数理解析 第 14 回
連結性

岡本 吉央
okamotoy@uec.ac.jp

電気通信大学

2014 年 1 月 14 日

最終更新：2014 年 1 月 20 日　15:44

スケジュール 後半 (予定)

期末試験

2 月 18 日 (火) 10:40–12:10 @ 西 6-201

- 出題形式
  - 演習問題と同じ形式の問題を 4 題出題する
  - その中の 3 題は演習問題として提示されたものと同一である
  - 全問に解答する
- 配点：1 題 30 点満点，計 120 点満点
- 成績において，100 点以上は 100 点で打ち切り
  - 科目全体の成績は山本野人先生担当分と総合して判定
- 時間：90 分
- 持ち込み：A4 用紙 1 枚分 (裏表自筆書き込み) のみ可

レポート提出期限：1/28 (火) 16:30

- 提出法：私に手渡し，あるいは，
  西 4 号館 4 階事務室前レポート BOX (「岡本」)
- 返却法：講義 web ページにて掲示

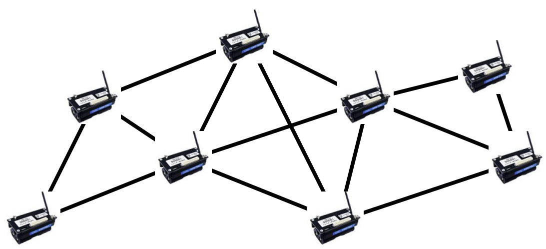
概要

今日の目標

グラフの連結性に関する概念を理解する

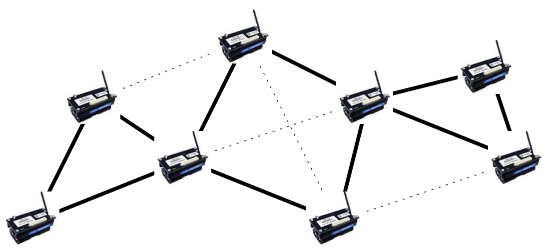
- 局所連結度と大域連結度
- 連結度と次数の関係
- 弱双対性

センサネットワークにおける通信



http://www.ipros.jp/product/detail/153568008/

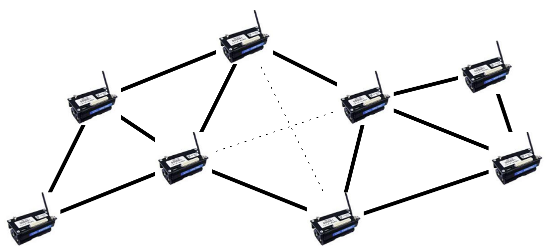
センサネットワークにおける通信：リンク故障



http://www.ipros.jp/product/detail/153568008/

⇝ 辺連結度：リンク故障への耐性を表す数

センサネットワークにおける通信：ノード故障



http://www.ipros.jp/product/detail/153568008/

⇝ 点連結度：ノード故障への耐性を表す数

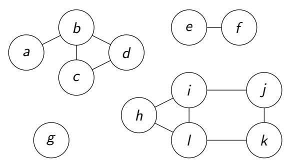
グラフの連結性 (復習)

無向グラフ $G = (V, E)$

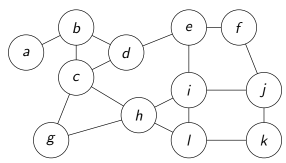
グラフが連結であるとは？

G が連結であるとは，
任意の 2 頂点 $u, v \in V$ に対して，u から v へ至る道が存在すること

連結ではないグラフは非連結と呼ばれる



非連結グラフ



連結グラフ

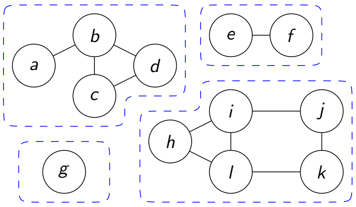
注：「グラフが連結している」とは言わない

グラフの連結成分 (復習)

