数理解析 第 11 回
マッチング

岡本 吉央
okamotoy@uec.ac.jp

電気通信大学

2013 年 12 月 10 日

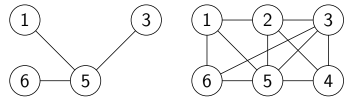
最終更新：2013 年 12 月 9 日　15:54

復習：部分グラフ

無向グラフ $G_1 = (V_1, E_1)$, $G_2 = (V_2, E_2)$

部分グラフとは？

G_1 が G_2 の**部分グラフ**であるとは，次を満たすこと
- $V_1 \subseteq V_2$
- $E_1 \subseteq E_2$



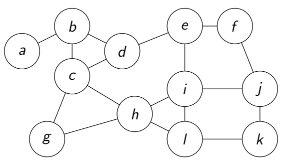
G_1　G_2

復習：誘導部分グラフ

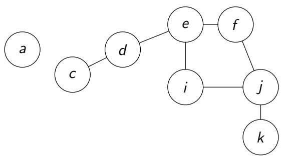
無向グラフ $G = (V, E)$，頂点部分集合 $U \subseteq V$

誘導部分グラフとは？

G において U が**誘導する部分グラフ**とは，次で定義されるグラフ
- 頂点集合は U
- 辺集合は $\{\{u, v\} \in E \mid u, v \in U\}$



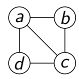
G



G の誘導部分グラフである

部分グラフと誘導部分グラフ (1)

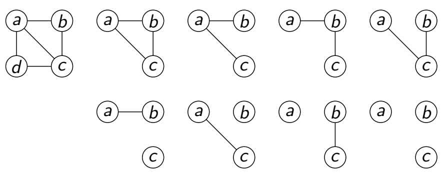
このグラフの部分グラフを考える



部分グラフはたくさんある

部分グラフと誘導部分グラフ (2)

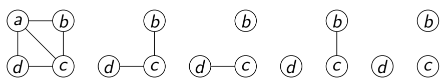
頂点集合を $\{a, b, c\}$ とする部分グラフは 8 個



この中で誘導部分グラフは 1 つだけ

部分グラフと誘導部分グラフ (3)

頂点集合を $\{b, c, d\}$ とする部分グラフは 4 個



この中で誘導部分グラフは 1 つだけ

目次

概要

今日の目標

「マッチング」を理解する
- マッチングの定義を理解する
- 最大マッチングと極大マッチングの違いを理解する
- 最大マッチングと増加道の関係を理解する
- 最大マッチングと最小頂点被覆の関係を理解する

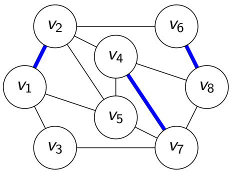
重要な概念
- 最適性の保証 $\rightsquigarrow$ **最適化の基礎**

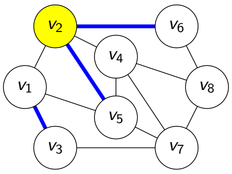
グラフにおけるマッチング

無向グラフ $G = (V, E)$

マッチングとは？

G の**マッチング**とは辺部分集合 $M \subseteq E$ で，
M のどの 2 辺も同じ頂点に接続しないもの

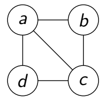




$\{\{v_1, v_2\}, \{v_4, v_7\}, \{v_6, v_8\}\}$ は
マッチングである

$\{\{v_1, v_3\}, \{v_2, v_5\}, \{v_2, v_6\}\}$ は
マッチングではない

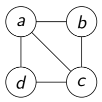
グラフにおけるすべてのマッチング



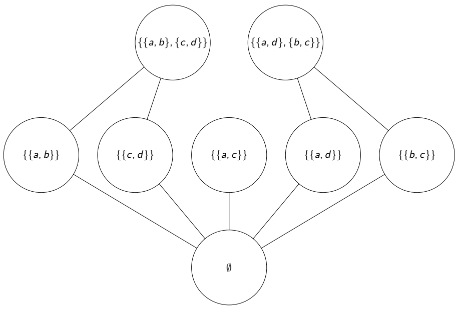
このグラフのマッチングは以下のもの

- $\emptyset$
- $\{\{a, b\}\}$
- $\{\{a, c\}\}$
- $\{\{a, d\}\}$
- $\{\{b, c\}\}$
- $\{\{c, d\}\}$
- $\{\{a, b\}, \{c, d\}\}$
- $\{\{a, d\}, \{b, c\}\}$

