

離散数学 第 12 回
数学的帰納法 (1) : 数学的帰納法と再帰の定義

岡本 吉央
okamotoy@uec.ac.jp

電気通信大学

2013 年 7 月 16 日

最終更新 : 2013 年 8 月 25 日 22:18

今日の目標

- ▶ 数学的帰納法で証明ができるようになる
- ▶ 再帰的定義によって無限を扱う方法を理解する

目次

① 数学的帰納法

② 再帰的定義

③ 今日のまとめ

例題 1

例題 1 : 証明したいこと

任意の正の整数 n に対して,

$$8^n - 3^n \text{ が } 5 \text{ で割り切れる}$$

ことを証明せよ.

確認

- ▶ $n = 1$ のとき : $8^n - 3^n = 8 - 3 = 5$
- ▶ $n = 2$ のとき : $8^n - 3^n = 64 - 9 = 55 = 5 \times 11$
- ▶ $n = 3$ のとき : $8^n - 3^n = 512 - 27 = 485 = 5 \times 97$
- ▶ ...

注 : これはただの確認であり, 証明ではない

例題 1 : 数学的帰納法による証明

例題 1 : 証明したいこと

任意の正の整数 n に対して,

$$8^n - 3^n \text{ が } 5 \text{ で割り切れる}$$

ことを証明せよ .

数学的帰納法による証明 : 方針

- 1 $n = 1$ のときに正しいことを証明する
- 2 任意の正の整数 $k \geq 1$ に対して,
 $n = k$ のときに正しいならば, $n = k + 1$ のときに正しいことを証明する

例題 1 : 数学的帰納法による証明 (1)

例題 1 : 証明したいこと

任意の正の整数 n に対して,

$$8^n - 3^n \text{ が } 5 \text{ で割り切れる}$$

ことを証明せよ .

証明 : まず $n = 1$ のときに正しいことを証明する .

- ▶ $n = 1$ のとき , $8^n - 3^n = 8 - 3 = 5$.
- ▶ 5 は 5 で割り切れるので , このとき正しい .

例題 1 : 数学的帰納法による証明 (2)

例題 1 : 証明したいこと

任意の正の整数 n に対して,

$$8^n - 3^n \text{ が } 5 \text{ で割り切れる}$$

ことを証明せよ .

証明 (続) : 次に, 任意の正の整数 $k \geq 1$ を考える .

- ▶ $8^k - 3^k$ が 5 で割り切れると仮定する .

例題 1 : 数学的帰納法による証明 (2)

例題 1 : 証明したいこと

任意の正の整数 n に対して,

$$8^n - 3^n \text{ が } 5 \text{ で割り切れる}$$

ことを証明せよ .

証明 (続) : 次に, 任意の正の整数 $k \geq 1$ を考える .

- ▶ $8^k - 3^k$ が 5 で割り切れると仮定する .
- ▶ すなわち, ある正の整数 m が存在して, $8^k - 3^k = 5m$ となる .

例題 1 : 数学的帰納法による証明 (2)

例題 1 : 証明したいこと

任意の正の整数 n に対して,

$$8^n - 3^n \text{ が } 5 \text{ で割り切れる}$$

ことを証明せよ .

証明 (続) : 次に, 任意の正の整数 $k \geq 1$ を考える .

- ▶ $8^k - 3^k$ が 5 で割り切れると仮定する .
- ▶ すなわち, ある正の整数 m が存在して, $8^k - 3^k = 5m$ となる .
- ▶ $8^{k+1} - 3^{k+1}$

例題 1 : 数学的帰納法による証明 (2)

例題 1 : 証明したいこと

任意の正の整数 n に対して,

$$8^n - 3^n \text{ が } 5 \text{ で割り切れる}$$

ことを証明せよ .

証明 (続) : 次に, 任意の正の整数 $k \geq 1$ を考える .

- ▶ $8^k - 3^k$ が 5 で割り切れると仮定する .
- ▶ すなわち, ある正の整数 m が存在して, $8^k - 3^k = 5m$ となる .
- ▶ $8^{k+1} - 3^{k+1} = (5 + 3) \cdot 8^k - 3 \cdot 3^k$

例題 1 : 数学的帰納法による証明 (2)

例題 1 : 証明したいこと

任意の正の整数 n に対して,

$$8^n - 3^n \text{ が } 5 \text{ で割り切れる}$$

ことを証明せよ .

証明 (続) : 次に, 任意の正の整数 $k \geq 1$ を考える .

- ▶ $8^k - 3^k$ が 5 で割り切れると仮定する .
- ▶ すなわち, ある正の整数 m が存在して, $8^k - 3^k = 5m$ となる .
- ▶ $8^{k+1} - 3^{k+1} = (5 + 3) \cdot 8^k - 3 \cdot 3^k = 5 \cdot 8^k + 3 \cdot (8^k - 3^k)$

例題 1 : 数学的帰納法による証明 (2)

例題 1 : 証明したいこと

任意の正の整数 n に対して,

$$8^n - 3^n \text{ が } 5 \text{ で割り切れる}$$

ことを証明せよ .

証明 (続) : 次に, 任意の正の整数 $k \geq 1$ を考える .

- ▶ $8^k - 3^k$ が 5 で割り切れると仮定する .
- ▶ すなわち, ある正の整数 m が存在して, $8^k - 3^k = 5m$ となる .
- ▶ $8^{k+1} - 3^{k+1} = (5 + 3) \cdot 8^k - 3 \cdot 3^k = 5 \cdot 8^k + 3 \cdot (8^k - 3^k)$
- ▶ したがって, $8^{k+1} - 3^{k+1} = 5 \cdot 8^k + 3 \cdot 5m$

例題 1 : 数学的帰納法による証明 (2)

例題 1 : 証明したいこと

任意の正の整数 n に対して,

$$8^n - 3^n \text{ が } 5 \text{ で割り切れる}$$

ことを証明せよ .