無向グラフ $G = (V, E)$

グラフの連結成分とは？

G の**連結成分**とは,「歩道が存在」という同値関係における同値類 $U \subseteq V$ に対して，U が誘導する G の部分グラフ



$\{a, b, c, d\}$, $\{e, f\}$, $\{g\}$, $\{h, i, j, k, l\}$ が連結成分を誘導する

グラフの切断辺 (復習)

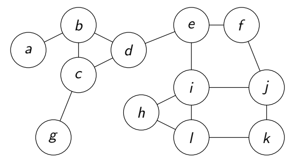
無向グラフ $G = (V, E)$，辺 $e \in E$

グラフの切断辺とは？

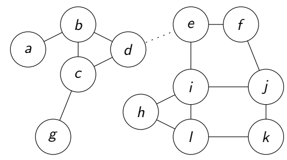
e が G の**切断辺**であるとは，
G から e を除去したグラフ $G - e$ に対して次が成り立つこと

$G - e$ の連結成分の数 $>$ G の連結成分の数

$\{d, e\}$ は G の切断辺



G



$G - \{d, e\}$

グラフの切断点 (復習)

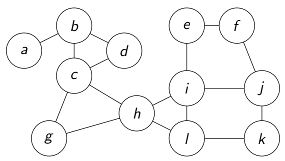
無向グラフ $G = (V, E)$，頂点 $v \in V$

グラフの切断点とは？

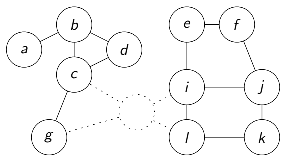
v が G の**切断点**であるとは，
G から v を除去したグラフ $G - v$ に対して次が成り立つこと

$G - v$ の連結成分の数 $>$ G の連結成分の数

h は G の切断点　(「v を除去」とは，v と v に接続する辺すべてを除去すること)



G



$G - h$

目次

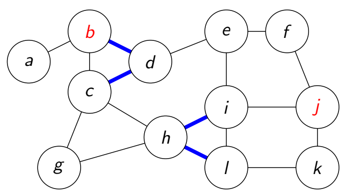
非連結化集合：無向グラフ

無向グラフ $G = (V, E)$，異なる 2 頂点 $s, t \in V$

非連結化集合とは？

辺部分集合 $F \subseteq E$ が G の s, t **非連結化集合**であるとは，
$G - F$ において，s から t への道が存在しないこと

青い辺から成る集合は b, j 非連結化集合



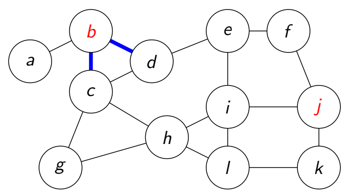
辺連結度：無向グラフ

無向グラフ $G = (V, E)$，異なる 2 頂点 $s, t \in V$

辺連結度とは？

G の s, t **辺連結度**とは，
G の s, t 非連結化集合の要素数の最小値

$\lambda_{s,t}(G)$ で表す　($\lambda_G(s, t)$, $\lambda(G; s, t)$ と表すこともある)



$\lambda_{b,j}(G) \leq 3 = 2$

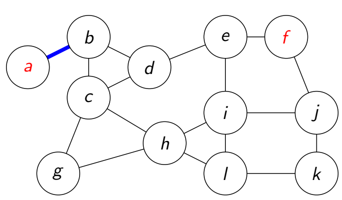
これは局所的，部分的なリンク故障耐性を表す

大域辺連結度：無向グラフ

無向グラフ $G = (V, E)$

大域辺連結度とは？

G の**大域辺連結度**とは，$\lambda(G) = \min\{\lambda_{s,t}(G) \mid s, t \in V, s \neq t\}$
つまり，s, t 辺連結度の (s, t の選び方に関する) 最小値



$\lambda(G) = \lambda_{a,f}(G) = 1$

これは大域的，全体的なリンク故障耐性を表す

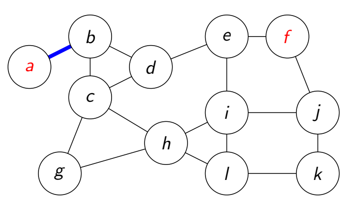
辺連結性：無向グラフ

無向グラフ $G = (V, E)$，自然数 $k \geq 0$

辺連結性とは？

G が k **辺連結**であるとは，$\lambda(G) \geq k$ であること
つまり，要素数 $k - 1$ 以下の辺部分集合を除去して G を非連結にできない

