数理解析 第 8 回
グラフにおける次数

岡本 吉央
okamotoy@uec.ac.jp

電気通信大学

2013 年 11 月 19 日

最終更新：2013 年 11 月 19 日　19:09

概要

目標

2 年前期「離散数学」の続編として**グラフ理論**を学び，

- 離散数学の基本的な考え方・態度を体得すること

なぜ講義で取り扱う？

- 離散数学はコンピュータ・サイエンスの基礎
- 「証明すること」に慣れる必要性 (論理的思考の訓練)
- 離散数学独特の論法の紹介

スケジュール 後半 (予定)

8 グラフにおける次数 (11/19)
9 道と閉路 (11/26)
10 木 (12/3)
11 マッチング (12/10)
* 山本野人先生担当分の試験 (12/17)
* 講義のない日 (12/24)
* 冬季休業 (12/31)
12 二部グラフのマッチング (1/7)
13 彩色 (1/14)
14 連結性 (1/21)
* 予備 (1/28)
* 期末試験 (2/18？)

注意：予定の変更もありうる

情報

教員

- 岡本 吉央 (おかもと よしお)
- 居室：西 4 号館 2 階 206 号室
- E-mail：okamotoy@uec.ac.jp
- Web：http://dopal.cs.uec.ac.jp/okamotoy/

講義資料

- Web：http://dopal.cs.uec.ac.jp/okamotoy/lect/2013/graphtheory/
- 注意：資料の印刷等は各学生が自ら行う
- 講義前日の 18:00 までに，ここに置かれる

講義資料

http://dopal.cs.uec.ac.jp/okamotoy/lect/2013/graphtheory/

- スライド
- 印刷用スライド：8 枚のスライドを 1 ページに収めたもの
- 演習問題
- 用語一覧

「印刷用スライド」と「演習問題」は各自印刷して持参すると便利

授業の進め方

講義 (75 分)

- スライドと板書で進める
- スライドのコピーに重要事項のメモを取る

演習 (15 分)

- 演習問題に取り組む
- 不明な点は教員に質問する

退室 (0 分) ←重要

- コメント (授業の感想，質問など) を紙に書いて提出する (匿名可)
- コメントとそれに対する回答は (匿名で) 講義ページに掲載される

オフィスアワー：金曜 5 限

- 質問など
- ただし，いないときもあるので注意

演習問題

演習問題の進め方

- 授業の最後 15 分は演習問題を解く時間
- 残った演習問題は復習・試験対策用
- 注意：「模範解答」のようなものは存在しない

演習問題の種類

- 復習問題：講義で取り上げた内容を反復
- 補足問題：講義で省略した内容を補足
- 追加問題：講義の内容に追加

解答の提出

- 演習問題の解答をレポートとして提出してもよい
- レポートは採点されない (成績に勘案されない)
- レポートは添削されて，返却される

評価

期末試験による

- 出題形式
  - 演習問題と同じ形式の問題を 4 題出題する
  - その中の 3 題は演習問題として提示されたものと同一である
  - 全問に解答する
- 配点：1 題 30 点満点，計 120 点満点
- 成績において，100 点以上は 100 点で打ち切り
  - 科目全体の成績は山本野人先生担当分と総合して判定
- 時間：90 分 (おそらく)
- 持ち込み：A4 用紙 1 枚分 (裏表自筆書き込み) のみ可

格言

格言 (三省堂 大辞林)

短い言葉で、人生の真理や処世術などを述べ、教えや戒めとした言葉。「石の上にも三年」「沈黙は金」など。金言。

格言 (この講義における)

講義内容とは直接関係ないかもしれないが，
私 (岡本) が重要だと思うこと

格言 (の例)

単位取得への最短の道のりは，授業に出て，演習問題を解くこと

教科書・参考書

教科書

- 指定しない

参考書

- R. J. ウィルソン (西関隆夫，西関裕子訳)，
「グラフ理論入門 原書第 4 版」，近代科学社，2001．
- J. A. Bondy, U. S. R. Murty (立花俊一，奈良知恵，田澤新成訳)，
「グラフ理論への入門」，共立出版，1991．
- N. ハーツフィールド，G. リンゲル (鈴木晋一訳)，
「グラフ理論入門」，サイエンス社，1992．
- R. ディーステル (根上生也，太田克弘訳)，
「グラフ理論」，シュプリンガー・フェアラーク東京，2000．