証明 (続) : 次に, 任意の正の整数 $k \geq 1$ を考える .

- ▶ $8^k - 3^k$ が 5 で割り切れると仮定する .
- ▶ すなわち, ある正の整数 m が存在して, $8^k - 3^k = 5m$ となる .
- ▶ $8^{k+1} - 3^{k+1} = (5 + 3) \cdot 8^k - 3 \cdot 3^k = 5 \cdot 8^k + 3 \cdot (8^k - 3^k)$
- ▶ したがって, $8^{k+1} - 3^{k+1} = 5 \cdot 8^k + 3 \cdot 5m = 5 \cdot (8^k + 3m)$.

例題 1 : 数学的帰納法による証明 (2)

例題 1 : 証明したいこと

任意の正の整数 n に対して,

$$8^n - 3^n \text{ が } 5 \text{ で割り切れる}$$

ことを証明せよ .

証明 (続) : 次に, 任意の正の整数 $k \geq 1$ を考える .

- ▶ $8^k - 3^k$ が 5 で割り切れると仮定する .
- ▶ すなわち, ある正の整数 m が存在して, $8^k - 3^k = 5m$ となる .
- ▶ $8^{k+1} - 3^{k+1} = (5 + 3) \cdot 8^k - 3 \cdot 3^k = 5 \cdot 8^k + 3 \cdot (8^k - 3^k)$
- ▶ したがって, $8^{k+1} - 3^{k+1} = 5 \cdot 8^k + 3 \cdot 5m = 5 \cdot (8^k + 3m)$.
- ▶ $8^k + 3m$ は正の整数なので, $8^{k+1} - 3^{k+1}$ は 5 で割り切れる □

数学的帰納法とは？

数学的帰納法とは？ (常識に基づく定義)

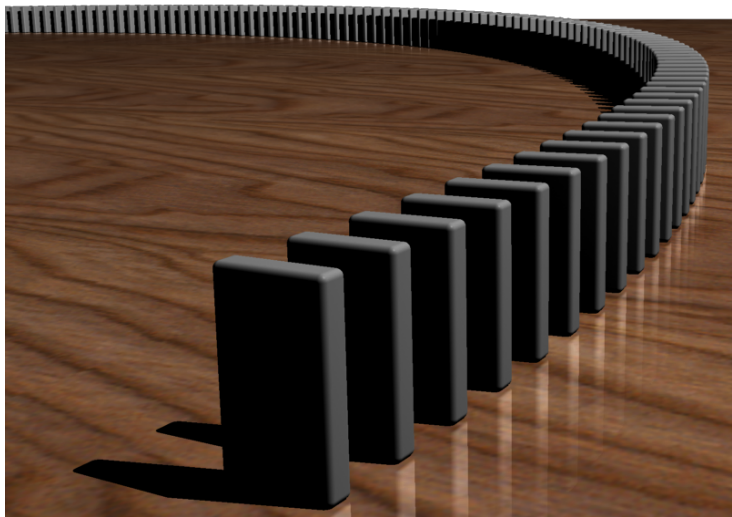
「任意の正の整数 n に対して, $P(n)$ 」という形の命題の証明

- 1 $P(1)$ を証明 (基底段階)
- 2 「任意の正の整数 k に対して『 $P(k)$ ならば $P(k+1)$ 』」を証明 (帰納段階)

例題 1 では,

$$P(n) = 8^n - 3^n \text{ が } 5 \text{ で割り切れる}$$

数学的帰納法のイメージ



<http://en.wikipedia.org/wiki/File:Dominoeffect.png>

論理操作：数学的帰納法

基底段階

使える性質

導く性質

 $P(1)$

帰納段階

任意の正の整数 k に対して

使える性質

導く性質

 $P(k)$ $P(k+1)$ この「 $P(k)$ 」を**帰納法の仮定**と呼ぶ

文章構造：数学的帰納法

[基底段階] まず， $P(1)$ を証明する．

ここで $P(1)$ を結論として導く．

したがって， $P(1)$ が成立する．

[帰納段階] 次に， k を任意の正の整数とする．

$P(k)$ が成立すると仮定する．

ここで $P(k+1)$ を結論として導く．

したがって， $P(k)$ ならば $P(k+1)$ が成立する．

したがって，任意の正の整数 n に対して $P(n)$ が成立する． □

例題 2

例題 2 : 証明したいこと

任意の正の整数 n に対して

$$2n \leq 2^n$$

となることを証明せよ .

確認

- ▶ $n = 1$ のとき : $2n = 2 \leq 2 = 2^n$
- ▶ $n = 2$ のとき : $2n = 4 \leq 4 = 2^n$
- ▶ $n = 3$ のとき : $2n = 6 \leq 8 = 2^n$
- ▶ $n = 4$ のとき : $2n = 8 \leq 16 = 2^n$
- ▶ ...

注 : これはただの確認であり , 証明ではない

例題 2 : 数学的帰納法 (基底段階)

例題 2 : 証明したいこと

任意の正の整数 n に対して

$$2n \leq 2^n$$

となることを証明せよ .

証明 (基底段階) : まず , $n = 1$ のときに正しいことを証明する .

例題 2 : 数学的帰納法 (基底段階)

例題 2 : 証明したいこと

任意の正の整数 n に対して

$$2n \leq 2^n$$

となることを証明せよ .

証明 (基底段階) : まず , $n = 1$ のときに正しいことを証明する .▶ 左辺 = $2n = 2$.

例題 2 : 数学的帰納法 (基底段階)

例題 2 : 証明したいこと

任意の正の整数 n に対して

$$2n \leq 2^n$$

となることを証明せよ .

