離散数学 **2013 年 7 月 23 日**
模擬試験 **岡本 吉央**

A4 用紙 (両面自筆書き込み) のみ持ち込み可.
携帯電話，タブレット等は**電源を切って**カバンの中にしまうこと.

問題 1． 集合 A と B を $A = \{1, 2\}, B = \{2, 3\}$ と定める．このとき，以下に挙げるそれぞれの論理式の真理値は何か？

1. $\forall\, m \in A$ ($\forall\, n \in B$ ($m < n$ である)).
2. $\exists\, m \in A$ ($\forall\, n \in B$ ($m < n$ である)).
3. $\forall\, m \in A$ ($\exists\, n \in B$ ($m < n$ である)).
4. $\exists\, m \in A$ ($\exists\, n \in B$ ($m < n$ である)).

問題 2． 集合 A, B, C を $A = \{a, b, c\}$, $B = \{b, c, d\}$, $C = \{e, f\}$ と定義するとき，次の集合がそれぞれ何であるか，その要素をすべて並べること (外延的定義) により答えよ.

1. $A - B$.
2. $A \cap C$.
3. $A \times B$.
4. C^3.
5. 2^B.

問題 3． 任意の集合 A, B, C，任意の関数 $f\colon A \to B$, $g\colon B \to C$，任意の集合 $Z \subseteq C$ に対して，$(g \circ f)^{-1}(Z) = f^{-1}(g^{-1}(Z))$ が成り立つことを証明せよ.

問題 4． 次の 2 つの関数が全射であるか，単射であるか，全単射であるか，それぞれ答えよ．(理由も述べよ．) そして，全単射である場合は，その逆関数が何であるか，答えよ.

1. $f_1\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ で，任意の $a \in \mathbb{R}$ に対して，$f_1(a) = a^2$.
2. $f_2\colon \mathbb{R} \to (0, +\infty)$ で，任意の $a \in \mathbb{R}$ に対して，$f_2(a) = 2^a$.

問題 5． 集合 A 上の同値関係 R と，任意の要素 $a, a' \in A$ を考える．このとき，$a\ R\ a'$ ならば，$[a]_R = [a']_R$ となることを証明せよ.

問題 6． 任意の正の整数 n に対して，第 n 番フィボナッチ数 F_n を

$$F_n = \begin{cases} 1 & (n = 1 \text{ のとき}) \\ 1 & (n = 2 \text{ のとき}) \\ F_{n-1} + F_{n-2} & (n > 2 \text{ のとき}) \end{cases}$$

で定義する．任意の正整数 n に対して

$$F_{n+1}^2 - F_{n+2}F_n = (-1)^n$$

が成り立つことを証明せよ.

以上