このグラフは 1 辺連結であるが，2 辺連結ではない



注：G が連結 $\Leftrightarrow$ G が 1 辺連結

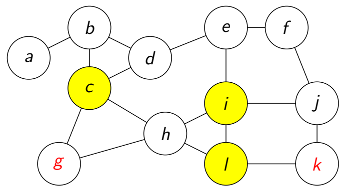
分離集合：無向グラフ

無向グラフ $G = (V, E)$，異なる 2 頂点 $s, t \in V$（ただし，$\{s, t\} \notin E$）

分離集合とは？

頂点集合 $S \subseteq V - \{s, t\}$ が G の s, t **分離集合**であるとは，
$G - S$ において，s から t への道が存在しないこと

黄色の頂点から成る集合は g, k 分離集合



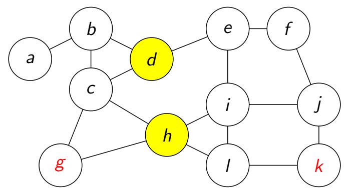
点連結度：無向グラフ

無向グラフ $G = (V, E)$，異なる 2 頂点 $s, t \in V$（ただし，$\{s, t\} \notin E$）

点連結度とは？

G の s, t **点連結度**とは，
G の s, t 分離集合の要素数の最小値

$\kappa_{s,t}(G)$ で表す　（$\kappa_G(s, t)$, $\kappa(G; s, t)$ と表すこともある）



$\kappa_{g,k}(G) = 2$

これは局所的，部分的なノード故障耐性を表す

大域点連結度：無向グラフ

無向グラフ $G = (V, E)$

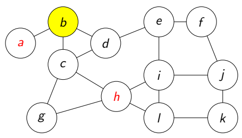
大域点連結度とは？

G の**大域点連結度**とは，G が完全グラフではない場合

$$\kappa(G) = \min\{\kappa_{s,t}(G) \mid s, t \in V, s \neq t, \{s, t\} \notin E\}$$

つまり，s, t 点連結度の（s, t の選び方に関する）最小値

頂点数 n の完全グラフ K_n に対して，$\kappa(K_n) = n - 1$ と定義する



これは大域的，全体的なノード故障耐性を表す

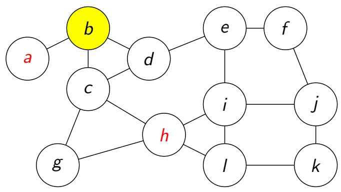
点連結性：無向グラフ

無向グラフ $G = (V, E)$，自然数 $k \geq 0$

点連結性とは？

G が k **点連結**であるとは，$\kappa(G) \geq k$ であること
つまり，要素数 $k-1$ 以下の頂点部分集合を除去しても G は連結

このグラフは 1 点連結であるが，2 点連結ではない



注：G が連結 $\Leftrightarrow$ G が 1 点連結

用語の対応：無向グラフ

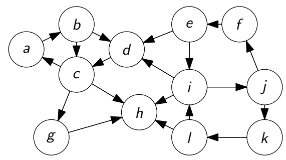
辺	頂点
s, t 非連結化集合	s, t 分離集合
s, t 辺連結度	s, t 点連結度
$\lambda_{s,t}(G)$	$\kappa_{s,t}(G)$
大域辺連結度	大域点連結度
$\lambda(G)$	$\kappa(G)$
k 辺連結	k 点連結

