離散数学 第 7 回
関数 (2)：全射と単射

岡本 吉央
okamotoy@uec.ac.jp

電気通信大学

2013 年 6 月 4 日

最終更新：2013 年 6 月 3 日　11:32

概要

今日の目標

- 特殊な関数「全射」,「単射」,「全単射」を理解する
- 全単射の逆関数を理解する

目次

マンツーマンディフェンス

全単射の例

新幹線の指定席

単射の例

目次

全射

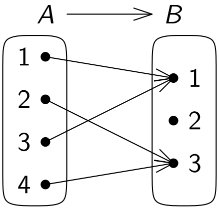
集合 A, B と関数 $f\colon A \to B$

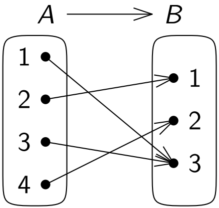
全射とは？

f が**全射**であるとは，次を満たすこと

すべての $b \in B$ に対して，ある $a \in A$ が存在して $b = f(a)$

論理記号で書くと「$\forall\, b \in B\ (\exists\, a \in A\ (b = f(a)))$」





全射

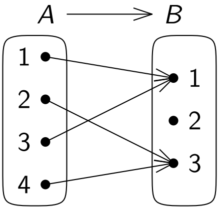
集合 A, B と関数 $f\colon A \to B$

全射とは？

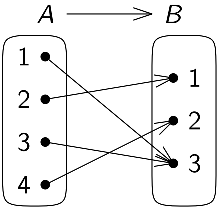
f が**全射**であるとは，次を満たすこと

$$\text{すべての } b \in B \text{ に対して，ある } a \in A \text{ が存在して } b = f(a)$$

論理記号で書くと「$\forall\, b \in B\ (\exists\, a \in A\ (b = f(a)))$」



全射ではない



全射

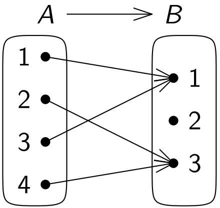
集合 A, B と関数 $f\colon A \to B$

全射とは？

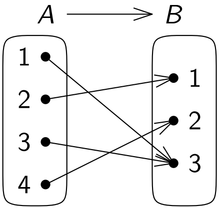
f が**全射**であるとは，次を満たすこと

すべての $b \in B$ に対して，ある $a \in A$ が存在して $b = f(a)$

論理記号で書くと「$\forall\ b \in B\ (\exists\ a \in A\ (b = f(a)))$」



全射ではない



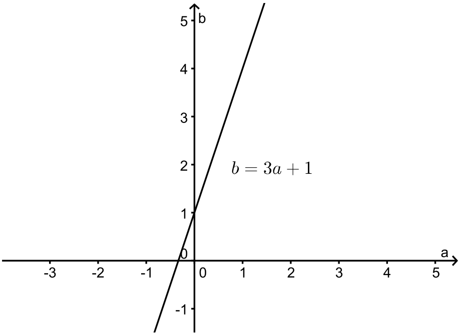
全射である

例題 1

例題 1

次の関数 $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ が全射であることを証明せよ．

$$\text{任意の } a \in \mathbb{R} \text{ に対して } f(a) = 3a + 1$$



例題 1：続き

例題 1

次の関数 $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ が全射であることを証明せよ．

$$\text{任意の } a \in \mathbb{R} \text{ に対して } f(a) = 3a + 1$$

定義に基づいて書き直す

すべての $b \in \mathbb{R}$ に対して，ある $a \in \mathbb{R}$ が存在して，$b = 3a + 1$

例題 1：論理操作

使える性質 (仮定)	導く性質 (目標)
	$\forall\, b \in \mathbb{R}\ (\exists\, a \in \mathbb{R}\ (b = 3a + 1))$

例題 1：論理操作

使える性質 (仮定)	導く性質 (目標)
$b \in \mathbb{R}$	$\cancel{\forall\, b \in \mathbb{R}\ (\exists\, a \in \mathbb{R}\ (b = 3a + 1))}$
	$\exists\, a \in \mathbb{R}\ (b = 3a + 1)$

$b \in \mathbb{R}$ **は任意に選ぶ**

導く性質が「∀」で始まる構造

例題 1：論理操作

使える性質 (仮定)	導く性質 (目標)
$b \in \mathbb{R}$	$\cancel{\forall\ b \in \mathbb{R}\ (\exists\ a \in \mathbb{R}\ (b = 3a + 1))}$
$\frac{b-1}{3} \in \mathbb{R}$	$\exists\ a \in \mathbb{R}\ (b = 3a + 1)$