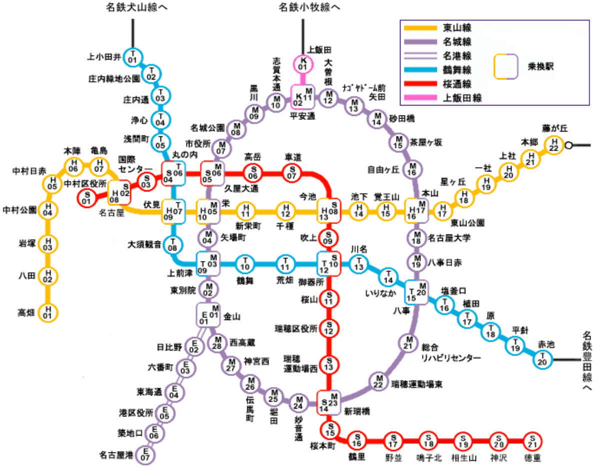
この講義の約束

- 私語はしない (ただし，演習時間の相談は OK)
- 携帯電話はマナーモードにする
- 携帯電話は使わない
- 音を立てて睡眠しない

約束が守られない場合は退席してもらう場合あり

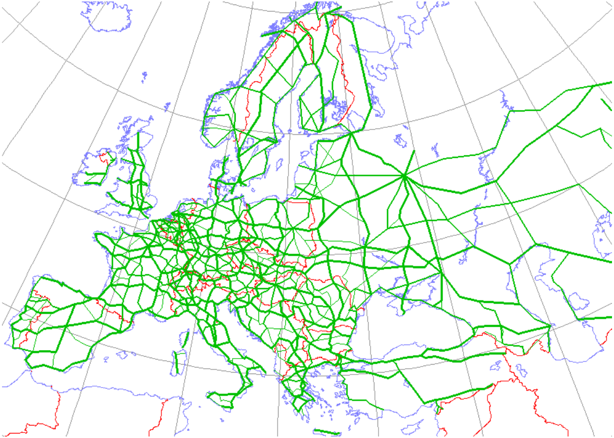
目次

路線図



http://www.kotsu.city.nagoya.jp/subway/sub_route.html

道路ネットワーク



http://en.wikipedia.org/wiki/File:International_E_Road_Network_green.png

輸送ネットワーク

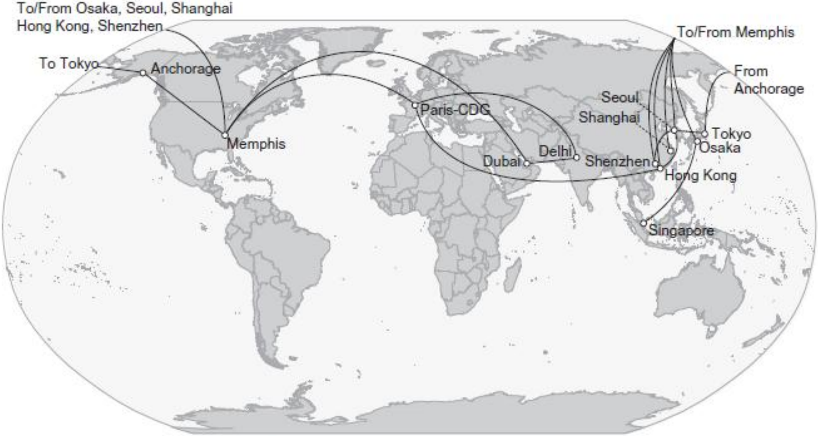
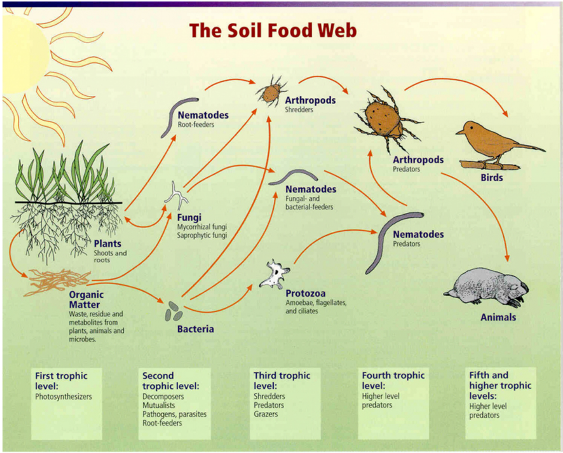


Fig. 8. FedEx Boeing 777-200LRF direct lanes. *Source*: FedEx (2011b).

J. T. Bowen Jr. (2012), J. Trans. Geography, 24, pp. 419–431

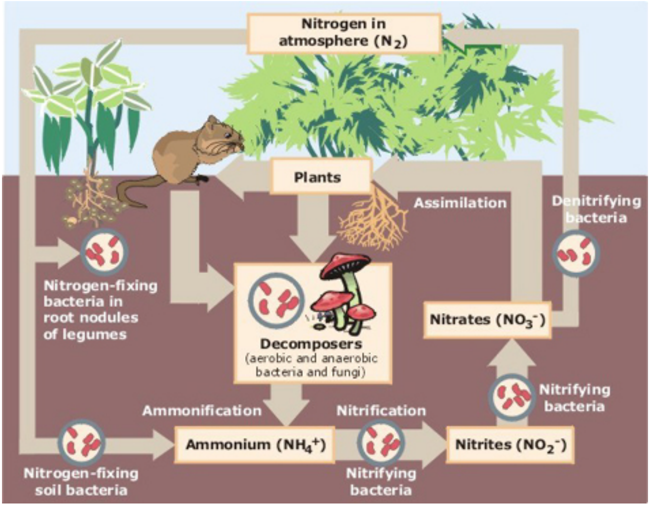
食物網



Relationships between soil food web, plants, organic matter, and birds and mammals
Image courtesy of USDA Natural Resources Conservation Service
http://soils.usda.gov/sqi/soil_quality/soil_biology/soil_food_web.html.

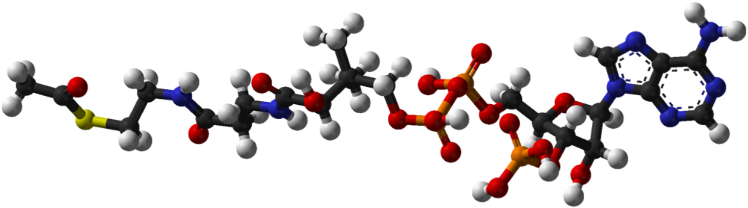
http://en.wikipedia.org/wiki/File:Soil_food_webUSDA.jpg

窒素循環



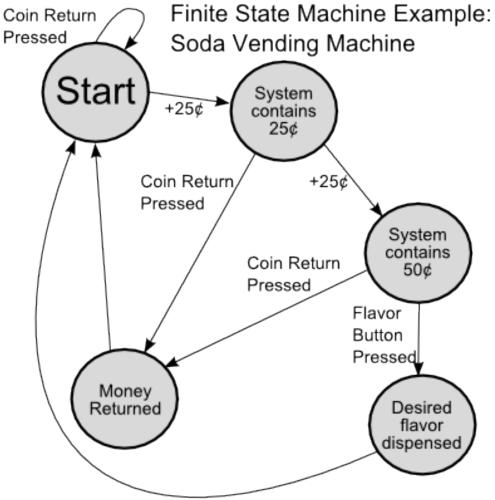
http://en.wikipedia.org/wiki/File:Nitrogen_Cycle.jpg

分子模型



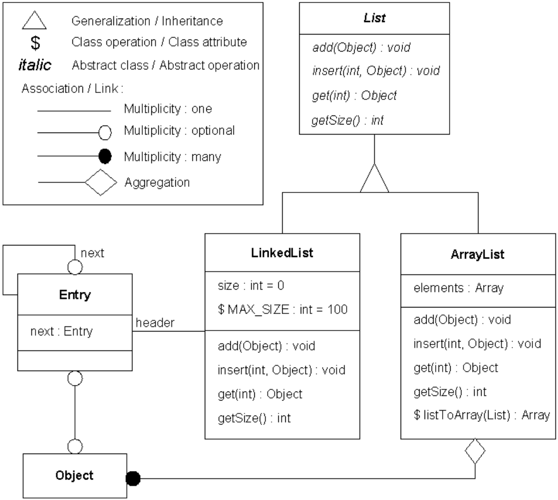
https://en.wikipedia.org/wiki/Acetyl-CoA

状態遷移図



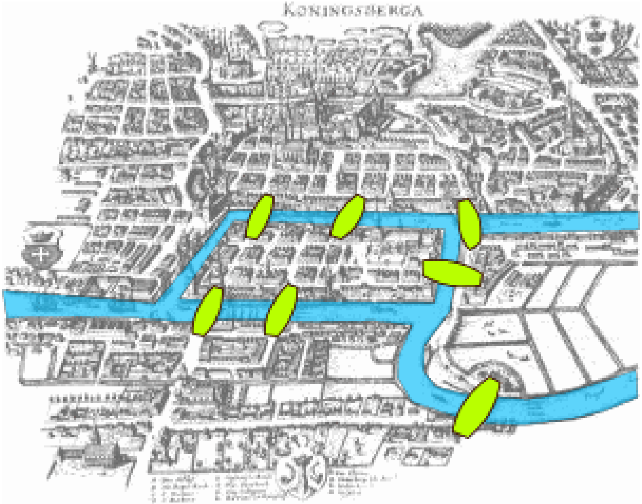
http://automatown.org/automata

オブジェクトモデル図



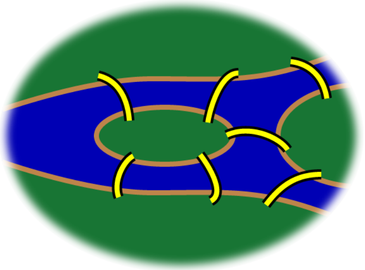
http://en.wikipedia.org/wiki/File:OMT_object_diagram.png