有向グラフの強連結性

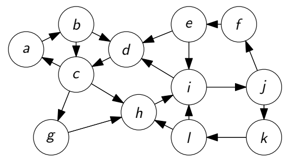
有向グラフ $G = (V, A)$

有向グラフが強連結であるとは？

G が**強連結**であるとは，
任意の 2 頂点 $u, v \in V$ に対して，u から v へ至る有向道が存在すること



強連結でない



強連結である

注：「グラフが強連結している」とは言わない

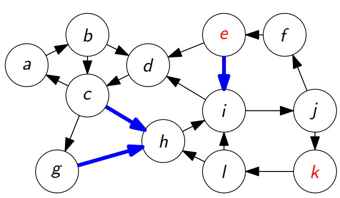
非連結化集合：有向グラフ

有向グラフ $G = (V, A)$，異なる 2 頂点 $s, t \in V$

非連結化集合とは？

弧部分集合 $F \subseteq A$ が G の s, t **非連結化集合**であるとは，
$G - F$ において，s から t への有向道が存在しないこと

青い弧から成る集合は e, k 非連結化集合



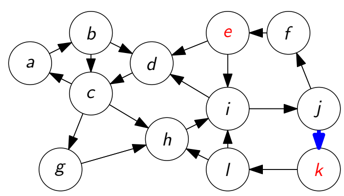
弧連結度：有向グラフ

有向グラフ $G = (V, A)$，異なる 2 頂点 $s, t \in V$

弧連結度とは？

G の s, t **弧連結度**とは，
G の s, t 非連結化集合の要素数の最小値

$\lambda_{s,t}(G)$ で表す　（$\lambda_G(s, t)$, $\lambda(G; s, t)$ と表すこともある）



$\lambda_{e,k}(G) \leq 2 = 1$

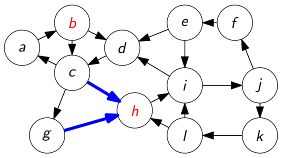
これは局所的，部分的なリンク故障耐性を表す

弧連結度：有向グラフ (注意)

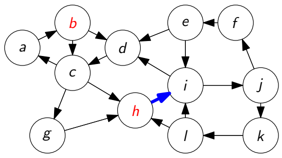
有向グラフ $G = (V, A)$，異なる 2 頂点 $s, t \in V$

注意

$\lambda_{s,t}(G) \neq \lambda_{t,s}(G)$ かもしれない



$\lambda_{b,h}(G) = 2$



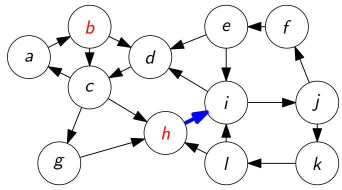
$\lambda_{h,b}(G) = 1$

大域弧連結度：有向グラフ

有向グラフ $G = (V, A)$

大域弧連結度とは？

G の**大域弧連結度**とは，$\lambda(G) = \min\{\lambda_{s,t}(G) \mid s, t \in V, s \neq t\}$
つまり，s, t 弧連結度の (s, t の選び方に関する) 最小値



$\lambda(G) = 1$

これは大域的，全体的なリンク故障耐性を表す

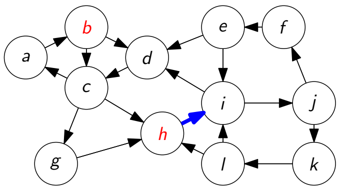
弧連結性：有向グラフ

有向グラフ $G = (V, A)$，自然数 $k \geq 0$

弧連結性とは？

G が k **弧連結**であるとは，$\lambda(G) \geq k$ であること
つまり，要素数 $k-1$ 以下の弧部分集合をどう除去しても G は強連結

このグラフは 1 弧連結であるが，2 弧連結ではない



注：G が強連結 $\Leftrightarrow$ G が 1 弧連結

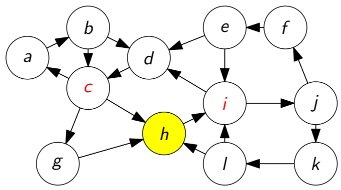
分離集合：有向グラフ

有向グラフ $G = (V, A)$，異なる 2 頂点 $s, t \in V$ (ただし，$(s, t) \notin A$)

分離集合とは？

頂点集合 $S \subseteq V - \{s, t\}$ が G の s, t **分離集合**であるとは，
$G - S$ において，s から t への有向道が存在しないこと

黄色の頂点から成る集合は c, i 分離集合



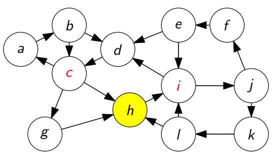
点連結度：有向グラフ

有向グラフ $G = (V, A)$，異なる 2 頂点 $s, t \in V$ (ただし，$(s, t) \notin A$)