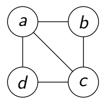
グラフにおけるすべてのマッチング：ハッセ図 (1)



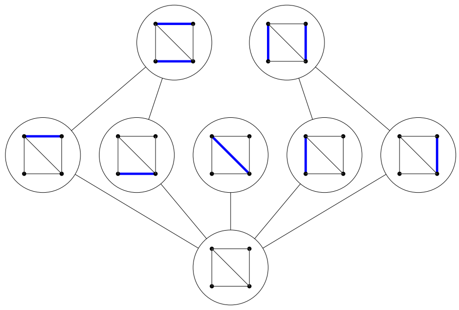
このグラフのすべてのマッチングを
包含関係に関してハッセ図にしたものが
下の図



グラフにおけるすべてのマッチング：ハッセ図 (2)



このグラフのすべてのマッチングを
包含関係に関してハッセ図にしたものが
下の図

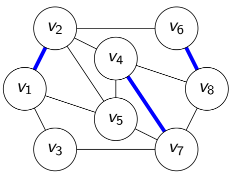


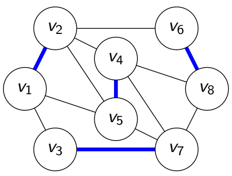
最大マッチング

無向グラフ $G = (V, E)$

最大マッチングとは？

G の**最大マッチング**とは G のマッチング $M \subseteq E$ で，
G の任意のマッチング M' に対して $|M| \geq |M'|$ を満たすもの

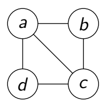




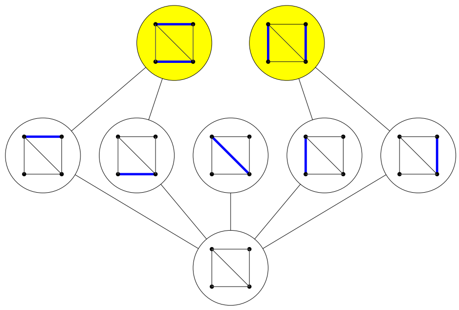
最大マッチングではない

最大マッチングである

最大マッチング：ハッセ図において



黄色のマッチングが最大マッチング

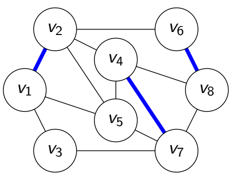


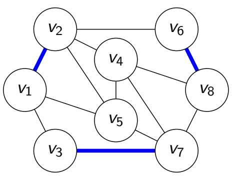
極大マッチング

無向グラフ $G = (V, E)$

極大マッチングとは？

G の**極大マッチング**とは G のマッチング $M \subseteq E$ で，
任意の辺 $e \in E - M$ に対して $M \cup \{e\}$ が G のマッチングではないもの