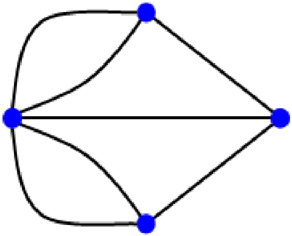
ケーニヒスベルクの橋の問題 (オイラー，1735 年)



http://en.wikipedia.org/wiki/File:Konigsberg_bridges.png

ケーニヒスベルクの橋の問題：続き





http://en.wikipedia.org/wiki/Seven_Bridges_of_Königsberg

これらの例に共通すること

間違った認識

現実世界にはたくさんグラフが存在する

正しい認識

現実世界にはたくさんグラフと見なせることが存在する

- 「グラフ」としてモデル化 $\leftarrow$ 数理モデル

その他の例は今後の講義や他の講義の中で

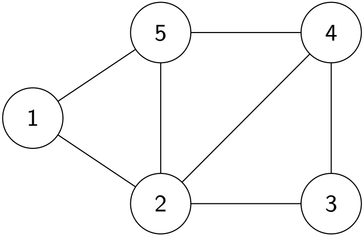
目次

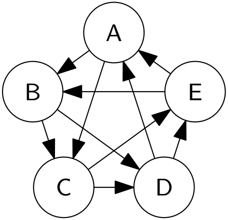
概要

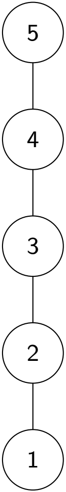
今日の目標

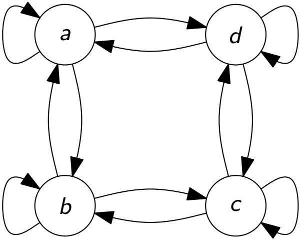
- グラフの定義を理解する
- 数え上げによる証明の手法を理解し，使えるようになる

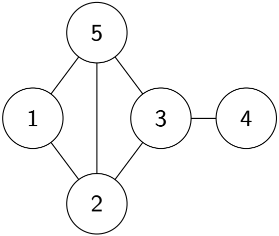
グラフの例











有向グラフ

有向グラフとは？

有向グラフとは，順序対 (V, A) で，

- V は集合
- $A \subseteq V \times V$ は V の順序対の集合

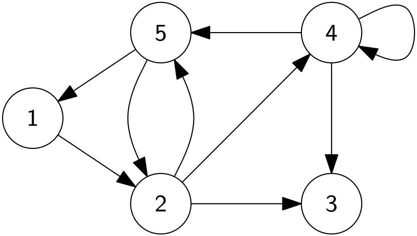
であるもののこと

例：

- $V = \{1, 2, 3, 4, 5\}$
- $A = \{(1,2), (2,3), (2,4), (2,5), (4,3), (4,4), (4,5), (5,1), (5,2)\}$

有向グラフの図示

- $V = \{1, 2, 3, 4, 5\}$
- $A = \{(1,2), (2,3), (2,4), (2,5), (4,3), (4,4), (4,5), (5,1), (5,2)\}$



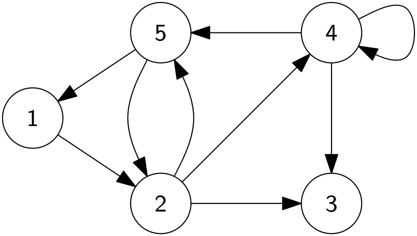
有向グラフの用語

有向グラフ $G = (V, A)$

有向グラフの用語

- V の要素を G の**頂点**と呼ぶ
- V を G の**頂点集合**と呼ぶ
- A の要素を G の**弧**と呼ぶ
- A を G の**弧集合**と呼ぶ
- 弧 $(u, v) \in A$ に対して，u はその**始点**であり，v はその**終点**である

- $V = \{1, 2, 3, 4, 5\}$
- $A = \{(1, 2), (2, 3), (2, 4), (2, 5), (4, 3), (4, 4), (4, 5), (5, 1), (5, 2)\}$
- 頂点 2 は弧 $(2, 3)$ の始点，頂点 3 は弧 $(2, 3)$ の終点



無向グラフ

無向グラフとは？

無向グラフとは，順序対 (V, E) で，

- V は集合
- $E \subseteq 2^V$ は V の <u>要素数 2</u> の部分集合の集合

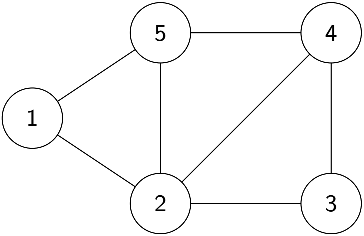
であるもののこと

例：

- $V = \{1, 2, 3, 4, 5\}$
- $E = \{\{1, 2\}, \{1, 5\}, \{2, 3\}, \{2, 4\}, \{2, 5\}, \{3, 4\}, \{4, 5\}\}$

無向グラフの図示

- $V = \{1, 2, 3, 4, 5\}$
- $E = \{\{1, 2\}, \{1, 5\}, \{2, 3\}, \{2, 4\}, \{2, 5\}, \{3, 4\}, \{4, 5\}\}$



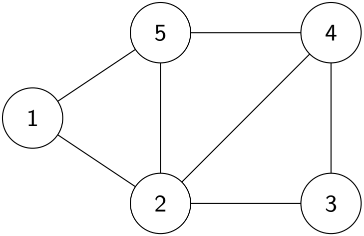
無向グラフの用語

無向グラフ $G = (V, E)$

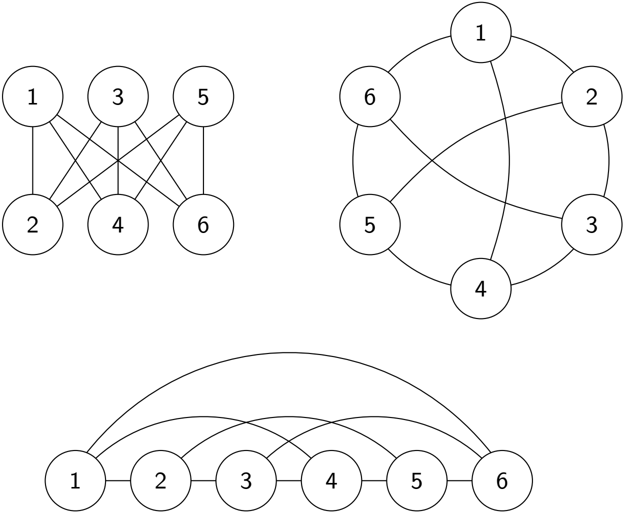
無向グラフの用語

- V の要素を G の**頂点**と呼ぶ
- E の要素を G の**辺**と呼ぶ
- V を G の**頂点集合**と呼ぶ
- E を G の**辺集合**と呼ぶ
- 辺 $\{u, v\} \in E$ に対して，u, v をその**端点**と呼ぶ
- 頂点 v が辺 e の端点であるとき，v は e に**接続**するという
- 頂点 u と v が辺を成すとき，u と v は**隣接**するという

- $V = \{1, 2, 3, 4, 5\}$
- $E = \{\{1,2\}, \{1,5\}, \{2,3\}, \{2,4\}, \{2,5\}, \{3,4\}, \{4,5\}\}$
- 頂点 $2, 3$ は辺 $\{2, 3\}$ の端点
- 頂点 2 は辺 $\{2, 3\}$ に接続する
- 頂点 2 と頂点 3 は隣接する