点連結度とは？

G の s, t **点連結度**とは，
G の s, t 分離集合の要素数の最小値

$\kappa_{s,t}(G)$ で表す ($\kappa_G(s, t)$, $\kappa(G; s, t)$ と表すこともある)



$\kappa_{c,i}(G) = 1$

これは局所的，部分的なノード故障耐性を表す
注：$\kappa_{s,t}(G) \neq \kappa_{t,s}(G)$ かもしれない

大域点連結度：有向グラフ

有向グラフ $G = (V, A)$

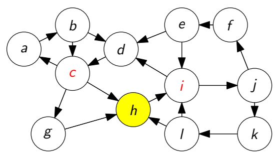
大域点連結度とは？

G の**大域点連結度**とは，ある $u, v \in V$ に対して $(u, v) \notin A$ であるとき，

$$\kappa(G) = \min\{\kappa_{s,t}(G) \mid s, t \in V, s \neq t, (s, t) \notin A\}$$

つまり，s, t 点連結度の (s, t の選び方に関する) 最小値

任意の $u, v \in V$ ($u \neq v$) に対して $(u, v) \in A$ であるとき，$\kappa(G) = |V| - 1$ と定義



$\kappa(G) = 1$

これは大域的，全体的なノード故障耐性を表す

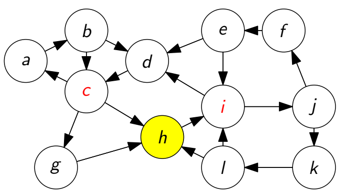
点連結性：有向グラフ

有向グラフ $G = (V, A)$，自然数 $k \geq 0$

点連結性とは？

G が k **点連結**であるとは，$\kappa(G) \geq k$ であること
つまり，要素数 $k-1$ 以下の頂点部分集合をどう除去しても G は強連結

このグラフは 1 点連結であるが，2 点連結ではない



注：G が強連結 $\Leftrightarrow$ G が 1 点連結

用語の対応：有向グラフ

弧	頂点
s, t 非連結化集合	s, t 分離集合
s, t 弧連結度	s, t 点連結度
$\lambda_{s,t}(G)$	$\kappa_{s,t}(G)$
大域弧連結度	大域点連結度
$\lambda(G)$	$\kappa(G)$
k 弧連結	k 点連結

目次

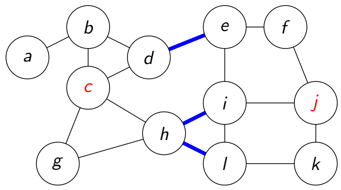
辺連結度と次数の関係

無向グラフ $G = (V, E)$**，異なる 2 頂点** $s, t \in V$

辺連結度と次数の関係

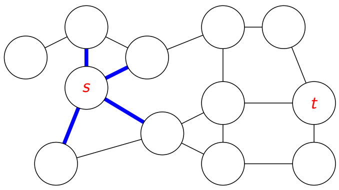
$$\lambda_{s,t}(G) \le d_G(s)$$

例：$\lambda_{c,j}(G) = 3,\ d_G(c) = 4$



辺連結度と次数の関係：証明

- s **に接続する辺全体から成る集合を** F **とする (つまり，**$|F| = d_G(s)$**)**
- **このとき，**F **は** s, t **非連結化集合**
- **よって，**$\lambda_{s,t}(G) \le |F| = d_G(s)$ □



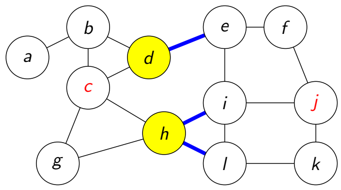
点連結度と辺連結度の関係

無向グラフ $G = (V, E)$**，異なる 2 頂点** $s, t \in V$**，**$\{s, t\} \notin E$

点連結度と辺連結度の関係 (Whitney '32)

$$\kappa_{s,t}(G) \le \lambda_{s,t}(G)$$

例：$\kappa_{c,j}(G) = 2,\ \lambda_{c,j}(G) = 3$



この証明は $\lambda_{s,t}(G) \le d_G(s)$ **に比べて，少し複雑**

点連結度と辺連結度の関係：証明

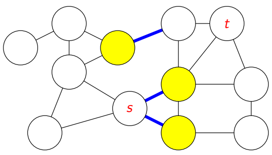
無向グラフ $G = (V, E)$**，異なる 2 頂点** $s, t \in V$**，**$\{s, t\} \notin E$