実数の性質から

例題 1：論理操作

使える性質 (仮定)	導く性質 (目標)
$b \in \mathbb{R}$	$\cancel{\forall\, b \in \mathbb{R}\ (\exists\, a \in \mathbb{R}\ (b = 3a + 1))}$
$\frac{b-1}{3} \in \mathbb{R}$	$\cancel{\exists\, a \in \mathbb{R}\ (b = 3a + 1)}$
	$b = 3(\frac{b-1}{3}) + 1$

$a = \frac{b-1}{3}$ **とする**

構成による証明 (導く性質が「∃」で始まる構造)

例題 1：論理操作

使える性質 (仮定)	導く性質 (目標)
$b \in \mathbb{R}$	$\cancel{\forall\ b \in \mathbb{R}\ (\exists\ a \in \mathbb{R}\ (b = 3a + 1))}$
$\frac{b-1}{3} \in \mathbb{R}$	$\cancel{\exists\ a \in \mathbb{R}\ (b = 3a + 1)}$
	$\cancel{b = 3(\frac{b-1}{3}) + 1}$
	$b = b$

$a = \frac{b-1}{3}$ **とする**

式を整理

例題 1：文章構造

全射の定義から,「すべての $b \in \mathbb{R}$ に対して，ある $a \in \mathbb{R}$ が存在して，$b = 3a + 1$」となることを証明すればよい．

任意の $b \in \mathbb{R}$ を選ぶ．

このとき，$\frac{b-1}{3} \in \mathbb{R}$．
$a = \frac{b-1}{3}$ とすると，$a \in \mathbb{R}$ であり，$b = 3\frac{b-1}{3} + 1 = 3a + 1$．

したがって,「すべての $b \in \mathbb{R}$ に対して，ある $a \in \mathbb{R}$ が存在して，$b = 3a + 1$」となる．

したがって，f は全射である． □

注：これは「構成による証明」で，$\frac{b-1}{3}$ を構成した．
しかし，どうやって見つけたのかは証明に書かない．

例題 1：証明の清書

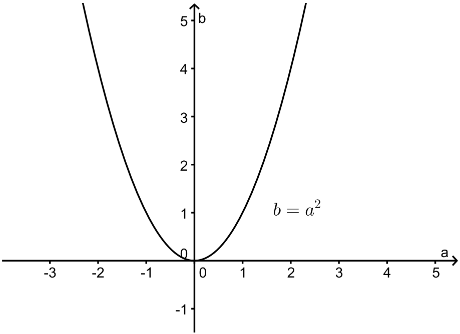
- 全射の定義から，「すべての $b \in \mathbb{R}$ に対して，ある $a \in \mathbb{R}$ が存在して，$b = 3a + 1$」となることを証明すればよい．
- 任意の $b \in \mathbb{R}$ を選ぶ．
- このとき，$\frac{b-1}{3} \in \mathbb{R}$．
- $a = \frac{b-1}{3}$ とすると，$a \in \mathbb{R}$ であり，$b = 3\frac{b-1}{3} + 1 = 3a + 1$．
- したがって，「すべての $b \in \mathbb{R}$ に対して，ある $a \in \mathbb{R}$ が存在して，$b = 3a + 1$」となる．
- したがって，f は全射である． $\square$

例題 2

例題 2

次の関数 $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ が全射で**ない**ことを証明せよ．

$$\text{任意の } a \in \mathbb{R} \text{ に対して } f(a) = a^2$$



例題 2：続き

例題 2

次の関数 $f \colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ が全射でないことを証明せよ．

任意の $a \in \mathbb{R}$ に対して $f(a) = a^2$

定義に基づいて書き直す

「すべての $b \in \mathbb{R}$ に対して，ある $a \in \mathbb{R}$ が存在して，$b = a^2$」ではない

同値変形によって書き直す

ある $b \in \mathbb{R}$ が存在して，どんな $a \in \mathbb{R}$ に対しても，$b \neq a^2$

復習（「$\forall$ の否定」と「$\exists$ の否定」）

$$\begin{aligned} \neg(\forall\, x\ (\exists\, y\ (P(x,y)))) &\Leftrightarrow \exists\, x\ (\neg(\exists\, y\ (P(x,y)))) \\ &\Leftrightarrow \exists\, x\ (\forall\, y\ (\neg P(x,y))) \end{aligned}$$