1 つのグラフに対するいろいろな図示



目次

数え上げ

数え上げ (counting) とは？

数を計算すること

なぜ数え上げが重要なのか？

- 数を計算すること自体が目的である
- 数を計算することによって，他の目的を達成する
  - 離散数学においては「数え上げによる証明」

記法：有限集合の要素数

有限集合 A の要素数を $|A|$ と書く (これを A の**サイズ**とも呼ぶ)

例：$|\{1,3,4\}| = 3$，$|\emptyset| = 0$

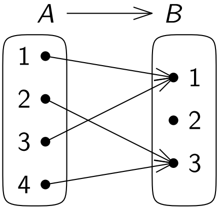
復習：全射

有限集合 A, B と関数 $f\colon A \to B$

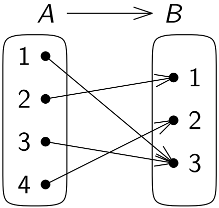
全射とは？

f が**全射**であるとは，次を満たすこと

$$\text{すべての } b \in B \text{ に対して，ある } a \in A \text{ が存在して } b = f(a)$$



全射ではない



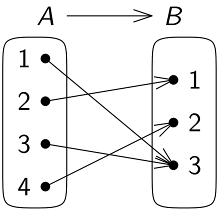
全射である

数え上げと全射

有限集合 A, B と関数 $f\colon A \to B$

全射の性質

$$f \text{ が全射} \quad \Rightarrow \quad |A| \geq |B|$$



全射である

A \ B	1	2	3
1			1
2	1		
3			1
4		1	

この行列の成分和

格言

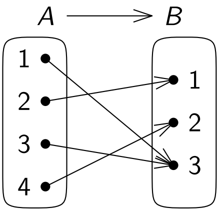
「数え上げによる証明」の基礎は表を書くこと

数え上げと全射

有限集合 A, B と関数 $f\colon A \to B$

全射の性質

f が**全射** $\Rightarrow$ $|A| \geq |B|$



全射である

A \ B	1	2	3	
1			1	$= 1$
2	1			$= 1$
3			1	$= 1$
4		1		$= 1$

$|A| =$ この行列の成分和

格言

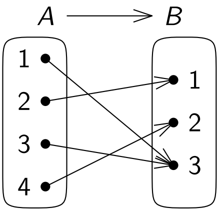
「数え上げによる証明」の基礎は表を書くこと

数え上げと全射

有限集合 A, B **と関数** $f\colon A \to B$

全射の性質

$$f \text{ が\textbf{全射}} \quad \Rightarrow \quad |A| \geq |B|$$



全射である

A \ B	1	2	3	
1			1	$=1$
2	1			$=1$
3			1	$=1$
4		1		$=1$
	≥ 1	≥ 1	≥ 1	

$|A| =$ **この行列の成分和** $\geq |B|$

格言

「数え上げによる証明」の基礎は表を書くこと

「全射の性質」の証明

証明：f が全射であると仮定する．

- $|\{(a,b) \in A \times B \mid f(a) = b\}|$ を 2 通りの数え方で見てみる

- したがって，$|A| \geq |B|$ である． $\square$

「全射の性質」の証明

証明：f が全射であると仮定する．

- $|\{(a, b) \in A \times B \mid f(a) = b\}|$ を 2 通りの数え方で見てみる
- f は関数なので，

  任意の $a \in A$ に対して，$|\{b \in B \mid f(a) = b\}| = 1$

- したがって，$|A| \geq |B|$ である． □

「全射の性質」の証明

証明：f が全射であると仮定する．

- $|\{(a,b) \in A \times B \mid f(a) = b\}|$ を 2 通りの数え方で見てみる
- f は関数なので，

  任意の $a \in A$ に対して，$|\{b \in B \mid f(a) = b\}| = 1$
- したがって，

$$|\{(a,b) \in A \times B \mid f(a) = b\}| = \sum_{a \in A} |\{b \in B \mid f(a) = b\}| = \sum_{a \in A} 1 = |A|$$

- したがって，$|A| \geq |B|$ である． □

「全射の性質」の証明

証明：f が全射であると仮定する．

- $|\{(a,b) \in A \times B \mid f(a) = b\}|$ を 2 通りの数え方で見てみる
- f は関数なので，

  任意の $a \in A$ に対して，$|\{b \in B \mid f(a) = b\}| = 1$
- したがって，

$$|\{(a,b) \in A \times B \mid f(a) = b\}| = \sum_{a \in A} |\{b \in B \mid f(a) = b\}| = \sum_{a \in A} 1 = |A|$$

- f は全射なので，

  任意の $b \in B$ に対して，$|\{a \in A \mid f(a) = b\}| \geq 1$

- したがって，$|A| \geq |B|$ である． □

「全射の性質」の証明

証明：f が全射であると仮定する．

- $|\{(a,b) \in A \times B \mid f(a) = b\}|$ を 2 通りの数え方で見てみる
- f は関数なので，

  任意の $a \in A$ に対して，$|\{b \in B \mid f(a) = b\}| = 1$
- したがって，

$$|\{(a,b) \in A \times B \mid f(a) = b\}| = \sum_{a \in A} |\{b \in B \mid f(a) = b\}| = \sum_{a \in A} 1 = |A|$$

- f は全射なので，

  任意の $b \in B$ に対して，$|\{a \in A \mid f(a) = b\}| \geq 1$
- したがって，

$$|\{(a,b) \in A \times B \mid f(a) = b\}| = \sum_{b \in B} |\{a \in A \mid f(a) = b\}| \geq \sum_{b \in B} 1 = |B|$$

- したがって，$|A| \geq |B|$ である． $\square$

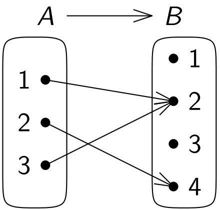
復習：単射

集合 A, B と関数 $f\colon A \to B$

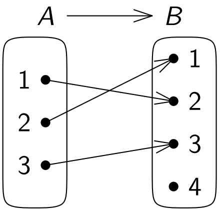
単射とは？

f が**単射**であるとは，次を満たすこと

すべての $a, a' \in A$ に対して， $a \neq a'$ ならば $f(a) \neq f(a')$



単射ではない



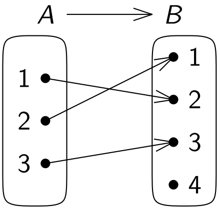
単射である

数え上げと単射

有限集合 A, B **と関数** $f \colon A \to B$

単射の性質

f **が単射** $\quad\Rightarrow\quad |A| \le |B|$



単射である

$A \backslash B$	1	2	3	4
1		1		
2	1			
3			1	

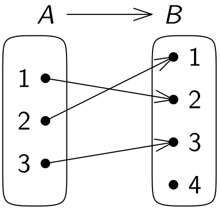
この行列の成分和

数え上げと単射

有限集合 A, B と関数 $f\colon A \to B$

単射の性質

$$f \text{ が}\textbf{単射} \quad \Rightarrow \quad |A| \le |B|$$



単射である

$$\begin{array}{c|cccc|l} {}_{A}\,{}^{B} & 1 & 2 & 3 & 4 & \\ \hline 1 & & 1 & & & =1 \\ 2 & 1 & & & & =1 \\ 3 & & & 1 & & =1 \end{array}$$