点連結度と辺連結度の関係 (Whitney '32)

$$\kappa_{s,t}(G) \le \lambda_{s,t}(G)$$

証明：$F \subseteq E$ **を** G **の最小** s, t **非連結化集合とする** ($|F| = \lambda_{s,t}(G)$)

- F **の各辺** e **に対して，その 1 端点を次の規則で選ぶ**
  - e **の 1 端点が** s **か** t **ならば，それではない方を選ぶ**
  - e **の端点が** s **でも** t **でもないならば，任意の 1 端点を選ぶ**
- **注意：**$\{s, t\} \notin E$ **なので，このような選び方は必ず可能**



点連結度と辺連結度の関係：証明 (続き)

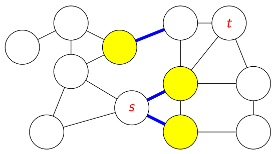
無向グラフ $G = (V, E)$**，異なる 2 頂点** $s, t \in V$**，**$\{s, t\} \notin E$

点連結度と辺連結度の関係 (Whitney '32)

$$\kappa_{s,t}(G) \le \lambda_{s,t}(G)$$

証明 (続き)：選ばれた頂点を集めた集合を S **とする** ($|S| \le |F|$)

- **このとき，**$G - S \subseteq G - F$
- $G - F$ **において，**s **から** t **へ至る道が存在しないので，**$G - S$ **にも存在しない**
- $\therefore$ S **は** s, t **分離集合で，**$\kappa_{s,t}(G) \le |S| \le |F| = \lambda_{s,t}(G)$ □



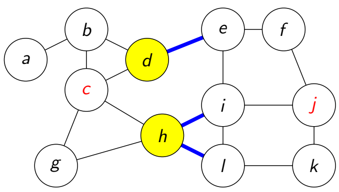
連結度と次数の関係：まとめ

無向グラフ $G = (V, E)$**，異なる 2 頂点** $s, t \in V$**，**$\{s, t\} \notin E$

連結度と次数の関係 (Whitney '32)

$$\kappa_{s,t}(G) \le \lambda_{s,t}(G) \le d_G(s)$$

例：$\kappa_{c,j}(G) = 2,\ \lambda_{c,j}(G) = 3,\ d_G(c) = 4$



注：$d_G(s) - \lambda_{s,t}(G)$ **と** $\lambda_{s,t}(G) - \kappa_{s,t}(G)$ **が任意に大きくなる例が存在**

連結度と次数の関係：系

無向グラフ $G = (V, E)$

大域連結度と最小次数の関係 (Whitney '32)

