

注意： 解答がどのように導かれるのか，その道筋を必ず書き下すこと．

復習問題 8.1 任意の有限集合  $A, B$  と関数  $f: A \rightarrow B$  を考える．このとき， $f$  が全射ならば， $|A| \geq |B|$  となることを証明せよ．

復習問題 8.2 任意の有限集合  $A, B$  と関数  $f: A \rightarrow B$  を考える．このとき， $f$  が単射ならば， $|A| \leq |B|$  となることを証明せよ．

復習問題 8.3 任意の無向グラフ  $G = (V, E)$  に対して

$$\sum_{v \in V} \deg_G(v) = 2|E|$$

が成り立つことを証明せよ．

復習問題 8.4 任意の無向グラフ  $G = (V, E)$  に対して，

$$\delta(G) \leq \frac{2|E|}{|V|} \leq \Delta(G)$$

が成り立つことを証明せよ．

復習問題 8.5 頂点数が 2 以上である任意の無向グラフにおいて，同じ次数を持つ頂点が 2 つは存在することを証明せよ．

補足問題 8.6 任意の有限集合  $A, B$  と関数  $f: A \rightarrow B$  を考える．このとき， $f$  が全単射ならば， $|A| = |B|$  となることを証明せよ．

補足問題 8.7 任意の有向グラフ  $G = (V, A)$  に対して，以下の 2 つが成り立つことを証明せよ．

$$1. \sum_{v \in V} \deg_G^-(v) = |A| .$$

$$2. \sum_{v \in V} \deg_G^+(v) = |A| .$$

追加問題 8.8 任意の有向グラフ  $G = (V, A)$  に対して，以下の 2 つが成り立つことを証明せよ．

$$1. \delta^-(G) \leq \frac{|A|}{|V|} \leq \Delta^-(G) .$$

$$2. \delta^+(G) \leq \frac{|A|}{|V|} \leq \Delta^+(G) .$$

追加問題 8.9

1. 頂点数 5 の無向グラフで，どの頂点の次数も 3 であるものは存在するか？ (理由も述べよ．)

2. 頂点数 6 の無向グラフで，どの頂点の次数も 3 であるものは存在するか？ (理由も述べよ．)

追加問題 8.10 頂点数 5 の有向グラフで，どの頂点の入次数も異なり，かつ，どの頂点の出次数も異なるようなものを 1 つ見つけよ． (頂点数が任意の自然数  $n \geq 2$  の場合はどうか?)

追加問題 8.11 任意の無向グラフ  $G = (V, E)$  (ただし， $|V| \geq 3$ ) と， $G$  において隣接しない 2 頂点  $u, v \in V$  を考える (すなわち， $\{u, v\} \notin E$ ) . このとき， $\deg_G(u) \geq \frac{|V|-1}{2}$  かつ  $\deg_G(v) \geq \frac{|V|-1}{2}$  ならば， $u$  と  $v$  は共通の隣接頂点を持つこと，すなわち，ある  $w \in V - \{u, v\}$  が存在して， $\{u, w\} \in E$  かつ  $\{v, w\} \in E$  となることを証明せよ．