証明 (基底段階) : まず , $n = 1$ のときに正しいことを証明する .

- ▶ 左辺 = $2n = 2$.
- ▶ 右辺 = $2^n = 2$.

例題 2 : 数学的帰納法 (基底段階)

例題 2 : 証明したいこと

任意の正の整数 n に対して

$$2n \leq 2^n$$

となることを証明せよ .

証明 (基底段階) : まず , $n = 1$ のときに正しいことを証明する .

- ▶ 左辺 = $2n = 2$.
- ▶ 右辺 = $2^n = 2$.
- ▶ したがって , $2n \leq 2^n$ であり , 正しい .

例題 2 : 数学的帰納法 (帰納段階)

例題 2 : 証明したいこと

任意の正の整数 n に対して

$$2n \leq 2^n$$

となることを証明せよ .

証明 (帰納段階) : 次に , 任意の正の整数 $k \geq 1$ を考える .

- ▶ $2k \leq 2^k$ であると仮定する .

例題 2 : 数学的帰納法 (帰納段階)

例題 2 : 証明したいこと

任意の正の整数 n に対して

$$2n \leq 2^n$$

となることを証明せよ .

証明 (帰納段階) : 次に , 任意の正の整数 $k \geq 1$ を考える .

- ▶ $2k \leq 2^k$ であると仮定する .
- ▶ $2(k+1) = 2k + 2$.

例題 2 : 数学的帰納法 (帰納段階)

例題 2 : 証明したいこと

任意の正の整数 n に対して

$$2n \leq 2^n$$

となることを証明せよ .

証明 (帰納段階) : 次に , 任意の正の整数 $k \geq 1$ を考える .

- ▶ $2k \leq 2^k$ であると仮定する .
- ▶ $2(k+1) = 2k + 2$.
- ▶ 帰納法の仮定より , $2k + 2 \leq 2^k + 2$.

例題 2 : 数学的帰納法 (帰納段階)

例題 2 : 証明したいこと

任意の正の整数 n に対して

$$2n \leq 2^n$$

となることを証明せよ .

証明 (帰納段階) : 次に , 任意の正の整数 $k \geq 1$ を考える .

- ▶ $2k \leq 2^k$ であると仮定する .
- ▶ $2(k+1) = 2k + 2$.
- ▶ 帰納法の仮定より , $2k + 2 \leq 2^k + 2$.
- ▶ したがって , $2(k+1) \leq 2^k + 2 \leq 2^k + 2^k = 2^{k+1}$.

例題 2 : 数学的帰納法 (帰納段階)

例題 2 : 証明したいこと

任意の正の整数 n に対して

$$2n \leq 2^n$$

となることを証明せよ .

証明 (帰納段階) : 次に , 任意の正の整数 $k \geq 1$ を考える .

- ▶ $2k \leq 2^k$ であると仮定する .
- ▶ $2(k+1) = 2k + 2$.
- ▶ 帰納法の仮定より , $2k + 2 \leq 2^k + 2$.
- ▶ したがって , $2(k+1) \leq 2^k + 2 \leq 2^k + 2^k = 2^{k+1}$.
- ▶ したがって , $2(k+1) \leq 2^{k+1}$ であり , 正しい . □

例題 3 : 数学的帰納法の変種

例題 3 : 証明したいこと

3 以上の任意の正の整数 n に対して

$$6n < 3^n$$

となることを証明せよ .

確認

- ▶ $n = 3$ のとき : $6n = 18 < 27 = 3^n$
- ▶ $n = 4$ のとき : $6n = 24 < 81 = 3^n$
- ▶ $n = 5$ のとき : $6n = 30 < 243 = 3^n$
- ▶ ...

証明の方法

数学的帰納法を $n = 1$ から始めず , $n = 3$ から始める

例題 3 : 数学的帰納法の変種 (基底段階)

例題 3 : 証明したいこと

3 以上の任意の正の整数 n に対して

$$6n < 3^n$$

となることを証明せよ .

証明 (基底段階) : まず , $n = 3$ のときに正しいことを証明する .

例題 3 : 数学的帰納法の変種 (基底段階)

例題 3 : 証明したいこと

3 以上の任意の正の整数 n に対して

$$6n < 3^n$$

となることを証明せよ .

証明 (基底段階) : まず , $n = 3$ のときに正しいことを証明する .

▶ 左辺 = $6n = 18$.

例題 3 : 数学的帰納法の変種 (基底段階)

例題 3 : 証明したいこと

3 以上の任意の正の整数 n に対して

$$6n < 3^n$$

となることを証明せよ .

証明 (基底段階) : まず , $n = 3$ のときに正しいことを証明する .

- ▶ 左辺 = $6n = 18$.
- ▶ 右辺 = $3^n = 27$.

例題 3 : 数学的帰納法の変種 (基底段階)

例題 3 : 証明したいこと

3 以上の任意の正の整数 n に対して

$$6n < 3^n$$

となることを証明せよ .

証明 (基底段階) : まず , $n = 3$ のときに正しいことを証明する .

- ▶ 左辺 = $6n = 18$.
- ▶ 右辺 = $3^n = 27$.
- ▶ したがって , $n = 3$ のとき $6n < 3^n$ となり , 正しい .

例題 3 : 数学的帰納法の変種 (帰納段階)

例題 3 : 証明したいこと

3 以上の任意の正の整数 n に対して

$$6n < 3^n$$

となることを証明せよ .

証明 (帰納段階) : 次に , 3 以上の任意の正整数 k を考える .

- ▶ $6k < 3^k$ であると仮定する .

例題 3 : 数学的帰納法の変種 (帰納段階)

例題 3 : 証明したいこと

3 以上の任意の正の整数 n に対して

$$6n < 3^n$$

となることを証明せよ .

