さ偶数の閉路である

このグラフ $(V, M \triangle M')$ 中の状況を考える

- ▶ 長さ偶数の閉路において， M の辺の数 = M' の辺の数
- ▶ $|M'| > |M|$ なので，ある道において， M の辺の数 < M' の辺の数

この道は M に関する増加道!!!

最大マッチングと増加道：証明 (完成)

「 \Leftarrow 」の証明：対偶を証明する

- ▶ M が G の最大マッチングではないと仮定
- ▶ M' を G の最大マッチングとする
- ▶ つまり, $|M'| > |M|$

- ▶ $\therefore P$ は G において M に関する増加道である



最大マッチングと増加道：証明 (完成)

「 \Leftarrow 」の証明：対偶を証明する

- ▶ M が G の最大マッチングではないと仮定
- ▶ M' を G の最大マッチングとする
- ▶ つまり, $|M'| > |M|$
- ▶ グラフ $(V, M \Delta M')$ を考える

- ▶ $\therefore P$ は G において M に関する増加道である



最大マッチングと増加道：証明 (完成)

「 \Leftarrow 」の証明：対偶を証明する

- ▶ M が G の最大マッチングではないと仮定
 - ▶ M' を G の最大マッチングとする
 - ▶ つまり, $|M'| > |M|$
 - ▶ グラフ $(V, M \Delta M')$ を考える
 - ▶ 各頂点の次数は 2 以下であり, M の辺と M' の辺が交互に現れる
 - ▶ \therefore 各連結成分は孤立点か, 道か, 長さ偶数の閉路である
-
- ▶ $\therefore P$ は G において M に関する増加道である □

最大マッチングと増加道：証明 (完成)

「 \Leftarrow 」の証明：対偶を証明する

- ▶ M が G の最大マッチングではないと仮定
- ▶ M' を G の最大マッチングとする
- ▶ つまり, $|M'| > |M|$
- ▶ グラフ $(V, M \triangle M')$ を考える
 - ▶ 各頂点の次数は 2 以下であり, M の辺と M' の辺が交互に現れる
 - ▶ \therefore 各連結成分は孤立点か, 道か, 長さ偶数の閉路である
 - ▶ 長さ偶数の閉路において, M の辺の数 = M' の辺の数
 - ▶ $|M'| > |M|$ なので, ある道 P において M の辺の数 $<$ M' の辺の数
 - ▶ P の端点は M の辺に接続していない
- ▶ $\therefore P$ は G において M に関する増加道である □

増加道の重要性：アルゴリズム

増加道で「山登り」ができる

増加道に基づく最大マッチング発見アルゴリズム (雛形)

- ▶ 入力：無向グラフ $G = (V, E)$
 - ▶ 出力： G の最大マッチング M
- 1 $M := \emptyset$ とする
 - 2 while M に関する増加道 P が存在する do
 - ① P に沿って M を大きくする
 - 3 M を出力

先ほどの定理 (Berge) によって，
このアルゴリズムは必ず停止し，最大マッチングを出力することが分かる

格言

アルゴリズムは数学的構造が導く

目次

- ① グラフにおけるマッチング
- ② 最大マッチングと増加道
- ③ 最大マッチングと最小頂点被覆**
- ④ 今日のまとめ

最大性の確認法 (再掲)

格言 (再掲)