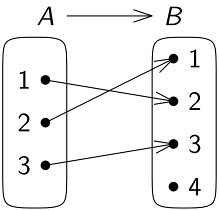
$|A| =$ **この行列の成分和**

数え上げと単射

有限集合 A, B **と関数** $f\colon A \to B$

単射の性質

$$f \text{ が\textbf{単射}} \quad \Rightarrow \quad |A| \leq |B|$$



単射である

$$\begin{array}{c|cccc|l} A \backslash B & 1 & 2 & 3 & 4 & \\ \hline 1 & & 1 & & & = 1 \\ 2 & 1 & & & & = 1 \\ 3 & & & 1 & & = 1 \\ \hline & \leq 1 & \leq 1 & \leq 1 & \leq 1 & \end{array}$$

$|A| =$ **この行列の成分和** $\leq |B|$

「単射の性質」の証明

証明：f が単射であると仮定する．

- $|\{(a,b) \in A \times B \mid f(a) = b\}|$ を 2 通りの数え方で見てみる

- したがって，$|A| \leq |B|$ である． $\square$

「単射の性質」の証明

証明：f が単射であると仮定する．

- $|\{(a,b) \in A \times B \mid f(a) = b\}|$ を 2 通りの数え方で見てみる
- f は関数なので，

  任意の $a \in A$ に対して，$|\{b \in B \mid f(a) = b\}| = 1$

- したがって，$|A| \leq |B|$ である． □

「単射の性質」の証明

証明：f が単射であると仮定する．

- $|\{(a, b) \in A \times B \mid f(a) = b\}|$ を 2 通りの数え方で見てみる
- f は関数なので，

任意の $a \in A$ に対して，$|\{b \in B \mid f(a) = b\}| = 1$

- したがって，

$$|\{(a, b) \in A \times B \mid f(a) = b\}| = \sum_{a \in A} |\{b \in B \mid f(a) = b\}| = \sum_{a \in A} 1 = |A|$$

- したがって，$|A| \leq |B|$ である． □

「単射の性質」の証明

証明：f が単射であると仮定する．

- $|\{(a,b) \in A \times B \mid f(a) = b\}|$ を 2 通りの数え方で見てみる
- f は関数なので，

  任意の $a \in A$ に対して，$|\{b \in B \mid f(a) = b\}| = 1$
- したがって，

$$|\{(a,b) \in A \times B \mid f(a) = b\}| = \sum_{a \in A} |\{b \in B \mid f(a) = b\}| = \sum_{a \in A} 1 = |A|$$

- f は単射なので，

  任意の $b \in B$ に対して，$|\{a \in A \mid f(a) = b\}| \leq 1$

- したがって，$|A| \leq |B|$ である．

□

「単射の性質」の証明

証明：f が単射であると仮定する．

- $|\{(a,b) \in A \times B \mid f(a) = b\}|$ を 2 通りの数え方で見てみる
- f は関数なので，

  任意の $a \in A$ に対して，$|\{b \in B \mid f(a) = b\}| = 1$
- したがって，

$$|\{(a,b) \in A \times B \mid f(a) = b\}| = \sum_{a \in A} |\{b \in B \mid f(a) = b\}| = \sum_{a \in A} 1 = |A|$$

- f は単射なので，

  任意の $b \in B$ に対して，$|\{a \in A \mid f(a) = b\}| \leq 1$
- したがって，

$$|\{(a,b) \in A \times B \mid f(a) = b\}| = \sum_{b \in B} |\{a \in A \mid f(a) = b\}| \leq \sum_{b \in B} 1 = |B|$$

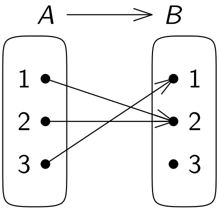
- したがって，$|A| \leq |B|$ である． □

復習：全単射

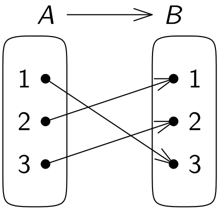
集合 A, B と関数 $f\colon A \to B$

全単射とは？

f が**全単射**であるとは，全射であり，かつ，単射であること



全単射ではない



全単射である

数え上げと全単射

集合 A, B と関数 $f\colon A \to B$

全単射の性質

f が**全単射** $\Rightarrow$ $|A| = |B|$

証明：演習問題

格言

「数え上げによる証明」の基礎は表を書くこと

目次

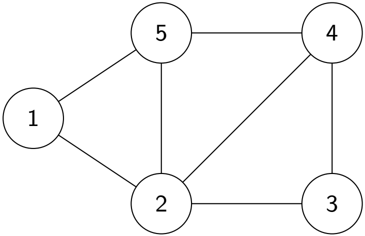
無向グラフにおける頂点の次数

無向グラフ $G = (V, E)$**，頂点** $v \in V$

頂点 v の次数とは？

頂点 $v \in V$ の次数とは，v に接続する辺の数のこと

$$\deg_G(v) = |\{e \in E \mid \exists\, u \in V\ (e = \{u, v\})\}|$$



- $\deg_G(1) = 2$
- $\deg_G(2) = 4$
- $\deg_G(3) = 2$
- $\deg_G(4) = 3$
- $\deg_G(5) = 3$

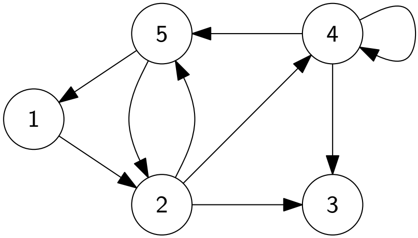
有向グラフにおける頂点の入次数

有向グラフ $G = (V, A)$，**頂点** $v \in V$

頂点 v の入次数とは？

頂点 $v \in V$ の入次数とは，v を終点とする弧の数のこと

$$\deg_G^-(v) = |\{a \in A \mid \exists\, u \in V\ (a = (u, v))\}|$$



- $\deg_G^-(1) = 1$
- $\deg_G^-(2) = 2$
- $\deg_G^-(3) = 2$
- $\deg_G^-(4) = 2$
- $\deg_G^-(5) = 2$

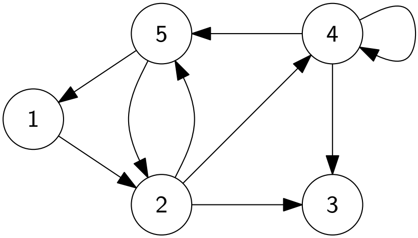
有向グラフにおける頂点の出次数

有向グラフ $G = (V, A)$，**頂点** $v \in V$

頂点 v の出次数とは？

頂点 $v \in V$ **の出次数とは，**v **を始点とする弧の数のこと**

$$\deg^+_G(v) = |\{a \in A \mid \exists\, u \in V\ (a = (v, u))\}|$$



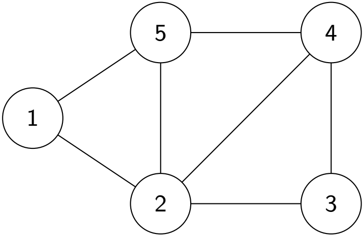
- $\deg^+_G(1) = 1$
- $\deg^+_G(2) = 3$
- $\deg^+_G(3) = 0$
- $\deg^+_G(4) = 3$
- $\deg^+_G(5) = 2$