証明 (帰納段階) : 次に , 3 以上の任意の正整数 k を考える .

- ▶ $6k < 3^k$ であると仮定する .
- ▶ $6(k+1) = 6k + 6$

例題 3 : 数学的帰納法の変種 (帰納段階)

例題 3 : 証明したいこと

3 以上の任意の正の整数 n に対して

$$6n < 3^n$$

となることを証明せよ .

証明 (帰納段階) : 次に , 3 以上の任意の正整数 k を考える .

- ▶ $6k < 3^k$ であると仮定する .
- ▶ $6(k+1) = 6k + 6 < 3^k + 6$

例題 3 : 数学的帰納法の変種 (帰納段階)

例題 3 : 証明したいこと

3 以上の任意の正の整数 n に対して

$$6n < 3^n$$

となることを証明せよ .

証明 (帰納段階) : 次に , 3 以上の任意の正整数 k を考える .

- ▶ $6k < 3^k$ であると仮定する .
- ▶ $6(k+1) = 6k + 6 < 3^k + 6 < 3^k + 2 \cdot 3^k$

例題 3 : 数学的帰納法の変種 (帰納段階)

例題 3 : 証明したいこと

3 以上の任意の正の整数 n に対して

$$6n < 3^n$$

となることを証明せよ .

証明 (帰納段階) : 次に , 3 以上の任意の正整数 k を考える .

- ▶ $6k < 3^k$ であると仮定する .
- ▶ $6(k+1) = 6k + 6 < 3^k + 6 < 3^k + 2 \cdot 3^k = 3^{k+1}$.

例題 3 : 数学的帰納法の変種 (帰納段階)

例題 3 : 証明したいこと

3 以上の任意の正の整数 n に対して

$$6n < 3^n$$

となることを証明せよ .

証明 (帰納段階) : 次に , 3 以上の任意の正整数 k を考える .

- ▶ $6k < 3^k$ であると仮定する .
- ▶ $6(k+1) = 6k + 6 < 3^k + 6 < 3^k + 2 \cdot 3^k = 3^{k+1}$.
- ▶ したがって , $6(k+1) < 3^{k+1}$ となり , 正しい . □

目次

① 数学的帰納法

② 再帰的定義

③ 今日のまとめ

クイズ

次に来るのは何？

1, 3, 7, 13, 21,

クイズ

次に来るのは何？

1, 3, 7, 13, 21, 31

$$n^2 + n + 1, n = 0, 1, 2, \dots$$

クイズ

次に来るのは何？

1, 3, 7, 13, 21, 31

 $n^2 + n + 1, n = 0, 1, 2, \dots$

次に来るのは何？

1, 3, 7, 13, 21,

クイズ

次に来るのは何？

1, 3, 7, 13, 21, 31

$$n^2 + n + 1, n = 0, 1, 2, \dots$$

次に来るのは何？

1, 3, 7, 13, 21, 151

$$n^5 - 10n^4 + 35n^3 - 49n^2 + 25n + 1, n = 0, 1, 2, \dots$$

クイズ

次に来るのは何？

1, 3, 7, 13, 21, 31

$$n^2 + n + 1, n = 0, 1, 2, \dots$$

次に来るのは何？

1, 3, 7, 13, 21, 151

$$n^5 - 10n^4 + 35n^3 - 49n^2 + 25n + 1, n = 0, 1, 2, \dots$$

- ▶ 「...」はあいまい

クイズ

次に来るのは何？

1, 3, 7, 13, 21, 31

$$n^2 + n + 1, n = 0, 1, 2, \dots$$

次に来るのは何？

1, 3, 7, 13, 21, 151

$$n^5 - 10n^4 + 35n^3 - 49n^2 + 25n + 1, n = 0, 1, 2, \dots$$

- ▶ 「...」はあいまい

格言

情報科学の本質の1つは「『無意識』を意識すること」

階乗

階乗とは？ (常識に基づく定義)

正の整数 n に対して, n の階乗とは

$$n! = 1 \cdot 2 \cdot \dots \cdot n$$

のこと

この定義の問題点

- ▶ 「 \dots 」はあいまい

あいまいさのないように定義するには？

階乗：再帰的定義

階乗とは？（再帰的定義）

正の整数 n に対して， n の階乗とは

$$n! = \begin{cases} 1 & (n = 1 \text{ のとき}) \\ n \cdot (n - 1)! & (n > 1 \text{ のとき}) \end{cases}$$

のこと

実際の計算

- ▶ $n = 1$ のとき： $1! = 1$
- ▶ $n = 2$ のとき： $2! = 2 \cdot 1! = 2 \cdot 1 = 2$
- ▶ $n = 3$ のとき： $3! = 3 \cdot 2! = 3 \cdot 2 = 6$
- ▶ $n = 4$ のとき： $4! = 4 \cdot 3! = 4 \cdot 6 = 24$
- ▶ ...

例題 4 : 再帰的定義

例題 4 : 証明したいこと

任意の正の整数 n に対して, a_n を次のように定義する

$$a_n = \begin{cases} 1 & (n = 1 \text{ のとき}) \\ a_{n-1} + 2 & (n > 1 \text{ のとき}) \end{cases}$$

このとき,

$$a_n = 2n - 1$$

となることを証明せよ

確認

- ▶ $n = 1$ のとき : $a_1 = 1$
- ▶ $n = 2$ のとき : $a_2 = a_1 + 2 = 1 + 2 = 3 = 2 \cdot 2 - 1$
- ▶ $n = 3$ のとき : $a_3 = a_2 + 2 = 3 + 2 = 5 = 2 \cdot 3 - 1$
- ▶ $n = 4$ のとき : $a_4 = a_3 + 2 = 5 + 2 = 7 = 2 \cdot 4 - 1$
- ▶ ...