ある性質を持つものを発見する方法を考えるとときには
その性質を持つことを確認する方法をまず考える

なぜ？

- ▶ 確認は発見より難しくない
- ▶ 確認法から発見法に対する道筋が見えることもある

最大性の確認法

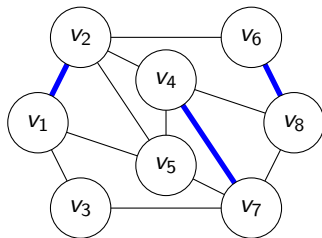
2つ紹介する

- 1 増加道を用いる方法
- 2 頂点被覆を用いる方法

2つとも重要

非最大性の証拠？

このマッチングが最大マッチングで**ない**ことを確認するには
 どうしたらよいか？



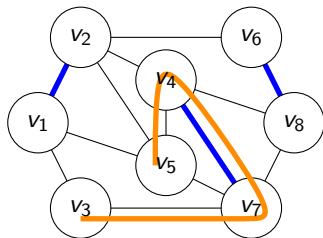
増加道を見つければよい

別の言い方

1つの増加道がマッチングの非最大性に対する**証拠**になっている

非最大性の証拠？

このマッチングが最大マッチングで**ない**ことを確認するには
 どうしたらよいか？



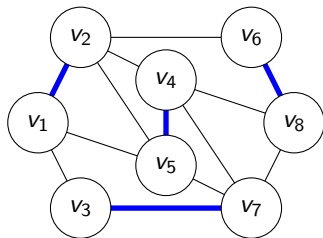
増加道を見つければよい

別の言い方

1つの増加道がマッチングの非最大性に対する**証拠**になっている

最大性の証拠？

このマッチングが最大マッチングであることを確認するには
どうしたらよいか？



増加道がないことを言えばよいが，どのようにして言えばよいのか？

別の言い方

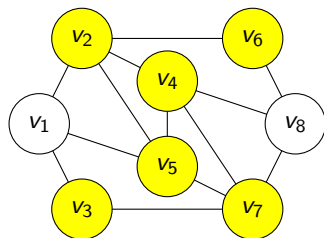
マッチングの最大性に対する**証拠**はあるのか？

頂点被覆

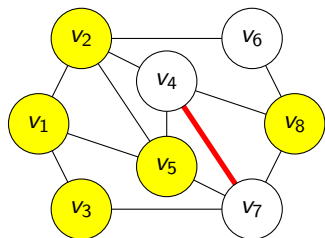
無向グラフ $G = (V, E)$

頂点被覆とは？

G の頂点被覆とは頂点部分集合 $C \subseteq V$ で、
 G のどの辺もある C の頂点に接続しているもの



$\{v_2, v_3, v_4, v_5, v_6, v_7\}$ は
頂点被覆である



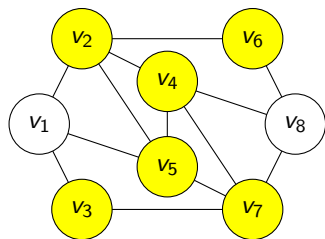
$\{v_1, v_2, v_3, v_5, v_8\}$ は
頂点被覆ではない

最小頂点被覆

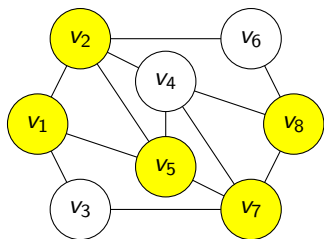
無向グラフ $G = (V, E)$

最小頂点被覆とは？

G の**最小頂点被覆**とは頂点被覆 $C \subseteq V$ で、
 G の任意の頂点被覆 C' に対して $|C| \leq |C'|$ を満たすもの



$\{v_2, v_3, v_4, v_5, v_6, v_7\}$ は
最小頂点被覆ではない



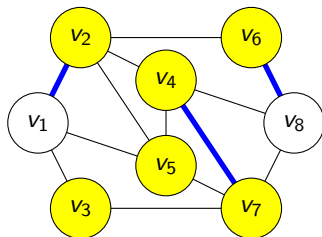
$\{v_1, v_2, v_5, v_7, v_8\}$ は
最小頂点被覆である

マッチングと頂点被覆の関係

無向グラフ $G = (V, E)$

マッチングと頂点被覆の関係 (重要)

M が G のマッチング
 C が G の頂点被覆 $\Rightarrow |M| \leq |C|$

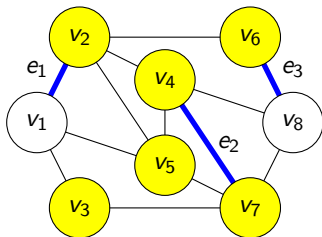
例 : $|M| = 3, |C| = 6$ 

マッチングと頂点被覆の関係：証明の着想

無向グラフ $G = (V, E)$

マッチングと頂点被覆の関係 (重要)

