最適化手法 (12) **2014 年 1 月 7 日**
演習問題 **岡本 吉央**

注意： 解答がどのように導かれるのか，その道筋を必ず書き下すこと．

復習問題 12.1 Kőnig–Egerváry の定理は「任意の二部グラフ $G = (V, E)$ において，G のあるマッチング $M \subseteq E$ と G のある頂点被覆 $C \subseteq V$ が存在して，$|M| = |C|$ となる」ことを主張している．以下の手順にしたがって，Kőnig–Egerváry の定理を証明せよ．

1. M を G の最大マッチングであるとする．このとき，M から次の有向グラフ G_M を構成する．まず，G における辺 $\{u, v\}$ は，$\{u, v\} \not\in M$ であるとき，u から v へ向きをつけ，$\{u, v\} \in M$ であるとき，v から u へ向きをつける．そして，新たに 2 つ頂点を用意し，それらを s, t と呼ぶ．このとき，A において M が飽和しない頂点に向かって s から弧を引く．また，B において M が飽和しない頂点から t に向かって弧を引く．

   以上の準備の下で，M が最大マッチングであることから，G_M には s から t へ至る道が存在しないことを証明せよ．

2. 以下のようにして，G の頂点部分集合 C を構成する．そのために，M の各辺 $\{u, v\}$ を見る (ただし，$u \in A, v \in B$ とする)．G_M において，u, v が s から到達可能であるとき，v を C に入れる．そうでないときは，u を C に入れる．このとき，$|M| = |C|$ となることを証明せよ．

3. 上の小問で作成した C が G の頂点被覆となることを背理法によって証明する．つまり，G のある辺 $\{u, v\}$ の端点が C に属さないと仮定する (ただし，$u \in A, v \in B$ であるとする)．さらに，u も v も M に飽和されていないと仮定すると，矛盾が起きることを示せ．つまり，u か v は M に飽和されなくてはならない．

4. u が M に飽和されているとしても矛盾が起きることを示せ．

5. u が M に飽和されていないとしても矛盾が起きることを示せ．

復習問題 12.2 二部グラフ $G = (V, E)$ を考える．ただし，V は部集合 A, B へ分割されるものとする．このとき，Hall の結婚定理は「G が A の頂点をすべて飽和するマッチングを持つための必要十分条件は，任意の $S \subseteq A$ に対して $|S| \leq |N(S)|$ が成り立つことである」と主張している．以下の手順に従って，Hall の結婚定理を証明せよ．

1. まず，条件の必要性を証明せよ．

2. 条件の十分性を示すために，対偶，すなわち，「G が A の頂点をすべて飽和するマッチングを持たないならば，ある $S \subseteq A$ に対して $|S| > |N(S)|$ が成り立つ」ことを示せ．

追加問題 12.3 二部グラフ $G = (V, E)$ のすべての頂点の次数が同じであるとする．この次数が 1 以上であるとき，G が完全マッチングを持つことを証明せよ．

追加問題 12.4 二部グラフ $G = (V, E)$ の辺数を m とし，最大次数を $\Delta \geq 1$ とする．Kőnig–Egerváry の定理を用いて，G が辺数 m/Δ 以上のマッチングを持つことを証明せよ．