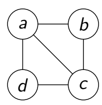




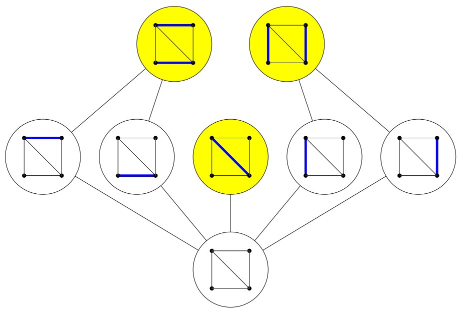
極大マッチングである

極大マッチングではない

極大マッチング：ハッセ図において



黄色のマッチングが極大マッチング

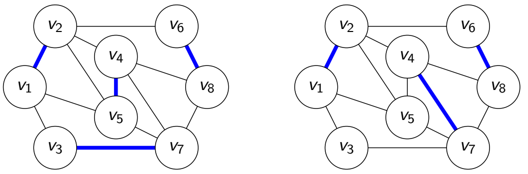


完全マッチング

無向グラフ $G = (V, E)$

完全マッチングとは？

G の完全マッチングとは G のマッチング $M \subseteq E$ で，
G の任意の頂点に M のある辺が接続しているもの



完全マッチングである　　完全マッチングではない

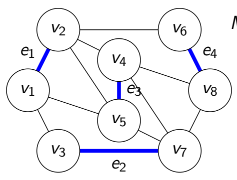
完全マッチングの辺数

無向グラフ $G = (V, E)$

完全マッチングの辺数は？

$M \subseteq E$ が G の完全マッチング $\Rightarrow |V| = 2|M|$

証明の着想：数え上げ論法



M \ V	v_1	v_2	v_3	v_4	v_5	v_6	v_7	v_8	
e_1	1	1							$= 2$
e_2			1				1		$= 2$
e_3				1	1				$= 2$
e_4						1		1	$= 2$
	$= 1$	$= 1$	$= 1$	$= 1$	$= 1$	$= 1$	$= 1$	$= 1$	

完全マッチングの辺数：証明

無向グラフ $G = (V, E)$

完全マッチングの辺数は？

$M \subseteq E$ が G の完全マッチング $\Rightarrow |V| = 2|M|$

証明：

- M は完全マッチングなので，各 $v \in V$ に接続する M の辺の数は 1

$$\therefore \quad |\{(v, e) \in V \times M \mid v \in e\}| = \sum_{v \in V} 1 = |V|$$

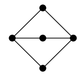
- 各 $e \in M$ に接続する V の頂点数は 2

$$\therefore \quad |\{(v, e) \in V \times M \mid v \in e\}| = \sum_{e \in M} 2 = 2|M|$$

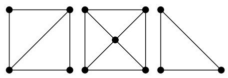
- $\therefore |V| = |\{(v, e) \in V \times M \mid v \in e\}| = 2|M|$ □

完全マッチングと最大マッチングの関係

- 完全マッチングを持たないグラフもある
  - 例えば，頂点数が奇数のグラフ

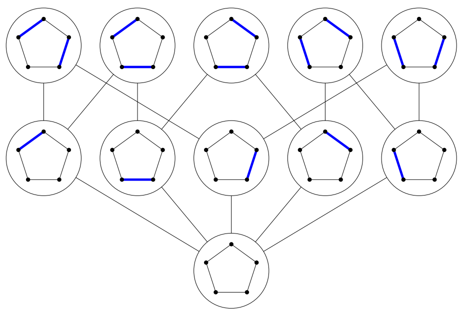


  - 例えば，頂点数が奇数の連結成分を持つグラフ



  - 頂点数が偶数である連結グラフでもそのようなものがある (演習問題)
- 完全マッチングを持つグラフにおいて，
  完全マッチングは最大マッチングである　(演習問題)

完全マッチングを持たないグラフと最大マッチング



最大マッチングと極大マッチングの関係

無向グラフ $G = (V, E)$

最大マッチングは極大マッチングである

$M \subseteq E$ が G の最大マッチング $\Rightarrow$ M は G の極大マッチング

証明 (背理法による)：M を G の最大マッチングとする

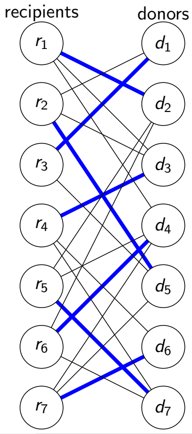
- M が G の極大マッチングではないと仮定する
- 極大マッチングの定義より，
  ある $e \in E - M$ が存在して，$M \cup \{e\}$ は G のマッチング
- $|M \cup \{e\}| = |M| + 1 > |M|$
- これは M が最大マッチングであることに矛盾 □