握手補題

無向グラフ $G = (V, E)$

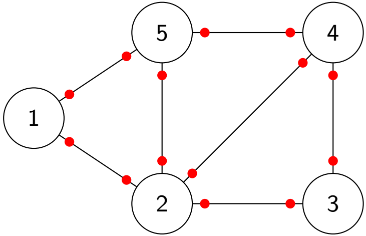
握手補題

$$\sum_{v \in V} \deg_G(v) = 2|E|$$



- $\deg_G(1) = 2$
- $\deg_G(2) = 4$
- $\deg_G(3) = 2$
- $\deg_G(4) = 3$
- $\deg_G(5) = 3$
- $\sum_{v \in V} \deg_G(v) = 2 + 4 + 2 + 3 + 3 = 14$
- $|E| = 7$

握手補題の証明：準備 (直感)



- G の各頂点の周りを見て，接続する辺の上に石を置く
- 石の総数を計算する

数え方 1

- 頂点 v の周りの石の数 $= \deg_G(v)$
- $\therefore$ 石の総数 $= \sum_{v \in V} \deg_G(v)$

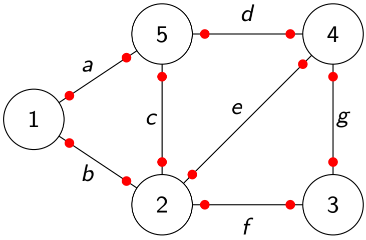
数え方 2

- 各辺 e の上の石の数 $= 2$
- $\therefore$ 石の総数 $= \sum_{e \in E} 2 = 2|E|$

したがって

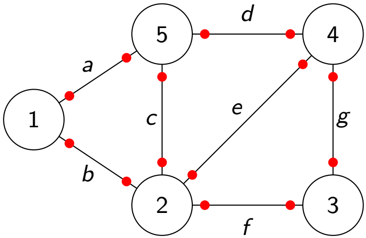
- $\sum_{v \in V} \deg_G(v) =$ 石の総数 $= 2|E|$

握手補題の証明：準備 (行列)



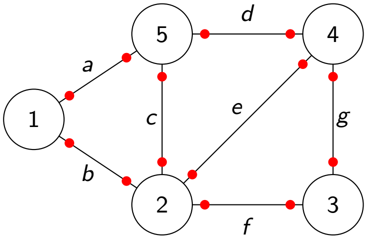
V \ E	a	b	c	d	e	f	g
1	1	1					
2		1	1		1	1	
3						1	1
4				1	1		1
5	1		1	1			

握手補題の証明：準備 (行列)



V \ E	a	b	c	d	e	f	g	
1	1	1						$= \deg_G(1)$
2		1	1		1	1		$= \deg_G(2)$
3						1	1	$= \deg_G(3)$
4				1	1		1	$= \deg_G(4)$
5	1		1	1				$= \deg_G(5)$

握手補題の証明：準備 (行列)



$V \backslash E$	a	b	c	d	e	f	g	
1	1	1						$= \deg_G(1)$
2		1	1		1	1		$= \deg_G(2)$
3						1	1	$= \deg_G(3)$
4				1	1		1	$= \deg_G(4)$
5	1		1	1				$= \deg_G(5)$
	=2	=2	=2	=2	=2	=2	=2	

握手補題の証明

$G = (V, E)$ は無向グラフであるとする．

- $|\{(v, e) \in V \times E \mid v$ は e の端点 $\}|$ を 2 通りの数え方で見てみる

- したがって，$\sum_{v \in V} \deg_G(v) = 2|E|$ $\square$

握手補題の証明

$G = (V, E)$ は無向グラフであるとする．

- $|\{(v, e) \in V \times E \mid v$ は e の端点 $\}|$ を 2 通りの数え方で見てみる
- 任意の頂点 $v \in V$ に対して，v を端点とする辺の数は $\deg_G(v)$ なので，

$$\begin{aligned} |\{(v, e) \in V \times E \mid v \text{ は } e \text{ の端点 }\}| &= \sum_{v \in V} |\{e \in E \mid v \text{ は } e \text{ の端点 }\}| \\ &= \sum_{v \in V} \deg_G(v) \end{aligned}$$

- したがって，$\displaystyle\sum_{v \in V} \deg_G(v) = 2|E|$ □

握手補題の証明

$G=(V,E)$ は無向グラフであるとする．

- $|\{(v,e)\in V\times E \mid v$ は e の端点 $\}|$ を 2 通りの数え方で見てみる
- 任意の頂点 $v\in V$ に対して，v を端点とする辺の数は $\deg_G(v)$ なので，

$$\begin{aligned}|\{(v,e)\in V\times E \mid v \text{ は } e \text{ の端点 }\}| &= \sum_{v\in V} |\{e\in E \mid v \text{ は } e \text{ の端点 }\}| \\ &= \sum_{v\in V} \deg_G(v)\end{aligned}$$

- 任意の辺 $e\in E$ に対して，e の端点の数は 2 なので，

$$\begin{aligned}|\{(v,e)\in V\times E \mid v \text{ は } e \text{ の端点 }\}| &= \sum_{e\in E} |\{v\in V \mid v \text{ は } e \text{ の端点 }\}| \\ &= \sum_{e\in E} 2 = 2|E|\end{aligned}$$

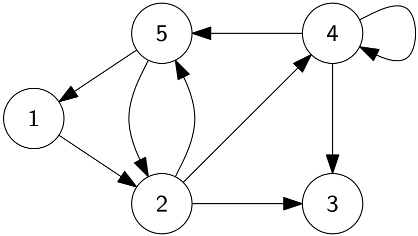
- したがって，$\sum_{v\in V} \deg_G(v) = 2|E|$ $\square$

有向グラフに対する握手補題

有向グラフ $G = (V, A)$

有向グラフに対する握手補題

$$\sum_{v \in V} \deg_G^-(v) = |A|, \qquad \sum_{v \in V} \deg_G^+(v) = |A|$$



- $\deg_G^-(1) = 1$
- $\deg_G^-(2) = 2$
- $\deg_G^-(3) = 2$
- $\deg_G^-(4) = 2$
- $\deg_G^-(5) = 2$
- $\sum_{v \in V} \deg_G^-(v) = 1 + 2 + 2 + 2 + 2 = 9$
- $|A| = 9$

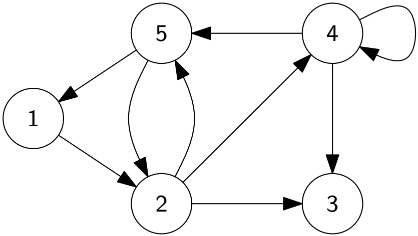
証明：演習問題

有向グラフに対する握手補題

有向グラフ $G = (V, A)$

有向グラフに対する握手補題

$$\sum_{v \in V} \deg^-_G(v) = |A|, \qquad \sum_{v \in V} \deg^+_G(v) = |A|$$



- $\deg^+_G(1) = 1$
- $\deg^+_G(2) = 3$
- $\deg^+_G(3) = 0$
- $\deg^+_G(4) = 3$
- $\deg^+_G(5) = 2$
- $\sum_{v \in V} \deg^+_G(v) = 1 + 3 + 0 + 3 + 2 = 9$
- $|A| = 9$