例題 2：論理操作

使える性質 (仮定)	導く性質 (目標)
	$\exists\, b \in \mathbb{R}\ (\forall\, a \in \mathbb{R}\ (b \neq a^2))$

例題 2：論理操作

使える性質 (仮定)	導く性質 (目標)
$-1 \in \mathbb{R}$	$\exists\, b \in \mathbb{R}\ (\forall\, a \in \mathbb{R}\ (b \neq a^2))$

実数の性質

例題 2：論理操作

使える性質 (仮定)	導く性質 (目標)
$-1 \in \mathbb{R}$	$\cancel{\exists\, b \in \mathbb{R}\ (\forall\, a \in \mathbb{R}\ (b \neq a^2))}$
	$\forall\, a \in \mathbb{R}\ (-1 \neq a^2)$

$b = -1$ **とする**

構成による証明 (導く性質が「∃」で始まる構造)

例題 2：論理操作

使える性質 (仮定)	導く性質 (目標)
$-1 \in \mathbb{R}$	$\cancel{\exists\, b \in \mathbb{R}\, (\forall\, a \in \mathbb{R}\, (b \neq a^2))}$
$a \in \mathbb{R}$	$\cancel{\forall\, a \in \mathbb{R}\, (-1 \neq a^2)}$
	$-1 \neq a^2$

$b = -1$ とする

$a \in \mathbb{R}$ を任意に選ぶ

導く性質が「$\forall$」で始まる構造

例題 2：論理操作

使える性質 (仮定)	導く性質 (目標)
$-1 \in \mathbb{R}$	$\cancel{\exists\, b \in \mathbb{R}\, (\forall\, a \in \mathbb{R}\, (b \neq a^2))}$
$a \in \mathbb{R}$	$\cancel{\forall\, a \in \mathbb{R}\, (-1 \neq a^2)}$
$a^2 \geq 0$	$-1 \neq a^2$

$b = -1$ とする
$a \in \mathbb{R}$ を任意に選ぶ

実数の性質

例題 2：論理操作

使える性質 (仮定)	導く性質 (目標)
$-1 \in \mathbb{R}$	$\cancel{\exists\, b \in \mathbb{R}\,(\forall\, a \in \mathbb{R}\,(b \neq a^2))}$
$a \in \mathbb{R}$	$\cancel{\forall\, a \in \mathbb{R}\,(-1 \neq a^2)}$
$a^2 \geq 0$	$-1 \neq a^2$
$-1 \neq a^2$	

$b = -1$ **とする**

$a \in \mathbb{R}$ **を任意に選ぶ**

実数の性質

例題 2：文章構造

全射の定義から，「ある $b \in \mathbb{R}$ が存在して，どんな $a \in \mathbb{R}$ に対しても $b \neq a^2$」となることを証明すればよい．

$b = -1$ とすると，$b \in \mathbb{R}$．

$a \in \mathbb{R}$ を任意に選ぶ．

このとき，$a^2 \geq 0$．したがって，$-1 \neq a^2$．

したがって，「どんな $a \in \mathbb{R}$ に対しても $-1 \neq a^2$」．

したがって，「ある $b \in \mathbb{R}$ が存在して，どんな $a \in \mathbb{R}$ に対しても $b \neq a^2$」となる．

したがって，f は全射ではない． $\square$

注：これも「構成による証明」で，-1 を構成した．
しかし，どうやって見つけたのかは証明に書かない．

例題 2：証明の清書

- 全射の定義から,「ある $b \in \mathbb{R}$ が存在して，どんな $a \in \mathbb{R}$ に対しても $b \neq a^2$」となることを証明すればよい．
- $b = -1$ とすると，$b \in \mathbb{R}$．
- $a \in \mathbb{R}$ を任意に選ぶ．
- このとき，$a^2 \geq 0$．したがって，$-1 \neq a^2$．
- したがって,「どんな $a \in \mathbb{R}$ に対しても $-1 \neq a^2$」．
- したがって,「ある $b \in \mathbb{R}$ が存在して，どんな $a \in \mathbb{R}$ に対しても $b \neq a^2$」となる．
- したがって，f は全射ではない． $\square$

補足：反例

例題 2 (再掲)

次の関数 $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ が全射で**ない**ことを証明せよ．

$$\text{任意の } a \in \mathbb{R} \text{ に対して } f(a) = a^2$$

定義と同値変形によって書き直した (再掲)