標語的なまとめ

M が完全マッチング $\Rightarrow$ M が最大マッチング $\Rightarrow$ M が極大マッチング

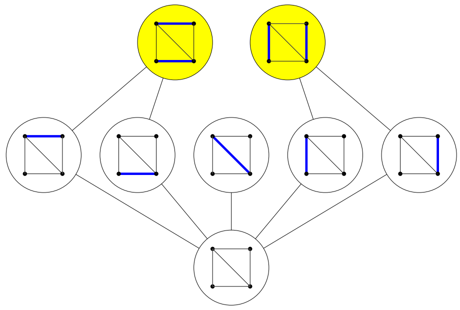
マッチングの応用例：腎交換 (kidney exchange)

- 腎臓病患者は腎臓を望んでいる
- 近親者や配偶者が腎臓を提供する
  ことが多い
- しかし，不適合により不可能である
  こともある
- そのとき，患者 (recipient) と
  提供者 (donor) をペアとして登録
- 登録されたペア全体の中で適合・
  不適合の確認
- $\rightsquigarrow$ グラフの構成
- マッチング：可能な腎臓提供



目次

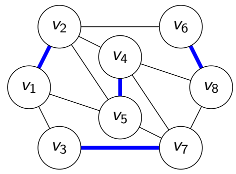
最大マッチングをどのように見つければよい？



辺を 1 つずつ追加していくような方法では，
極大マッチングを見つけることはできるが，
最大マッチングを見つけられるとは限らない

最大性の確認法？

このマッチングが最大マッチングであることを確認するには
どうしたらよいか？



格言
ある性質を持つものを発見する方法を考えるときには
その性質を持つことを確認する方法をまず考える

最大性の確認法

格言 (再掲)
ある性質を持つものを発見する方法を考えるときには
その性質を持つことを確認する方法をまず考える

なぜ？
- 確認は発見より難しくない
- 確認法から発見法に対する道筋が見えることもある

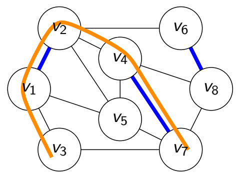
最大性の確認法
2 つ紹介する
1. 増加道を用いる方法
2. 頂点被覆を用いる方法

2 つとも重要

交互道

無向グラフ $G = (V, E)$，マッチング $M \subseteq E$

交互道とは？
M に関する交互道とは，G における道 $v_1, \ldots, v_k$ で $(k \geq 1)$，
M の辺と $E - M$ の辺が交互に現れるもの

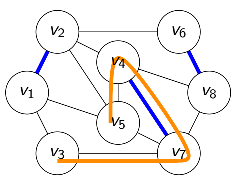


v_3, v_1, v_2, v_4, v_7 は青のマッチングに関する交互道

増加道

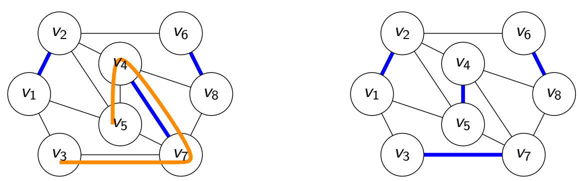
無向グラフ $G = (V, E)$，マッチング $M \subseteq E$

増加道とは？
M に関する増加道とは，M に関する交互道 $v_1, \ldots, v_k$ で $(k \geq 1)$，
v_1 と v_k が M の辺と接続しないもの



v_3, v_7, v_4, v_5 は青のマッチングに関する増加道

増加道に沿ってマッチングを大きくする



辺数 3 のマッチング ⇝ 増加道に沿って大きくする ⇝ 辺数 4 のマッチング

つまり
M に関する増加道が存在する $\Rightarrow$ M は最大マッチングではない

つまり (対偶を考えると)
M は最大マッチングである $\Rightarrow$ M に関する増加道が存在しない

最大マッチングと増加道

無向グラフ $G = (V, E)$，マッチング $M \subseteq E$

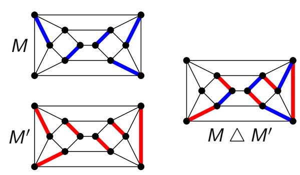
最大マッチングと増加道の関係 (Berge '57)
M が G の最大マッチング $\Leftrightarrow$ M に関する増加道が存在しない