証明：演習問題

無向グラフの最大次数と最小次数

無向グラフ $G = (V, E)$

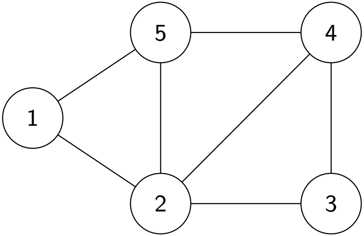
最大次数，最小次数とは？

G の**最大次数**とは，G の頂点の次数の最大値

$$\Delta(G) = \max\{\deg_G(v) \mid v \in V\}$$

G の**最小次数**とは，G の頂点の次数の最小値

$$\delta(G) = \min\{\deg_G(v) \mid v \in V\}$$



- $\deg_G(1) = 2$
- $\deg_G(2) = 4$
- $\deg_G(3) = 2$
- $\deg_G(4) = 3$
- $\deg_G(5) = 3$

- $\Delta(G) = 4$
- $\delta(G) = 2$

有向グラフの最大入次数と最小入次数

有向グラフ $G = (V, E)$

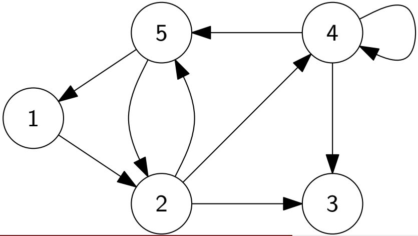
最大入次数，最小入次数とは？

G の**最大入次数**とは，G の頂点の入次数の最大値

$$\Delta^-(G) = \max\{\deg^-_G(v) \mid v \in V\}$$

G の**最小入次数**とは，G の頂点の入次数の最小値

$$\delta^-(G) = \min\{\deg^-_G(v) \mid v \in V\}$$



- $\deg^-_G(1) = 1$
- $\deg^-_G(2) = 2$
- $\deg^-_G(3) = 2$
- $\deg^-_G(4) = 2$
- $\deg^-_G(5) = 2$

- $\Delta^-(G) = 2$
- $\delta^-(G) = 1$

有向グラフの最大出次数と最小出次数

有向グラフ $G = (V, E)$

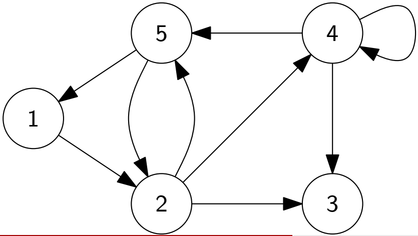
最大出次数，最小出次数とは？

G の**最大出次数**とは，G の頂点の出次数の最大値

$$\Delta^+(G) = \max\{\deg_G^+(v) \mid v \in V\}$$

G の**最小出次数**とは，G の頂点の出次数の最小値

$$\delta^+(G) = \min\{\deg_G^+(v) \mid v \in V\}$$



- $\deg_G^+(1) = 1$
- $\deg_G^+(2) = 3$
- $\deg_G^+(3) = 0$
- $\deg_G^+(4) = 3$
- $\deg_G^+(5) = 2$

- $\Delta^+(G) = 3$
- $\delta^+(G) = 0$

最小次数，平均次数，最大次数の関係

無向グラフ $G = (V, E)$

最小次数，平均次数，最大次数の関係

$$\delta(G) \leq \frac{2|E|}{|V|} \leq \Delta(G)$$

証明：

- 握手補題より，G の平均次数は $\frac{1}{|V|} \sum_{v \in V} \deg_G(v) = \frac{2|E|}{|V|}$.

最小次数，平均次数，最大次数の関係

無向グラフ $G = (V, E)$

最小次数，平均次数，最大次数の関係

$$\delta(G) \leq \frac{2|E|}{|V|} \leq \Delta(G)$$

証明：

- 握手補題より，G の平均次数は $\frac{1}{|V|}\sum_{v \in V} \deg_G(v) = \frac{2|E|}{|V|}$.
- 「最小値 $\leq$ 平均値」なので，$\delta(G) \leq \frac{2|E|}{|V|}$.

格言

最小値 $\leq$ 平均値 $\leq$ 最大値

最小次数，平均次数，最大次数の関係

無向グラフ $G = (V, E)$

最小次数，平均次数，最大次数の関係

$$\delta(G) \leq \frac{2|E|}{|V|} \leq \Delta(G)$$

証明：

- 握手補題より，G の平均次数は $\dfrac{1}{|V|}\sum_{v \in V} \deg_G(v) = \dfrac{2|E|}{|V|}$.
- 「最小値 $\leq$ 平均値」なので，$\delta(G) \leq \dfrac{2|E|}{|V|}$.
- 「平均値 $\leq$ 最大値」なので，$\dfrac{2|E|}{|V|} \leq \Delta(G)$. $\square$

格言

最小値 $\leq$ 平均値 $\leq$ 最大値

最大次数の下界と最小次数の上界

無向グラフ $G = (V, E)$

帰結

1. **ある頂点** $v \in V$ **が存在して，** $\deg_G(v) \geq \dfrac{2|E|}{|V|}$
2. **ある頂点** $v \in V$ **が存在して，** $\deg_G(v) \leq \dfrac{2|E|}{|V|}$

証明：

最大次数の下界と最小次数の上界

無向グラフ $G = (V, E)$

帰結

1. ある頂点 $v \in V$ が存在して，$\deg_G(v) \geq \frac{2|E|}{|V|}$
2. ある頂点 $v \in V$ が存在して，$\deg_G(v) \leq \frac{2|E|}{|V|}$

証明：

1. v として最大次数を持つ頂点を考えればよい． □
2. v として最小次数を持つ頂点を考えればよい． □

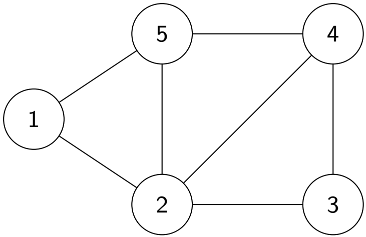
同じ次数を持つ頂点の存在性

無向グラフ $G = (V, E)$，$|V| \geq 2$

同じ次数を持つ頂点の存在性

G には同じ次数を持つ頂点が 2 つは存在する

背理法で証明する



$\deg_G(\cdot)$

V	0	1	2	3	4
1			1		
2					1
3			1		
4				1	
5				1	

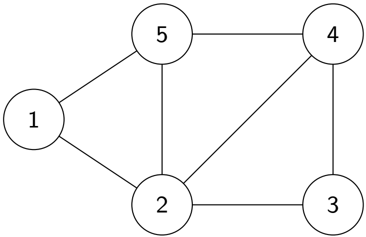
同じ次数を持つ頂点の存在性

無向グラフ $G = (V, E)$**，** $|V| \geq 2$

同じ次数を持つ頂点の存在性

G **には同じ次数を持つ頂点が** 2 **つは存在する**

背理法で証明する



$\deg_G(\cdot)$

V	0	1	2	3	4	
1			1			$= 1$
2					1	$= 1$
3			1			$= 1$
4				1		$= 1$
5				1		$= 1$

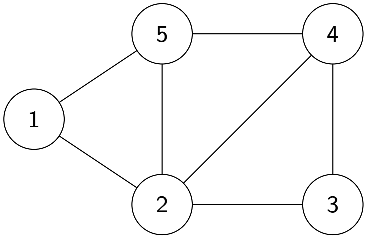
同じ次数を持つ頂点の存在性

無向グラフ $G = (V, E)$，$|V| \geq 2$

同じ次数を持つ頂点の存在性

G **には同じ次数を持つ頂点が** 2 **つは存在する**

背理法で証明する



$\deg_G(\cdot)$

V	0	1	2	3	4	
1			1			$= 1$
2					1	$= 1$
3			1			$= 1$
4				1		$= 1$
5				1		$= 1$
	n_0	n_1	n_2	n_3	n_4	