ある $b \in \mathbb{R}$ が存在して，どんな $a \in \mathbb{R}$ に対しても，$b \neq a^2$

- 証明は「$b = -1$」として，進んだ
- $b = -1$ は例題 2 の関数が全射であることの**反例**である
- 「$b = -1$」でなくても「$b = -2$」でもよかった

補足：始域・終域の違いと全射性の違い

見た目が同じでも，始域・終域が違うと全射かどうか変わるかも

次の 4 つの関数は全射か？

- $f_1 \colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$,　　$f_1(a) = a^2$
- $f_2 \colon \mathbb{R} \to [0, \infty)$,　　$f_2(a) = a^2$
- $f_3 \colon [0, \infty) \to [0, \infty)$,　　$f_3(a) = a^2$
- $f_4 \colon [0, 1] \to [0, \infty)$,　　$f_4(a) = a^2$

格言 (再掲)

関数の始域と終域を常に意識　　(似たものに「行列のサイズ」がある)

補足：始域・終域の違いと全射性の違い

見た目が同じでも，始域・終域が違うと全射かどうか変わるかも

次の 4 つの関数は全射か？

- $f_1 \colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$， $f_1(a) = a^2$ **全射ではない**
- $f_2 \colon \mathbb{R} \to [0, \infty)$， $f_2(a) = a^2$
- $f_3 \colon [0, \infty) \to [0, \infty)$， $f_3(a) = a^2$
- $f_4 \colon [0, 1] \to [0, \infty)$， $f_4(a) = a^2$

格言 (再掲)

関数の始域と終域を常に意識 (似たものに「行列のサイズ」がある)

補足：始域・終域の違いと全射性の違い

見た目が同じでも，始域・終域が違うと全射かどうか変わるかも

次の 4 つの関数は全射か？

- $f_1 \colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$,　$f_1(a) = a^2$　**全射ではない**
- $f_2 \colon \mathbb{R} \to [0, \infty)$,　$f_2(a) = a^2$　**全射である**
- $f_3 \colon [0, \infty) \to [0, \infty)$,　$f_3(a) = a^2$
- $f_4 \colon [0, 1] \to [0, \infty)$,　$f_4(a) = a^2$

格言 (再掲)

関数の始域と終域を常に意識　(似たものに「行列のサイズ」がある)

補足：始域・終域の違いと全射性の違い

見た目が同じでも，始域・終域が違うと全射かどうか変わるかも

次の 4 つの関数は全射か？

- $f_1 \colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$， $f_1(a) = a^2$ 　**全射ではない**
- $f_2 \colon \mathbb{R} \to [0, \infty)$， $f_2(a) = a^2$ 　**全射である**
- $f_3 \colon [0, \infty) \to [0, \infty)$， $f_3(a) = a^2$ 　**全射である**
- $f_4 \colon [0, 1] \to [0, \infty)$， $f_4(a) = a^2$

格言 (再掲)

関数の始域と終域を常に意識 (似たものに「行列のサイズ」がある)

補足：始域・終域の違いと全射性の違い

見た目が同じでも，始域・終域が違うと全射かどうか変わるかも

次の 4 つの関数は全射か？

- $f_1 \colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$，　$f_1(a) = a^2$　**全射ではない**
- $f_2 \colon \mathbb{R} \to [0, \infty)$，　$f_2(a) = a^2$　**全射である**
- $f_3 \colon [0, \infty) \to [0, \infty)$，　$f_3(a) = a^2$　**全射である**
- $f_4 \colon [0, 1] \to [0, \infty)$，　$f_4(a) = a^2$　**全射ではない**

格言 (再掲)

関数の始域と終域を常に意識　(似たものに「行列のサイズ」がある)

目次

単射

集合 A, B **と関数** $f\colon A \to B$

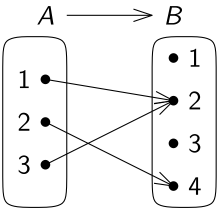
単射とは？

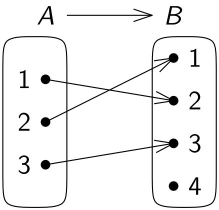
f **が単射であるとは，次を満たすこと**

すべての $a, a' \in A$ **に対して，** $f(a) = f(a')$ **ならば** $a = a'$

論理記号で書くと「$\forall\ a, a' \in A\ ((f(a) = f(a')) \to (a = a'))$**」**

もっと正確に書くと「$\forall\ a \in A\ (\forall\ a' \in A\ (((f(a) = f(a')) \to (a = a')))$**」**