$$\kappa(G) \le \lambda(G) \le \delta(G)$$

ただし，$\delta(G)$ **は** G **の最小次数**

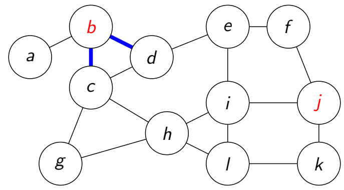
証明：演習問題

注：「系」とは定理から直ちに証明が得られる命題のこと

目次

最小 s,t 非連結化集合を見つけるには？

s,t 辺連結度 $=$ 最小 s,t 非連結化集合の要素数



$\lambda_{b,j}(G) \leq 2$

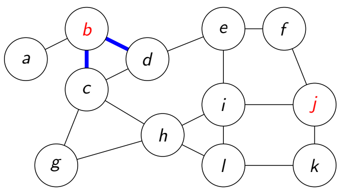
$\lambda_{b,j}(G) = 2$？

格言

ある性質を持つものを発見する方法を考えるときには
その性質を持つことを確認する方法をまず考える

最小性の確認法？

この s,t 非連結化集合の要素数が最小であることを確認するには
どうしたらよいか？



$\lambda_{b,j}(G) \leq 2$

格言

ある性質を持つものを発見する方法を考えるときには
その性質を持つことを確認する方法をまず考える

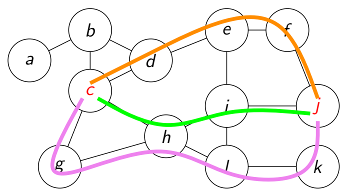
$\rightsquigarrow$ 弱双対性を考えたい

辺素な道

無向グラフ $G = (V, E)$，異なる 2 頂点 $s, t \in V$

辺素な道とは？

s を始点とし，t を終点とする道 P_1, P_2 が辺素であるとは，
P_1 と P_2 が同じ辺を持たないこと



以後，「s,t 道」と言ったら，s を始点とし t を終点とする道を指す

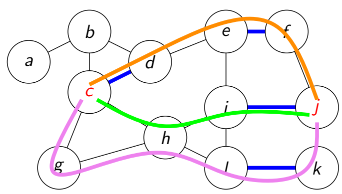
非連結化集合と互いに辺素な道の弱双対性

無向グラフ $G = (V, E)$，異なる 2 頂点 $s, t \in V$

非連結化集合と互いに辺素な道の弱双対性

任意の s,t 非連結化集合 $F \subseteq E$ と
互いに辺素な任意の s,t 道 $P_1, P_2, \ldots, P_\ell$ に対して

$$\ell \leq |F|$$



この図では，$\ell = 3$，$|F| = 4$

非連結化集合と互いに辺素な道の弱双対性：証明の着想

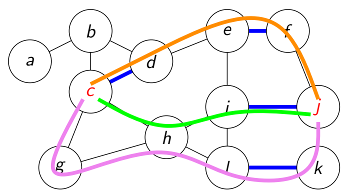
無向グラフ $G = (V, E)$，異なる 2 頂点 $s, t \in V$

非連結化集合と互いに辺素な道の弱双対性

任意の s,t 非連結化集合 $F \subseteq E$ と
互いに辺素な任意の s,t 道 $P_1, P_2, \ldots, P_\ell$ に対して

$$\ell \leq |F|$$

証明の着想：数え上げ論法による



$\mathcal{P}$ \ F	e_1	e_2	e_3	e_4	
P_1	1	1			≥ 1
P_2			1		≥ 1
P_3				1	≥ 1
	≥ 1	≥ 1	≥ 1	≥ 1	

$\mathcal{P} = \{P_1, \ldots, P_\ell\}$ とする

非連結化集合と互いに辺素な道の弱双対性：証明

無向グラフ $G = (V, E)$，異なる 2 頂点 $s, t \in V$

非連結化集合と互いに辺素な道の弱双対性

任意の s,t 非連結化集合 $F \subseteq E$ と
互いに辺素な任意の s,t 道 $P_1, P_2, \ldots, P_\ell$ に対して，$\ell \leq |F|$

証明：数え上げ論法による

- $\mathcal{P} = \{P_1, \ldots, P_\ell\}$ とする
- $\mathcal{P}$ の各道は辺素なので，F の各辺を通る $\mathcal{P}$ の道の数は 1 以下

$$\therefore \quad |\{(P_i, e) \in \mathcal{P} \times F \mid e \text{ は } P_i \text{ の辺 }\}| \leq \sum_{e \in F} 1 = |F|$$

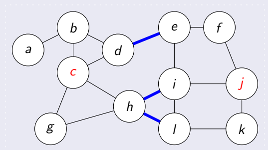
- F は s,t 非連結化集合なので，$\mathcal{P}$ のどの道も F のある辺を含む

$$\therefore \quad |\{(P_i, e) \in \mathcal{P} \times F \mid e \text{ は } P_i \text{ の辺 }\}| \geq \sum_{P_i \in \mathcal{P}} 1 = |\mathcal{P}| = \ell$$

- $\therefore \ell \leq |\{(P_i, e) \in \mathcal{P} \times F \mid e \text{ は } P_i \text{ の辺 }\}| \leq |F|$ $\square$