同じ次数を持つ頂点の存在性：証明 (1)

- G において次数 i の頂点の数を n_i と書き，$n = |V|$ とする．
- G の頂点の次数は 0 以上 $n-1$ 以下．
- よって，$\displaystyle\sum_{i=0}^{n-1} n_i = n$．

同じ次数を持つ頂点の存在性：証明 (1)

- G において次数 i の頂点の数を n_i と書き，$n = |V|$ とする．
- G の頂点の次数は 0 以上 $n-1$ 以下．
- よって，$\displaystyle\sum_{i=0}^{n-1} n_i = n$．
- 任意の $i \in \{0, \ldots, n-1\}$ に対して，$n_i \leq 1$ であると仮定する．

同じ次数を持つ頂点の存在性：証明 (1)

- G において次数 i の頂点の数を n_i と書き，$n = |V|$ とする．
- G の頂点の次数は 0 以上 $n-1$ 以下．
- よって，$\displaystyle\sum_{i=0}^{n-1} n_i = n$．
- 任意の $i \in \{0, \ldots, n-1\}$ に対して，$n_i \leq 1$ であると仮定する．
- 加えて，ある $j \in \{0, \ldots, n-1\}$ に対して $n_j = 0$ であると仮定すると，

$$n = \sum_{i=0}^{n-1} n_i = \sum_{i \neq j} n_i + n_j \leq \sum_{i \neq j} 1 + 0 = n - 1$$

となり，矛盾．

同じ次数を持つ頂点の存在性：証明 (1)

- G において次数 i の頂点の数を n_i と書き，$n = |V|$ とする．
- G の頂点の次数は 0 以上 $n-1$ 以下．
- よって，$\sum_{i=0}^{n-1} n_i = n$．
- 任意の $i \in \{0, \ldots, n-1\}$ に対して，$n_i \leq 1$ であると仮定する．
- 加えて，ある $j \in \{0, \ldots, n-1\}$ に対して $n_j = 0$ であると仮定すると，

$$n = \sum_{i=0}^{n-1} n_i = \sum_{i \neq j} n_i + n_j \leq \sum_{i \neq j} 1 + 0 = n - 1$$

  となり，矛盾．
- したがって，すべての $i \in \{0, \ldots, n-1\}$ に対して $n_i = 1$ である．

同じ次数を持つ頂点の存在性：証明 (1)

- G において次数 i の頂点の数を n_i と書き，$n = |V|$ とする．
- G の頂点の次数は 0 以上 $n-1$ 以下．
- よって，$\sum_{i=0}^{n-1} n_i = n$．
- 任意の $i \in \{0, \ldots, n-1\}$ に対して，$n_i \leq 1$ であると仮定する．
- 加えて，ある $j \in \{0, \ldots, n-1\}$ に対して $n_j = 0$ であると仮定すると，

$$n = \sum_{i=0}^{n-1} n_i = \sum_{i \neq j} n_i + n_j \leq \sum_{i \neq j} 1 + 0 = n - 1$$

  となり，矛盾．
- したがって，すべての $i \in \{0, \ldots, n-1\}$ に対して $n_i = 1$ である．
- すなわち，G には次数 0 の頂点 u と次数 $n-1$ の頂点 v が存在する．

同じ次数を持つ頂点の存在性：証明 (2)

ここまでの流れ

- 任意の $i \in \{0, \ldots, n-1\}$ に対して，$n_i \leq 1$ であると仮定したら，
- G には次数 0 の頂点 u と次数 $n-1$ の頂点 v が存在することが分かった．

同じ次数を持つ頂点の存在性：証明 (2)

ここまでの流れ

- 任意の $i \in \{0, \dots, n-1\}$ に対して，$n_i \leq 1$ であると仮定したら，
- G には次数 0 の頂点 u と次数 $n-1$ の頂点 v が存在することが分かった．

- u は G のどの頂点とも隣接しない．
  - $\therefore \{u, v\} \notin E$．

同じ次数を持つ頂点の存在性：証明 (2)

ここまでの流れ

- **任意の** $i \in \{0, \ldots, n-1\}$ **に対して，** $n_i \leq 1$ **であると仮定したら，**
- G **には次数** 0 **の頂点** u **と次数** $n-1$ **の頂点** v **が存在することが分かった．**

- u **は** G **のどの頂点とも隣接しない．**
  - $\therefore \{u, v\} \notin E$．
- **一方，** v **は** G **のすべての頂点と隣接する．**
  - $\therefore \{u, v\} \in E$．

同じ次数を持つ頂点の存在性：証明 (2)

ここまでの流れ

- 任意の $i \in \{0, \ldots, n-1\}$ に対して，$n_i \leq 1$ であると仮定したら，
- G には次数 0 の頂点 u と次数 $n-1$ の頂点 v が存在することが分かった．

- u は G のどの頂点とも隣接しない．
  - $\therefore \{u, v\} \notin E$．
- 一方，v は G のすべての頂点と隣接する．
  - $\therefore \{u, v\} \in E$．
- 「$\{u, v\} \notin E$」と「$\{u, v\} \in E$」は矛盾．

同じ次数を持つ頂点の存在性：証明 (2)

ここまでの流れ

- 任意の $i \in \{0, \ldots, n-1\}$ に対して，$n_i \leq 1$ であると仮定したら，
- G には次数 0 の頂点 u と次数 $n-1$ の頂点 v が存在することが分かった．

- u は G のどの頂点とも隣接しない．
  - $\therefore \{u, v\} \notin E$．
- 一方，v は G のすべての頂点と隣接する．
  - $\therefore \{u, v\} \in E$．
- 「$\{u, v\} \notin E$」と「$\{u, v\} \in E$」は矛盾．
- したがって，ある $j \in \{0, \ldots, n-1\}$ に対して，$n_j \geq 2$．
- すなわち，次数 j の頂点は 2 つ以上存在する． □

目次

今日のまとめ

今日の目標

- グラフの定義を理解する
- 数え上げによる証明の手法を理解し，使えるようになる

残った時間の使い方

- 演習問題をやる
  - 相談推奨 (ひとりでやらない)
- 質問をする
  - 教員は巡回
- 退室時，小さな紙に感想など書いて提出する ← 重要
  - 内容は何でも OK
  - 匿名で OK

目次