単射

集合 A, B と関数 $f\colon A \to B$

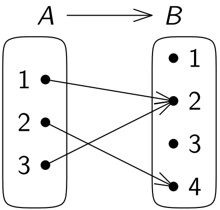
単射とは？

f が**単射**であるとは，次を満たすこと

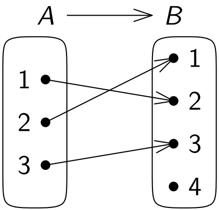
$$\text{すべての } a, a' \in A \text{ に対して，} \quad f(a) = f(a') \text{ ならば } a = a'$$

論理記号で書くと「$\forall\ a, a' \in A\ ((f(a) = f(a')) \to (a = a'))$」

もっと正確に書くと「$\forall\ a \in A\ (\forall\ a' \in A\ (((f(a) = f(a')) \to (a = a')))$」



単射ではない



単射

集合 A, B と関数 $f\colon A \to B$

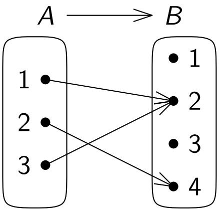
単射とは？

f が**単射**であるとは，次を満たすこと

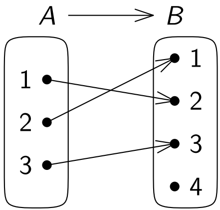
$$\text{すべての } a, a' \in A \text{ に対して，} \quad f(a) = f(a') \text{ ならば } a = a'$$

論理記号で書くと「$\forall\, a, a' \in A\ ((f(a) = f(a')) \to (a = a'))$」

もっと正確に書くと「$\forall\, a \in A\ (\forall\, a' \in A\ (((f(a) = f(a')) \to (a = a')))$」



単射ではない



単射である

例題 3

例題 3

次の関数 $f \colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ **が単射であることを証明せよ．**

$$\text{任意の } a \in \mathbb{R} \text{ に対して } f(a) = 3a + 1$$

定義に基づいて書き直す

すべての $a, a' \in \mathbb{R}$ **に対して，** $3a + 1 = 3a' + 1$ **ならば** $a = a'$

例題 3：論理操作

使える性質 (仮定)	導く性質 (目標)
	$\forall\, a, a' \in \mathbb{R}\ ((3a+1=3a'+1) \to (a=a'))$

例題 3：論理操作

使える性質 (仮定)	導く性質 (目標)
$a, a' \in \mathbb{R}$	~~$\forall\, a, a' \in \mathbb{R}\ ((3a+1 = 3a'+1) \rightarrow (a = a'))$~~
	$(3a+1 = 3a'+1) \rightarrow (a = a')$

$a, a' \in \mathbb{R}$ **は任意に選ぶ**

導く性質が「$\forall$」で始まる構造

例題 3：論理操作

使える性質 (仮定)	導く性質 (目標)
$a, a' \in \mathbb{R}$	~~$\forall\, a, a' \in \mathbb{R}\ ((3a+1 = 3a'+1) \to (a = a'))$~~
$3a+1 = 3a'+1$	~~$(3a+1 = 3a'+1) \to (a = a')$~~
	$a = a'$

導く性質が「○○ $\to$ △△」の構造

例題 3：論理操作

使える性質 (仮定)	導く性質 (目標)
$a, a' \in \mathbb{R}$	$\cancel{\forall\ a, a' \in \mathbb{R}\ ((3a+1 = 3a'+1) \to (a = a'))}$
$3a+1 = 3a'+1$	$\cancel{(3a+1 = 3a'+1) \to (a = a')}$
$a = a'$	$a = a'$

実数の性質

例題3：文章構造

単射の定義から,「すべての $a, a' \in \mathbb{R}$ に対して，$3a+1=3a'+1$ ならば $a=a'$」となることを証明すればよい．

任意の $a, a' \in \mathbb{R}$ を考える．

$3a+1=3a'+1$ であると仮定する．

このとき，$a=a'$．

したがって,「$3a+1=3a'+1$ ならば $a=a'$」となる．

したがって,「すべての $a, a' \in \mathbb{R}$ に対して，$3a+1=3a'+1$ ならば $a=a'$」となる．

したがって，f は単射である． □

清書は省略 (各自行う)