M が G のマッチング
 C が G の頂点被覆 $\Rightarrow |M| \leq |C|$

証明の着想：数え上げ論法による

M	C						
	v_2	v_3	v_4	v_5	v_6	v_7	
e_1	1						
e_2			1				1
e_3						1	

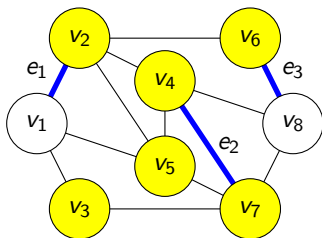
マッチングと頂点被覆の関係：証明の着想

無向グラフ $G = (V, E)$

マッチングと頂点被覆の関係 (重要)

M が G のマッチング
 C が G の頂点被覆 $\Rightarrow |M| \leq |C|$

証明の着想：数え上げ論法による



M	C							
	v_2	v_3	v_4	v_5	v_6	v_7		
e_1	1						≥ 1	
e_2			1			1	≥ 1	
e_3					1		≥ 1	

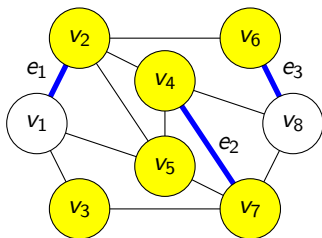
マッチングと頂点被覆の関係：証明の着想

無向グラフ $G = (V, E)$

マッチングと頂点被覆の関係 (重要)

M が G のマッチング
 C が G の頂点被覆 $\Rightarrow |M| \leq |C|$

証明の着想：数え上げ論法による



$M \setminus C$	v_2	v_3	v_4	v_5	v_6	v_7	
e_1	1						≥ 1
e_2			1		1		≥ 1
e_3					1		≥ 1
	\wedge	\wedge	\wedge	\wedge	\wedge	\wedge	
	\vdash	\vdash	\vdash	\vdash	\vdash	\vdash	

マッチングと頂点被覆の関係：証明

無向グラフ $G = (V, E)$

マッチングと頂点被覆の関係 (重要)

M が G のマッチング
 C が G の頂点被覆 $\Rightarrow |M| \leq |C|$

証明：数え上げ論法による

- ▶ M はマッチングなので， C の各頂点に接続する M の辺の数は 1 以下

$$\therefore |\{(v, e) \in C \times M \mid v \in e\}| \leq \sum_{v \in C} 1 = |C|$$

- ▶ C は頂点被覆なので， M の各辺に接続する C の頂点の数は 1 以上

$$\therefore |\{(v, e) \in C \times M \mid v \in e\}| \geq \sum_{e \in M} 1 = |M|$$

- ▶ $\therefore |M| \leq |\{(v, e) \in C \times M \mid v \in e\}| \leq |C|$

□

マッチングと頂点被覆の関係：帰結

無向グラフ $G = (V, E)$

マッチングと頂点被覆の関係 (重要)

 M が G のマッチング C が G の頂点被覆

$$\Rightarrow |M| \leq |C|$$

マッチングと頂点被覆の関係：帰結

無向グラフ $G = (V, E)$

マッチングと頂点被覆の関係 (重要)

M が G のマッチング
 C が G の頂点被覆 $\Rightarrow |M| \leq |C|$

最大マッチングと頂点被覆の関係

M が G の最大マッチング
 C が G の頂点被覆 $\Rightarrow |M| \leq |C|$

マッチングと頂点被覆の関係：帰結

無向グラフ $G = (V, E)$

マッチングと頂点被覆の関係 (重要)

M が G のマッチング
 C が G の頂点被覆 $\Rightarrow |M| \leq |C|$

最大マッチングと頂点被覆の関係

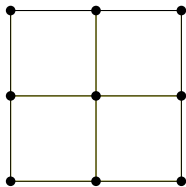
M が G の最大マッチング
 C が G の頂点被覆 $\Rightarrow |M| \leq |C|$

最大マッチングと最小頂点被覆の関係 (弱双対性)