「$\Rightarrow$」の証明：演習問題 (前ページのスライドがヒント)

「$\Leftarrow$」の証明：対偶を証明する
- M が G の最大マッチングではないと仮定
- M' を G の最大マッチングとする
- つまり，$|M'| > |M|$
- ...... ← ここを今から埋めていく
- $\therefore$ M に関する増加道が存在する $\square$

最大マッチングと増加道：証明 (続き 1)

M と M' の対称差 $M \triangle M'$ を考える

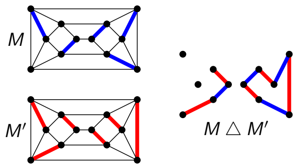


集合の対称差とは？
$X \triangle Y = (X \cup Y) - (X \cap Y)$

格言
対称差で 2 つの集合の違いが見える

最大マッチングと増加道：証明 (続き 2)

M と M' の対称差 $M \triangle M'$ を考える



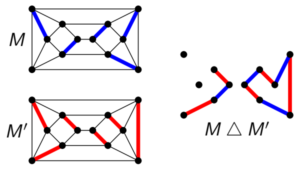
グラフ $(V, M \triangle M')$ の各頂点の次数は 0 か 1 か 2

このグラフ $(V, M \triangle M')$ の連結成分は何か？

- 次数 0 の頂点を持つ連結成分 $\rightsquigarrow$ 孤立点
- 次数 1 の頂点を持つ連結成分 $\rightsquigarrow$ 道
- 次数 2 の頂点だけから成る連結成分 $\rightsquigarrow$ 閉路
    - M と M' の辺が交互に現れるので，その長さは偶数

最大マッチングと増加道：証明 (続き 3)

M と M' の対称差 $M \triangle M'$ を考える



グラフ $(V, M \triangle M')$ の連結成分は孤立点か，道か，長さ偶数の閉路である

このグラフ $(V, M \triangle M')$ の中の状況を考える

- 長さ偶数の閉路において，M の辺の数 $=$ M' の辺の数
- $|M'| > |M|$ なので，
  ある道において，M の辺の数 $<$ M' の辺の数

この道は M に関する増加道!!!

最大マッチングと増加道：証明 (完成)

「$\Leftarrow$」の証明：対偶を証明する

- M が G の最大マッチングではないと仮定
- M' を G の最大マッチングとする
- つまり，$|M'| > |M|$
- グラフ $(V, M \triangle M')$ を考える
    - 各頂点の次数は 2 以下であり，M の辺と M' の辺が交互に現れる
    - $\therefore$ 各連結成分は孤立点か，道か，長さ偶数の閉路である
    - 長さ偶数の閉路において，M の辺の数 $=$ M' の辺の数
    - $|M'| > |M|$ なので，ある道 P において M の辺の数 $<$ M' の辺の数
    - P の端点は M の辺に接続していない
- $\therefore$ P は G において M に関する増加道である □

増加道の重要性：アルゴリズム

増加道で「山登り」ができる

増加道に基づく最大マッチング発見アルゴリズム (雛形)

- 入力：無向グラフ $G = (V, E)$
- 出力：G の最大マッチング M

1. $M := \emptyset$ とする
2. while M に関する増加道 P が存在する do
    1. P に沿って M を大きくする
3. M を出力

先ほどの定理 (Berge) によって，
このアルゴリズムは必ず停止し，最大マッチングを出力することが分かる

格言

アルゴリズムは数学的構造が導く

目次

最大性の確認法 (再掲)

格言 (再掲)