例題 4 : 数学的帰納法による証明 (基底段階)

例題 4 : 証明したいこと

任意の正の整数 n に対して, a_n を次のように定義する

$$a_n = \begin{cases} 1 & (n = 1 \text{ のとき}) \\ a_{n-1} + 2 & (n > 1 \text{ のとき}) \end{cases}$$

このとき,

$$a_n = 2n - 1$$

となることを証明せよ

証明 (基底段階): まず, $n = 1$ のときを証明する.

- ▶ 左辺 = $a_1 = 1$.
- ▶ 右辺 = $2 \cdot 1 - 1 = 1$.
- ▶ したがって, $n = 1$ のとき $a_n = 2n - 1$ となる.

例題 4 : 数学的帰納法による証明 (帰納段階)

例題 4 : 証明したいこと

任意の正の整数 n に対して, a_n を次のように定義する

$$a_n = \begin{cases} 1 & (n = 1 \text{ のとき}) \\ a_{n-1} + 2 & (n > 1 \text{ のとき}) \end{cases}$$

このとき,

$$a_n = 2n - 1$$

となることを証明せよ

証明 (帰納段階) : 次に任意の正の整数 k を考える .

- ▶ $a_k = 2k - 1$ であると仮定する .

例題 4 : 数学的帰納法による証明 (帰納段階)

例題 4 : 証明したいこと

任意の正の整数 n に対して, a_n を次のように定義する

$$a_n = \begin{cases} 1 & (n = 1 \text{ のとき}) \\ a_{n-1} + 2 & (n > 1 \text{ のとき}) \end{cases}$$

このとき,

$$a_n = 2n - 1$$

となることを証明せよ

証明 (帰納段階) : 次に任意の正の整数 k を考える .

- ▶ $a_k = 2k - 1$ であると仮定する .
- ▶ $a_{k+1} = a_k + 2$

例題 4 : 数学的帰納法による証明 (帰納段階)

例題 4 : 証明したいこと

任意の正の整数 n に対して, a_n を次のように定義する

$$a_n = \begin{cases} 1 & (n = 1 \text{ のとき}) \\ a_{n-1} + 2 & (n > 1 \text{ のとき}) \end{cases}$$

このとき,

$$a_n = 2n - 1$$

となることを証明せよ

証明 (帰納段階) : 次に任意の正の整数 k を考える .

- ▶ $a_k = 2k - 1$ であると仮定する .
- ▶ $a_{k+1} = a_k + 2 = (2k - 1) + 2$

例題 4 : 数学的帰納法による証明 (帰納段階)

例題 4 : 証明したいこと

任意の正の整数 n に対して, a_n を次のように定義する

$$a_n = \begin{cases} 1 & (n = 1 \text{ のとき}) \\ a_{n-1} + 2 & (n > 1 \text{ のとき}) \end{cases}$$

このとき,

$$a_n = 2n - 1$$

となることを証明せよ

証明 (帰納段階): 次に任意の正の整数 k を考える .

- ▶ $a_k = 2k - 1$ であると仮定する .
- ▶ $a_{k+1} = a_k + 2 = (2k - 1) + 2 = 2(k + 1) - 1$.

例題 4 : 数学的帰納法による証明 (帰納段階)

例題 4 : 証明したいこと

任意の正の整数 n に対して, a_n を次のように定義する

$$a_n = \begin{cases} 1 & (n = 1 \text{ のとき}) \\ a_{n-1} + 2 & (n > 1 \text{ のとき}) \end{cases}$$

このとき,

$$a_n = 2n - 1$$

となることを証明せよ

証明 (帰納段階): 次に任意の正の整数 k を考える .

- ▶ $a_k = 2k - 1$ であると仮定する .
- ▶ $a_{k+1} = a_k + 2 = (2k - 1) + 2 = 2(k + 1) - 1$.
- ▶ したがって, $a_{k+1} = 2(k + 1) - 1$ となり, 正しい . □

再帰的定義の例：フィボナッチ数

フィボナッチ数とは？

任意の正の整数 n に対して，第 n 番フィボナッチ数 F_n を

$$F_n = \begin{cases} 1 & (n = 1 \text{ のとき}) \\ 1 & (n = 2 \text{ のとき}) \\ F_{n-1} + F_{n-2} & (n > 2 \text{ のとき}) \end{cases}$$

で定義する

確認

- ▶ $n = 1$ のとき： $F_1 = 1$
- ▶ $n = 2$ のとき： $F_2 = 1$
- ▶ $n = 3$ のとき： $F_3 = F_2 + F_1 = 1 + 1 = 2$
- ▶ $n = 4$ のとき： $F_4 = F_3 + F_2 = 2 + 1 = 3$
- ▶ $n = 5$ のとき： $F_5 = F_4 + F_3 = 3 + 2 = 5$
- ▶ ...

フィボナッチ数の性質

例題 5 (カッシーニの恒等式)

第 n 番フィボナッチ数を F_n とするとき, 任意の正整数 n に対して

$$F_{n+1}^2 - F_{n+2}F_n = (-1)^n$$

が成り立つことを証明せよ

フィボナッチ数の性質：数学的帰納法による証明 (基底段階)

例題 5 (カッシーニの恒等式)

第 n 番フィボナッチ数を F_n とするとき，任意の正整数 n に対して

$$F_{n+1}^2 - F_{n+2}F_n = (-1)^n$$

が成り立つことを証明せよ

証明：(基底段階) $n = 1$ の場合を証明する．

- ▶ 左辺 = $F_2^2 - F_3F_1 = 1^2 - 2 \cdot 1 = -1$ ．
- ▶ 右辺 = $(-1)^1 = -1$ ．
- ▶ したがって， $n = 1$ のとき $F_{n+1}^2 - F_{n+2}F_n = (-1)^n$ は成り立つ

