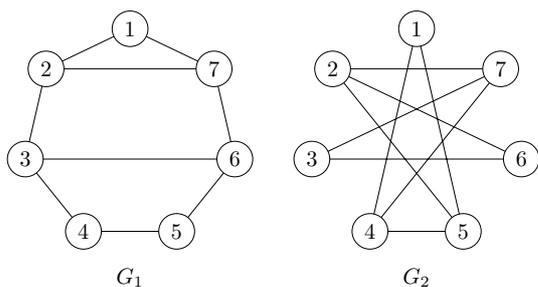


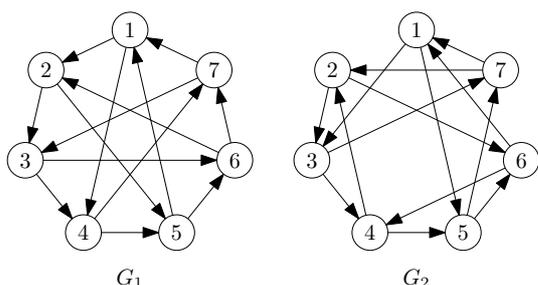
注意： 解答がどのように導かれるのか，その道筋を必ず書き下すこと．

復習問題 9.1 任意の無向グラフ G に対して， G から G への同型写像が存在することを証明せよ．

復習問題 9.2 次の2つの無向グラフ G_1, G_2 に対して， G_1 から G_2 への同型写像を1つ見つけよ．



復習問題 9.3 次の2つの有向グラフ G_1, G_2 に対して， G_1 から G_2 への同型写像を1つ見つけよ．



復習問題 9.4 無向グラフ G と自然数 $k \in \mathbb{N}$ を考える (ただし， $k \geq 2$) . このとき， $\delta(G) \geq k-1$ ならば， G が頂点数 k の道を含むことを証明せよ．

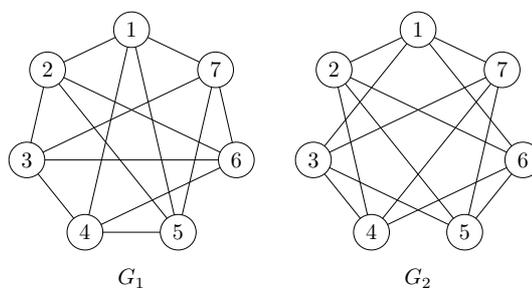
補足問題 9.5 以下の問いに答えよ．

1. 任意の集合 A, B と任意の全単射 $f: A \rightarrow B$ に対して， f の逆関数 $f^{-1}: B \rightarrow A$ も全単射であることを証明せよ． (ヒント： f^{-1} が全射であり，かつ，単射であることを証明すればよい．)
2. 任意の無向グラフ G_1, G_2 に対して， G_1 から G_2 への同型写像が存在するならば， G_2 から G_1 への同型写像も存在することを証明せよ．

補足問題 9.6 以下の問いに答えよ．

1. 任意の集合 A, B, C と任意の2つの全単射 $f: A \rightarrow B, g: B \rightarrow C$ に対して，合成関数 $g \circ f: A \rightarrow C$ も全単射であることを証明せよ．
2. 任意の無向グラフ G_1, G_2, G_3 に対して， G_1 から G_2 への同型写像が存在し，かつ， G_2 から G_3 への同型写像が存在するならば， G_1 から G_3 への同型写像が存在することを証明せよ．

追加問題 9.7 次の2つの無向グラフ G_1, G_2 に対して， G_1 から G_2 への同型写像を1つ見つけよ．



追加問題 9.8 無向グラフ G と自然数 $k \in \mathbb{N}$ を考える (ただし， $k \geq 3$) . このとき， $\delta(G) \geq k-1$ ならば， G が頂点数 k 以上の閉路を含むことを証明せよ． (ヒント： G における長さ最大の道 を考えよ．)

追加問題 9.9 有向グラフ G を考える．このとき， $\delta^+(G) \geq 1$ ならば， G が有向閉路を含むことを証明せよ． (注：この性質は「有向グラフのトポロジカル・ソート」と呼ばれる構造が有向閉路を含まない有向グラフに存在することを証明する際に用いられる．)