ある性質を持つものを発見する方法を考えるときには
その性質を持つことを確認する方法をまず考える

なぜ？

- 確認は発見より難しくない
- 確認法から発見法に対する道筋が見えることもある

最大性の確認法

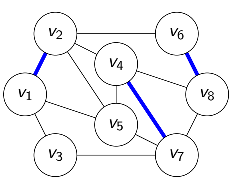
2 つ紹介する

1. 増加道を用いる方法
2. 頂点被覆を用いる方法

2 つとも重要

非最大性の証拠？

このマッチングが最大マッチングでないことを確認するには
どうしたらよいか？



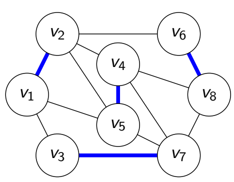
増加道を見つければよい

別の言い方

1 つの増加道がマッチングの非最大性に対する証拠になっている

最大性の証拠？

このマッチングが最大マッチングであることを確認するには
どうしたらよいか？



増加道がないことを言えばよいが，どのようにして言えばよいのか？

別の言い方

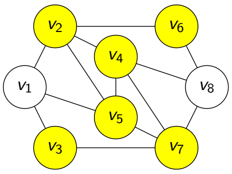
マッチングの最大性に対する証拠はあるのか？

頂点被覆

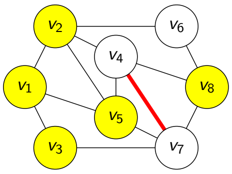
無向グラフ $G = (V, E)$

頂点被覆とは？

G の**頂点被覆**とは頂点部分集合 $C \subseteq V$ で，
G のどの辺もある C の頂点に接続しているもの



$\{v_2, v_3, v_4, v_5, v_6, v_7\}$ は
頂点被覆である



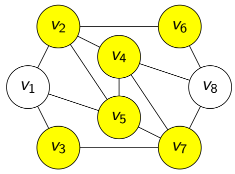
$\{v_1, v_2, v_3, v_5, v_8\}$ は
頂点被覆ではない

最小頂点被覆

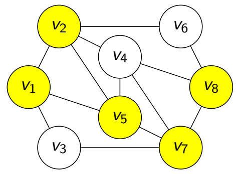
無向グラフ $G = (V, E)$

最小頂点被覆とは？

G の**最小頂点被覆**とは頂点被覆 $C \subseteq V$ で，
G の任意の頂点被覆 C' に対して $|C| \leq |C'|$ を満たすもの



$\{v_2, v_3, v_4, v_5, v_6, v_7\}$ は
最小頂点被覆ではない



$\{v_1, v_2, v_5, v_7, v_8\}$ は
最小頂点被覆である

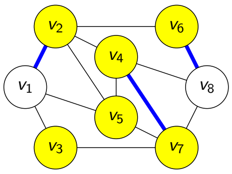
マッチングと頂点被覆の関係

無向グラフ $G = (V, E)$

マッチングと頂点被覆の関係 (重要)

M が G のマッチング
C が G の頂点被覆 $\Rightarrow |M| \leq |C|$

例：$|M| = 3$, $|C| = 6$



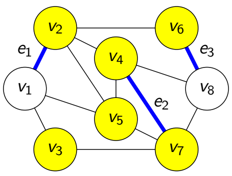
マッチングと頂点被覆の関係：証明の着想

無向グラフ $G = (V, E)$

マッチングと頂点被覆の関係 (重要)

M が G のマッチング
C が G の頂点被覆 $\Rightarrow |M| \leq |C|$

証明の着想：数え上げ論法による



$$
\begin{array}{c|cccccc|c}
M \backslash C & v_2 & v_3 & v_4 & v_5 & v_6 & v_7 & \\
\hline
e_1 & 1 & & & & & & \geq 1 \\
e_2 & & & 1 & & & 1 & \geq 1 \\
e_3 & & & & & 1 & & \geq 1 \\
\hline
 & \leq 1 & \leq 1 & \leq 1 & \leq 1 & \leq 1 & \leq 1 &
\end{array}
$$

マッチングと頂点被覆の関係：証明

無向グラフ $G = (V, E)$

マッチングと頂点被覆の関係 (重要)