フィボナッチ数の性質：数学的帰納法による証明 (帰納段階)

例題 5 (カッシーニの恒等式)

任意の正整数 n に対して第 n 番フィボナッチ数を F_n とするとき

$$F_{n+1}^2 - F_{n+2}F_n = (-1)^n$$

が成り立つことを証明せよ

証明：(帰納段階) 次に，1 以上の任意の正の整数 k を考える．

- ▶ $F_{k+1}^2 - F_{k+2}F_k = (-1)^k$ であると仮定する．

フィボナッチ数の性質：数学的帰納法による証明 (帰納段階)

例題 5 (カッシーニの恒等式)

任意の正整数 n に対して第 n 番フィボナッチ数を F_n とするとき

$$F_{n+1}^2 - F_{n+2}F_n = (-1)^n$$

が成り立つことを証明せよ

証明：(帰納段階) 次に，1 以上の任意の正の整数 k を考える．

- ▶ $F_{k+1}^2 - F_{k+2}F_k = (-1)^k$ であると仮定する．
- ▶ $F_{k+2}^2 - F_{k+3}F_{k+1}$

フィボナッチ数の性質：数学的帰納法による証明 (帰納段階)

例題 5 (カッシーニの恒等式)

任意の正整数 n に対して第 n 番フィボナッチ数を F_n とするとき

$$F_{n+1}^2 - F_{n+2}F_n = (-1)^n$$

が成り立つことを証明せよ

証明：(帰納段階) 次に，1 以上の任意の正の整数 k を考える．

- ▶ $F_{k+1}^2 - F_{k+2}F_k = (-1)^k$ であると仮定する．
- ▶ $F_{k+2}^2 - F_{k+3}F_{k+1}$
 $= F_{k+2}^2 - (F_{k+2} + F_{k+1})F_{k+1}$ (フィボナッチ数の定義と $k+3 > 2$ から)

フィボナッチ数の性質：数学的帰納法による証明 (帰納段階)

例題 5 (カッシーニの恒等式)

任意の正整数 n に対して第 n 番フィボナッチ数を F_n とするとき

$$F_{n+1}^2 - F_{n+2}F_n = (-1)^n$$

が成り立つことを証明せよ

証明：(帰納段階) 次に，1 以上の任意の正の整数 k を考える．

- ▶ $F_{k+1}^2 - F_{k+2}F_k = (-1)^k$ であると仮定する．
- ▶ $F_{k+2}^2 - F_{k+3}F_{k+1}$

$$= F_{k+2}^2 - (F_{k+2} + F_{k+1})F_{k+1} \quad (\text{フィボナッチ数の定義と } k+3 > 2 \text{ から})$$

$$= F_{k+2}^2 - F_{k+2}F_{k+1} - F_{k+1}^2 \quad (\text{展開して整理})$$

フィボナッチ数の性質：数学的帰納法による証明 (帰納段階)

例題 5 (カッシーニの恒等式)

任意の正整数 n に対して第 n 番フィボナッチ数を F_n とするとき

$$F_{n+1}^2 - F_{n+2}F_n = (-1)^n$$

が成り立つことを証明せよ

証明：(帰納段階) 次に，1 以上の任意の正の整数 k を考える．

- ▶ $F_{k+1}^2 - F_{k+2}F_k = (-1)^k$ であると仮定する．
- ▶ $F_{k+2}^2 - F_{k+3}F_{k+1}$
 - $= F_{k+2}^2 - (F_{k+2} + F_{k+1})F_{k+1}$ (フィボナッチ数の定義と $k+3 > 2$ から)
 - $= F_{k+2}^2 - F_{k+2}F_{k+1} - F_{k+1}^2$ (展開して整理)
 - $= F_{k+2}^2 - F_{k+2}F_{k+1} - F_{k+2}F_k - (-1)^k$ (帰納法の仮定から)

フィボナッチ数の性質：数学的帰納法による証明 (帰納段階)

例題 5 (カッシーニの恒等式)

任意の正整数 n に対して第 n 番フィボナッチ数を F_n とするとき

$$F_{n+1}^2 - F_{n+2}F_n = (-1)^n$$

が成り立つことを証明せよ

証明：(帰納段階) 次に，1 以上の任意の正の整数 k を考える．

- ▶ $F_{k+1}^2 - F_{k+2}F_k = (-1)^k$ であると仮定する．
- ▶ $F_{k+2}^2 - F_{k+3}F_{k+1}$
 - $= F_{k+2}^2 - (F_{k+2} + F_{k+1})F_{k+1}$ (フィボナッチ数の定義と $k+3 > 2$ から)
 - $= F_{k+2}^2 - F_{k+2}F_{k+1} - F_{k+1}^2$ (展開して整理)
 - $= F_{k+2}^2 - F_{k+2}F_{k+1} - F_{k+2}F_k - (-1)^k$ (帰納法の仮定から)
 - $= F_{k+2}(F_{k+2} - F_{k+1} - F_k) + (-1)^{k+1}$ (因数分解して整理)

フィボナッチ数の性質：数学的帰納法による証明 (帰納段階)

例題 5 (カッシーニの恒等式)

