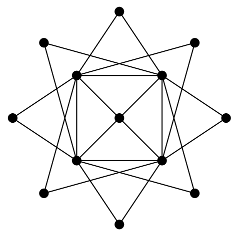
数理解析（後半） **2014 年 2 月 18 日**
期末試験 **岡本 吉央**

10:40〜12:10．A4 用紙 (両面自筆書き込み) のみ持ち込み可．記法と用語は講義に従う．
携帯電話，タブレット等は**電源を切って**カバンの中にしまうこと．

問題 1． 頂点数が 3 以上の奇数であるような任意の無向グラフ G を考える．グラフ G の頂点の次数がすべて偶数であるとき，同じ次数の頂点が 3 つは存在する (つまり，G に異なる 3 つの頂点が存在し，それらの次数が同じである) ことを証明せよ．(ヒント：G の頂点数を n とするとき，次数 0 の頂点と次数 $n-1$ の頂点が両方とも G に存在することはないので，まずはそれを証明してみよ．)

問題 2． 木とは，連結で閉路を含まない無向グラフのことである．任意の木 $G=(V,E)$ を考える．このとき，$|V| \geq 2$ ならば，G には次数 1 の頂点が 2 つ以上存在することを証明せよ．

問題 3． 次の無向グラフの最大マッチングを 1 つ見つけて，それが最大マッチングであることを証明せよ．



問題 4． 次の (A)，(B) のいずれかを選択して解答せよ．((A) と (B) の双方を解答している場合は，どちらも採点されない．)

(A) 次の性質を満たす無向グラフ $G=(V,E)$ を構成せよ．

異なる 2 頂点 s,t が存在して，$\{s,t\} \notin E$, $d_G(s)=8$, $\lambda_{s,t}(G)=5$, $\kappa_{s,t}(G)=2$.

ここで，$d_G(s)$ は頂点 s の次数，$\lambda_{s,t}(G)$ は G における s,t 辺連結度，$\kappa_{s,t}(G)$ は G における s,t 点連結度を表す．(そのグラフにおいて，$\lambda_{s,t}(G)=5$, $\kappa_{s,t}(G)=2$ が成り立つことも明確に証明せよ．)

(B) 任意の無向グラフ $G=(V,E)$ に対して，頂点集合 V 上のある全順序が存在して，その全順序に従って貪欲彩色を行うと，色数最小の彩色が得られることを証明せよ．(ヒント：直観を得るために，まず G が二部グラフの場合を考えるとよいかもしれない．)

以上

採点が終了したら，授業のウェブページにて告知する．採点結果を知りたい場合は，その後で，岡本の居室 (西 4-206) まで問合せを．
(メールや電話では答えられないので注意．)