M が G のマッチング
C が G の頂点被覆 $\Rightarrow |M| \leq |C|$

証明：数え上げ論法による

- M はマッチングなので，C の各頂点に接続する M の辺の数は 1 以下

$$\therefore \quad |\{(v, e) \in C \times M \mid v \in e\}| \leq \sum_{v \in C} 1 = |C|$$

- C は頂点被覆なので，M の各辺に接続する C の頂点の数は 1 以上

$$\therefore \quad |\{(v, e) \in C \times M \mid v \in e\}| \geq \sum_{e \in M} 1 = |M|$$

- $\therefore |M| \leq |\{(v, e) \in C \times M \mid v \in e\}| \leq |C|$ □

マッチングと頂点被覆の関係：帰結

無向グラフ $G = (V, E)$

マッチングと頂点被覆の関係 (重要)

M が G のマッチング
C が G の頂点被覆 $\Rightarrow |M| \leq |C|$

最大マッチングと頂点被覆の関係

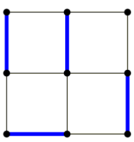
M が G の**最大**マッチング
C が G の頂点被覆 $\Rightarrow |M| \leq |C|$

最大マッチングと最小頂点被覆の関係 (弱双対性)

M が G の**最大**マッチング
C が G の**最小**頂点被覆 $\Rightarrow |M| \leq |C|$

頂点被覆の重要性

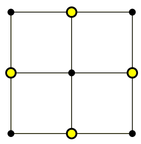
次のグラフの最大マッチングの辺数は何か？



最大マッチングの辺数 ≥ 4

頂点被覆の重要性 (続き)

次のグラフの最大マッチングの辺数は何か？



これは頂点被覆なので，

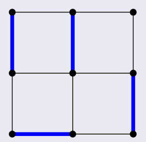
最大マッチングの辺数 $\leq$ 最小頂点被覆の頂点数 ≤ 4

- したがって，最大マッチングの辺数 $= 4$ である!!!

頂点被覆の重要性：今一度

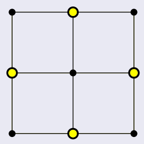
次のグラフの最大マッチングの辺数は何か？

下界



最大マッチングの辺数 ≥ 4

上界



最大マッチングの辺数 ≤ 4

したがって，最大マッチングの辺数 $= 4$

格言

頂点被覆を見ることで，マッチングの最大性が保証される

頂点被覆の重要性：まとめ

次の 2 つを同時に行う

下界

辺数 k のマッチングを見つける

- このとき，
  最大マッチングの辺数 $\geq k$

上界

頂点数 k の頂点被覆を見つける

- このとき，
  最大マッチングの辺数 $\leq k$

よって，この 2 つができれば

最大マッチングの辺数 $= k$

頂点被覆の重要性：アルゴリズム

頂点被覆により，最適値の「挟み打ち」ができる

頂点被覆に基づく最大マッチング発見アルゴリズム (雛形)

- 入力：無向グラフ $G = (V, E)$
- 出力：G の最大マッチング M と最小頂点被覆 C

1. $M := \emptyset$，$C := \emptyset$ とする
2. while $|M| < |C|$ do
   1. M を大きくするか，C を小さくする
3. M と C を出力

先ほどの考察より，このアルゴリズムが停止するならば，
必ず最大マッチングと最小頂点被覆を出力することが分かる

問題点

停止しないかもしれない

次回行うこと

- 二部グラフに対しては，必ずこのアルゴリズムが停止する
- 言い換えると，二部グラフに対しては
  最大マッチングの辺数 $=$ 最小頂点被覆の頂点数
- この流れは最適化法の真髄

目次

今日のまとめ

今日の目標

「マッチング」を理解する

- マッチングの定義を理解する
- 最大マッチングと極大マッチングの違いを理解する
- 最大マッチングと増加道の関係を理解する
- 最大マッチングと最小頂点被覆の関係を理解する

重要な概念

- 最適性の保証 $\rightsquigarrow$ 最適化の基礎