任意の正整数 n に対して第 n 番フィボナッチ数を F_n とするとき

$$F_{n+1}^2 - F_{n+2}F_n = (-1)^n$$

が成り立つことを証明せよ

証明：(帰納段階) 次に，1 以上の任意の正の整数 k を考える．

- ▶ $F_{k+1}^2 - F_{k+2}F_k = (-1)^k$ であると仮定する．
- ▶ $F_{k+2}^2 - F_{k+3}F_{k+1}$
 - $= F_{k+2}^2 - (F_{k+2} + F_{k+1})F_{k+1}$ (フィボナッチ数の定義と $k+3 > 2$ から)
 - $= F_{k+2}^2 - F_{k+2}F_{k+1} - F_{k+1}^2$ (展開して整理)
 - $= F_{k+2}^2 - F_{k+2}F_{k+1} - F_{k+2}F_k - (-1)^k$ (帰納法の仮定から)
 - $= F_{k+2}(F_{k+2} - F_{k+1} - F_k) + (-1)^{k+1}$ (因数分解して整理)
 - $= (-1)^{k+1}$ (フィボナッチ数の定義と $k+2 > 2$ から)

フィボナッチ数の性質：数学的帰納法による証明 (帰納段階)

例題 5 (カッシーニの恒等式)

任意の正整数 n に対して第 n 番フィボナッチ数を F_n とするとき

$$F_{n+1}^2 - F_{n+2}F_n = (-1)^n$$

が成り立つことを証明せよ

証明：(帰納段階) 次に，1 以上の任意の正の整数 k を考える．

- ▶ $F_{k+1}^2 - F_{k+2}F_k = (-1)^k$ であると仮定する．
- ▶ $F_{k+2}^2 - F_{k+3}F_{k+1}$
 - $= F_{k+2}^2 - (F_{k+2} + F_{k+1})F_{k+1}$ (フィボナッチ数の定義と $k+3 > 2$ から)
 - $= F_{k+2}^2 - F_{k+2}F_{k+1} - F_{k+1}^2$ (展開して整理)
 - $= F_{k+2}^2 - F_{k+2}F_{k+1} - F_{k+2}F_k - (-1)^k$ (帰納法の仮定から)
 - $= F_{k+2}(F_{k+2} - F_{k+1} - F_k) + (-1)^{k+1}$ (因数分解して整理)
 - $= (-1)^{k+1}$. (フィボナッチ数の定義と $k+2 > 2$ から)
- ▶ したがって， $F_{k+2}^2 - F_{k+3}F_{k+1} = (-1)^{k+1}$ となり，正しい。 □

フィボナッチ数の公式

例題 6：フィボナッチ数の公式

任意の正整数 n に対して第 n 番フィボナッチ数を F_n とするとき

$$F_n = \frac{1}{\sqrt{5}} \left(\left(\frac{1 + \sqrt{5}}{2} \right)^n - \left(\frac{1 - \sqrt{5}}{2} \right)^n \right)$$

が成り立つことを証明せよ

証明の注意点

- ▶ F_n は F_{n-1}, F_{n-2} を使って定義される
- ▶ よって, (1つ前だけ仮定する) 普通の帰納法では証明できない
- ▶ よって, もっと強い証明の仕方が必要となる
- ▶ 基底段階も $n = 1$ のときと $n = 2$ のときの2つが必要となる

数学的帰納法の強いバージョン

数学的帰納法の強いバージョン

[基底段階]

- ▶ $P(1)$ を証明する

[帰納段階] 任意の正の整数 k を考える

- ▶ 1 以上 k 以下の任意の正の整数 k' に対して $P(k')$ を仮定する
- ▶ $P(k + 1)$ を証明する

- ▶ 前のバージョンでは帰納段階で「 $P(k)$ 」のみを仮定した
- ▶ フィボナッチ数に関する証明では基底段階が $P(1)$ と $P(2)$ になる

フィボナッチ数の公式：数学的帰納法（基底段階 1）

例題 6：フィボナッチ数の公式

任意の正整数 n に対して第 n 番フィボナッチ数を F_n とするとき

$$F_n = \frac{1}{\sqrt{5}} \left(\left(\frac{1 + \sqrt{5}}{2} \right)^n - \left(\frac{1 - \sqrt{5}}{2} \right)^n \right)$$

が成り立つことを証明せよ

証明：まず， $n = 1$ のときを証明する．

- ▶ 左辺 = $F_1 = 1$.
- ▶ 右辺 = $\frac{1}{\sqrt{5}} \left(\left(\frac{1 + \sqrt{5}}{2} \right)^1 - \left(\frac{1 - \sqrt{5}}{2} \right)^1 \right) = \frac{1}{\sqrt{5}} \cdot \sqrt{5} = 1$.
- ▶ したがって， $n = 1$ のときは正しい．

フィボナッチ数の公式：数学的帰納法（基底段階 2）

例題 6：フィボナッチ数の公式

任意の正整数 n に対して第 n 番フィボナッチ数を F_n とするとき

$$F_n = \frac{1}{\sqrt{5}} \left(\left(\frac{1 + \sqrt{5}}{2} \right)^n - \left(\frac{1 - \sqrt{5}}{2} \right)^n \right)$$

が成り立つことを証明せよ

証明：次に， $n = 2$ のときを証明する．

- ▶ 左辺 = $F_2 = 1$.
- ▶ 右辺 = $\frac{1}{\sqrt{5}} \left(\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2} \right)^2 - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2} \right)^2 \right) = \frac{1}{\sqrt{5}} \cdot \left(\frac{6+2\sqrt{5}}{4} - \frac{6-2\sqrt{5}}{4} \right)$
 $= \frac{1}{\sqrt{5}} \cdot \sqrt{5} = 1$.
- ▶ したがって， $n = 2$ のときは正しい．

フィボナッチ数の公式：数学的帰納法 (帰納段階 1)

例題 6：フィボナッチ数の公式

任意の正整数 n に対して第 n 番フィボナッチ数を F_n とするとき

$$F_n = \frac{1}{\sqrt{5}} \left(\left(\frac{1 + \sqrt{5}}{2} \right)^n - \left(\frac{1 - \sqrt{5}}{2} \right)^n \right)$$

が成り立つことを証明せよ

証明： k を 2 以上の任意の整数とする。

- ▶ 1 以上 k 以下の任意の整数に対して，

$$F_k = \frac{1}{\sqrt{5}} \left(\left(\frac{1 + \sqrt{5}}{2} \right)^k - \left(\frac{1 - \sqrt{5}}{2} \right)^k \right) \text{ と仮定する。}$$

- ▶ ...

