

注意： 解答がどのように導かれるのか，その道筋を必ず書き下すこと．

復習問題 10.1 任意の無向グラフ $G = (V, E)$ と任意の頂点 $u, v \in V$ に対して， u から v へ至る長さ最小の歩道が道であることを証明せよ．

復習問題 10.2 任意の木 $G = (V, E)$ を考える．このとき， $|V| \geq 2$ ならば， G には次数 1 の頂点が 2 つ以上存在することを証明せよ．

復習問題 10.3 任意の木 $G = (V, E)$ (ただし， $|V| \geq 2$) とその葉 $v \in V$ を考える．このとき， $G - v$ も木であることを証明せよ．

復習問題 10.4 任意の木 $G = (V, E)$ に対して， $|E| = |V| - 1$ が成り立つことを証明せよ．

復習問題 10.5 任意の木 $G = (V, E)$ と任意の辺 $e \in E$ に対して， e が G の切断辺であることを証明せよ．

復習問題 10.6 任意の木 $G = (V, E)$ と任意の頂点 $u, v \in V$ に対して， G において u と v を結ぶ道がただ 1 つ存在することを証明せよ．

復習問題 10.7 任意の連結無向グラフ $G = (V, E)$ と任意の辺 $e \in E$ を考える．このとき， e が G の閉路に含まれるならば， $G - e$ も連結であることを証明せよ．

復習問題 10.8 任意の連結無向グラフにおいて，全域木が存在することを証明せよ．

補足問題 10.9 任意の無向グラフ $G = (V, E)$ に対して，次を証明せよ．

1. 任意の頂点 $v \in V$ に対して， v から v へ至る歩道が存在する．
2. 任意の頂点 $u, v \in V$ に対して， u から v へ至る歩道が存在するならば， v から u へ至る歩道が存在する．
3. 任意の頂点 $u, v, w \in V$ に対して， u から v へ至る歩道が存在し，かつ， v から w へ至る歩道が存在するならば， u から w へ至る歩道が存在する．

補足問題 10.10 任意の木 $G = (V, E)$ と任意の頂点 $v \in V$ を考える．頂点 v が G の葉ではないとき， v が G の切断点であることを証明せよ．(ヒント： v は G の葉ではないので， G において 2 つ以上隣接頂点を持つ．それらを u, w としたとき， $G - v$ に u から w へ至る道があると仮定すると何が起こるか?)

追加問題 10.11 連結無向グラフ $G = (V, E)$ が $|E| \geq |V|$ を満たすとする．このとき， G が閉路を含むことを証明せよ．

追加問題 10.12 連結無向グラフ $G = (V, E)$ が $|E| = |V| - 1$ を満たすならば， G は木であることを証明せよ．(ヒント：握手補題と帰納法を用いる．証明すべきことが何であるのか，注意せよ．)