M が G の最大マッチング
 C が G の最小頂点被覆 $\Rightarrow |M| \leq |C|$

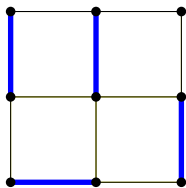
頂点被覆の重要性

次のグラフの最大マッチングの辺数はいくつですか？



頂点被覆の重要性

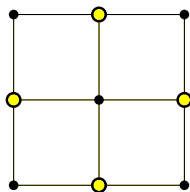
次のグラフの最大マッチングの辺数はいくつですか？



最大マッチングの辺数 ≥ 4

頂点被覆の重要性 (続き)

次のグラフの最大マッチングの辺数はいくつですか？

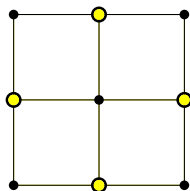


これは頂点被覆なので、

最小頂点被覆の頂点数 ≤ 4

頂点被覆の重要性 (続き)

次のグラフの最大マッチングの辺数はいくつですか？

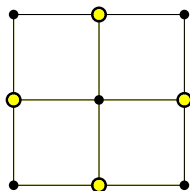


これは頂点被覆なので、

$$\text{最大マッチングの辺数} \leq \text{最小頂点被覆の頂点数} \leq 4$$

頂点被覆の重要性 (続き)

次のグラフの最大マッチングの辺数はいくつですか？



これは頂点被覆なので、

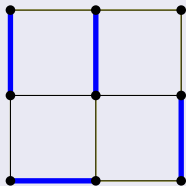
$$\text{最大マッチングの辺数} \leq \text{最小頂点被覆の頂点数} \leq 4$$

- ▶ したがって、最大マッチングの辺数 = 4 である!!!

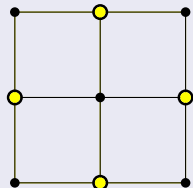
頂点被覆の重要性：今一度

次のグラフの最大マッチングの辺数はいくつ？

下界

最大マッチングの辺数 ≥ 4

上界

最大マッチングの辺数 ≤ 4 したがって、最大マッチングの辺数 $= 4$

格言

頂点被覆を見ることで、マッチングの最大性が保証される

頂点被覆の重要性：まとめ

次の2つを同時に行う

下界

辺数 k のマッチングを見つける

- ▶ このとき、
最大マッチングの辺数 $\geq k$

上界

頂点数 k の頂点被覆を見つける

- ▶ このとき、
最大マッチングの辺数 $\leq k$

よって、この2つができれば

最大マッチングの辺数 $= k$

頂点被覆の重要性：アルゴリズム

頂点被覆により，最適値の「挟み打ち」ができる

頂点被覆に基づく最大マッチング発見アルゴリズム（雛形）

- ▶ 入力：無向グラフ $G = (V, E)$
- ▶ 出力： G の最大マッチング M と最小頂点被覆 C

- 1 $M := \emptyset, C := \emptyset$ とする
- 2 while $|M| < |C|$ do
 - ① M を大きくするか， C を小さくする
- 3 M と C を出力

先ほどの考察より，このアルゴリズムが停止するならば，必ず最大マッチングと最小頂点被覆を出力することが分かる

問題点

停止しないかもしれない

次回行うこと

- ▶ 二部グラフに対しては，必ずこのアルゴリズムが停止する
- ▶ 言い換えると，二部グラフに対しては
最大マッチングの辺数 = 最小頂点被覆の頂点数
- ▶ この流れは最適化法の真髄

目次

- ① グラフにおけるマッチング
- ② 最大マッチングと増加道
- ③ 最大マッチングと最小頂点被覆
- ④ 今日のまとめ

今日のまとめ

今日の目標

「マッチング」を理解する

- ▶ マッチングの定義を理解する
- ▶ 最大マッチングと極大マッチングの違いを理解する
- ▶ 最大マッチングと増加道の関係を理解する
- ▶ 最大マッチングと最小頂点被覆の関係を理解する

重要な概念

- ▶ 最適性の保証 \rightsquigarrow 最適化の基礎

目次

- ① グラフにおけるマッチング
- ② 最大マッチングと増加道
- ③ 最大マッチングと最小頂点被覆
- ④ 今日のまとめ