フィボナッチ数の公式：数学的帰納法 (帰納段階 2)

$$F_{k+1}$$

フィボナッチ数の公式：数学的帰納法 (帰納段階 2)

$$F_{k+1} = F_k + F_{k-1} \quad (\text{フィボナッチ数の定義と } k + 1 > 2)$$

フィボナッチ数の公式：数学的帰納法 (帰納段階 2)

$$\begin{aligned} F_{k+1} &= F_k + F_{k-1} && \text{(フィボナッチ数の定義と } k+1 > 2 \text{)} \\ &= \frac{1}{\sqrt{5}} \left(\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2} \right)^k - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2} \right)^k \right) + \frac{1}{\sqrt{5}} \left(\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2} \right)^{k-1} - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2} \right)^{k-1} \right) \\ &&& \text{(帰納法の仮定)} \end{aligned}$$

フィボナッチ数の公式：数学的帰納法（帰納段階 2）

$$\begin{aligned}
 F_{k+1} &= F_k + F_{k-1} && \text{(フィボナッチ数の定義と } k+1 > 2 \text{)} \\
 &= \frac{1}{\sqrt{5}} \left(\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2} \right)^k - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2} \right)^k \right) + \frac{1}{\sqrt{5}} \left(\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2} \right)^{k-1} - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2} \right)^{k-1} \right) \\
 & && \text{(帰納法の仮定)} \\
 &= \frac{1}{\sqrt{5}} \left(\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2} \right)^{k-1} \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2} + 1 \right) - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2} \right)^{k-1} \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2} + 1 \right) \right) \\
 & && \text{(式の整理)}
 \end{aligned}$$

フィボナッチ数の公式：数学的帰納法 (帰納段階 2)

$$\begin{aligned}
F_{k+1} &= F_k + F_{k-1} && \text{(フィボナッチ数の定義と } k+1 > 2 \text{)} \\
&= \frac{1}{\sqrt{5}} \left(\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2} \right)^k - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2} \right)^k \right) + \frac{1}{\sqrt{5}} \left(\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2} \right)^{k-1} - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2} \right)^{k-1} \right) \\
&&& \text{(帰納法の仮定)} \\
&= \frac{1}{\sqrt{5}} \left(\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2} \right)^{k-1} \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2} + 1 \right) - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2} \right)^{k-1} \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2} + 1 \right) \right) \\
&&& \text{(式の整理)} \\
&= \frac{1}{\sqrt{5}} \left(\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2} \right)^{k-1} \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2} \right)^2 - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2} \right)^{k-1} \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2} \right)^2 \right) \\
&&& \text{(式の整理)}
\end{aligned}$$

フィボナッチ数の公式：数学的帰納法（帰納段階 2）

$$\begin{aligned}
F_{k+1} &= F_k + F_{k-1} && \text{(フィボナッチ数の定義と } k+1 > 2 \text{)} \\
&= \frac{1}{\sqrt{5}} \left(\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2} \right)^k - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2} \right)^k \right) + \frac{1}{\sqrt{5}} \left(\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2} \right)^{k-1} - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2} \right)^{k-1} \right) && \text{(帰納法の仮定)} \\
&= \frac{1}{\sqrt{5}} \left(\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2} \right)^{k-1} \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2} + 1 \right) - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2} \right)^{k-1} \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2} + 1 \right) \right) && \text{(式の整理)} \\
&= \frac{1}{\sqrt{5}} \left(\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2} \right)^{k-1} \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2} \right)^2 - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2} \right)^{k-1} \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2} \right)^2 \right) && \text{(式の整理)} \\
&= \frac{1}{\sqrt{5}} \left(\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2} \right)^{k+1} - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2} \right)^{k+1} \right) && \text{(式の整理)}
\end{aligned}$$

フィボナッチ数の公式：数学的帰納法（帰納段階 2）

$$\begin{aligned}
F_{k+1} &= F_k + F_{k-1} && \text{(フィボナッチ数の定義と } k+1 > 2 \text{)} \\
&= \frac{1}{\sqrt{5}} \left(\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2} \right)^k - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2} \right)^k \right) + \frac{1}{\sqrt{5}} \left(\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2} \right)^{k-1} - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2} \right)^{k-1} \right) \\
& && \text{(帰納法の仮定)} \\
&= \frac{1}{\sqrt{5}} \left(\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2} \right)^{k-1} \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2} + 1 \right) - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2} \right)^{k-1} \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2} + 1 \right) \right) \\
& && \text{(式の整理)} \\
&= \frac{1}{\sqrt{5}} \left(\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2} \right)^{k-1} \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2} \right)^2 - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2} \right)^{k-1} \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2} \right)^2 \right) \\
& && \text{(式の整理)} \\
&= \frac{1}{\sqrt{5}} \left(\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2} \right)^{k+1} - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2} \right)^{k+1} \right) \\
& && \text{(式の整理)} \\
\text{したがって, } F_{k+1} &= \frac{1}{\sqrt{5}} \left(\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2} \right)^{k+1} - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2} \right)^{k+1} \right) \text{ となり正しい. } \square
\end{aligned}$$

目次

① 数学的帰納法

② 再帰的定義

③ 今日のまとめ

今日のまとめ

今日の目標

- ▶ 数学的帰納法で証明ができるようになる
- ▶ 再帰的定義によって無限を扱う方法を理解する

目次

① 数学的帰納法

② 再帰的定義

③ 今日のまとめ