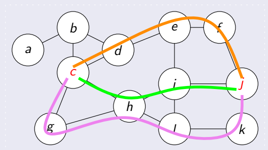
弱双対性の使い方

上界



$\lambda_{c,j}(G) \leq 4$

下界



$\lambda_{c,j}(G) \geq 4$

したがって，$\lambda_{c,j}(G) = 4$

格言

互いに辺素な道を見ることで，辺連結度の値を証明できる

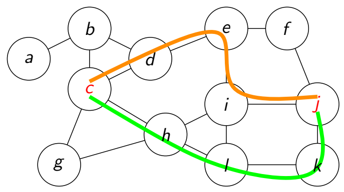
同じことを点連結度に対しても行いたい

内点素な道

無向グラフ $G = (V, E)$，異なる 2 頂点 $s, t \in V$

内点素な道とは？

s, t 道 P_1, P_2 が**内点素**であるとは，
P_1 と P_2 が s, t 以外に同じ頂点を持たないこと



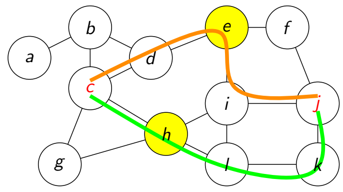
分離集合と互いに内点素な道の弱双対性

無向グラフ $G = (V, E)$，異なる 2 頂点 $s, t \in V$，$\{s, t\} \notin E$

分離集合と互いに内点素な道の弱双対性

任意の s, t 分離集合 $S \subseteq V - \{s, t\}$ と
互いに内点素な任意の s, t 道 $P_1, P_2, \ldots, P_\ell$ に対して

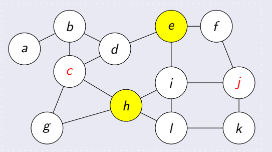
$$\ell \leq |S|$$



証明：演習問題

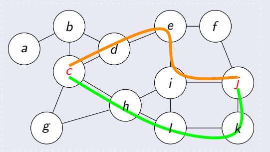
弱双対性の使い方

上界



$\kappa_{c,j}(G) \leq 2$

下界



$\kappa_{c,j}(G) \geq 2$

したがって，$\kappa_{c,j}(G) = 2$

格言

互いに内点素な道を見ることで，点連結度の値を**証明**できる

同じような弱双対性が有向グラフに対しても成立する

用語の対応：無向グラフ

辺	頂点
s, t 非連結化集合	s, t 分離集合
s, t 辺連結度	s, t 点連結度
$\lambda_{s,t}(G)$	$\kappa_{s,t}(G)$
大域辺連結度	大域点連結度
$\lambda(G)$	$\kappa(G)$
k 辺連結	k 点連結
辺素な s, t 道	内点素な s, t 道

目次

今日のまとめ

今日やったこと

グラフの連結性に関する概念を理解する

- 局所連結度と大域連結度
- 連結度と次数の関係
- 弱双対性

まとめ：弱双対性

マッチングに関して，任意のグラフに対して

最大マッチングの辺数 $\leq$ 最小頂点被覆の頂点数

彩色に関して，任意のグラフに対して

最大クリークの頂点数 $\leq$ 染色数

辺連結度に関して，任意のグラフに対して

互いに辺素な s, t 道の最大数 $\leq$ s, t 辺連結度

点連結度に関して，任意のグラフに対して

互いに内点素な s, t 道の最大数 $\leq$ s, t 点連結度

まとめ：強双対性

マッチングに関して，二部グラフに対して (Kőnig–Egerváry の定理)

最大マッチングの辺数 $=$ 最小頂点被覆の頂点数

彩色に関して，区間グラフに対して

最大クリークの頂点数 $=$ 染色数

辺連結度に関して，任意のグラフに対して (Menger の定理)

互いに辺素な s, t 道の最大数 $=$ s, t 辺連結度

点連結度に関して，任意のグラフに対して (Menger の定理)

互いに内点素な s, t 道の最大数 $=$ s, t 点連結度

Menger の定理の証明は，この講義で行わない