例題 4

例題 4

次の関数 $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ が単射でないことを証明せよ．

$$任意の\ a \in \mathbb{R}\ に対して\ f(a) = a^2$$

定義に基づいて書き直す

「すべての $a, a' \in \mathbb{R}$ に対して，$a^2 = a'^2$ ならば $a = a'$」ではない

例題 4：続き

定義に基づいて書き直す (再掲)

「すべての $a, a' \in \mathbb{R}$ に対して，$a^2 = a'^2$ ならば $a = a'$」ではない

同値変形によって書き直す

ある $a, a' \in \mathbb{R}$ に対して，$a^2 = a'^2$ かつ $a \neq a'$

復習（「$\exists$ の否定」,「含意の書換」,「ド・モルガンの法則」,「二重否定」）

$$
\begin{aligned}
\neg(\forall\, x\ (\forall\, y\ (P(x,y) \to Q(x,y)))) &\Leftrightarrow \exists\, x\ (\neg(\forall\, y\ (P(x,y) \to Q(x,y))))\\
&\Leftrightarrow \exists\, x\ (\exists\, y\ (\neg(P(x,y) \to Q(x,y))))\\
&\Leftrightarrow \exists\, x\ (\exists\, y\ (\neg(\neg P(x,y) \vee Q(x,y))))\\
&\Leftrightarrow \exists\, x\ (\exists\, y\ (\neg\neg P(x,y) \wedge \neg Q(x,y))))\\
&\Leftrightarrow \exists\, x\ (\exists\, y\ (P(x,y) \wedge \neg Q(x,y))))
\end{aligned}
$$

例題 4：論理操作

使える性質 (仮定)	導く性質 (目標)
	$\exists\, a, a' \in \mathbb{R}\ (a^2 = a'^2 \land a \neq a')$

例題 4：論理操作

使える性質 (仮定)	導く性質 (目標)
$1 \in \mathbb{R}$	$\exists\ a, a' \in \mathbb{R}\ (a^2 = a'^2 \land a \neq a')$
$-1 \in \mathbb{R}$	

実数の性質

例題 4：論理操作

使える性質 (仮定)	導く性質 (目標)
$1 \in \mathbb{R}$	$\cancel{\exists\, a, a' \in \mathbb{R}\ (a^2 = a'^2 \wedge a \neq a')}$
$-1 \in \mathbb{R}$	$a^2 = a'^2 \wedge a \neq a'$
$a = 1$	
$a' = -1$	

$a = 1$，$a' = -1$ とおく

導く性質が「∃」で始まる構造

例題 4：論理操作

使える性質 (仮定)	導く性質 (目標)
$1 \in \mathbb{R}$	~~$\exists\, a, a' \in \mathbb{R}\ (a^2 = a'^2 \land a \neq a')$~~
$-1 \in \mathbb{R}$	$a^2 = a'^2 \land a \neq a'$
$a = 1$	
$a' = -1$	

$a = 1$，$a' = -1$ とおく

導く性質が「∃」で始まる構造

証明する目標が「○○ ∧ △△」の場合

○○と△△を別々に証明する

例題 4：論理操作

使える性質 (仮定)	導く性質 (目標)
$1 \in \mathbb{R}$	$\cancel{\exists\, a, a' \in \mathbb{R}\, (a^2 = a'^2 \land a \neq a')}$
$-1 \in \mathbb{R}$	$\cancel{a^2 = a'^2 \land a \neq a'}$
$a = 1$	$a^2 = a'^2$
$a' = 1$	

使える性質 (仮定)	導く性質 (目標)
$1 \in \mathbb{R}$	$a \neq a'$
$-1 \in \mathbb{R}$	
$a = 1$	
$a' = -1$	

例題 4 (前半)：論理操作

使える性質 (仮定)	導く性質 (目標)
$1 \in \mathbb{R}$	$\cancel{\exists\, a, a' \in \mathbb{R}\, (a^2 = a'^2 \wedge a \neq a')}$
$-1 \in \mathbb{R}$	$\cancel{a^2 = a'^2 \wedge a \neq a'}$
$a = 1$	$a^2 = a'^2$
$a' = -1$	
$a^2 = 1$	

実数の性質

例題 4 (前半)：論理操作

使える性質 (仮定)	導く性質 (目標)
$1 \in \mathbb{R}$	$\cancel{\exists\, a, a' \in \mathbb{R}\, (a^2 = a'^2 \land a \neq a')}$
$-1 \in \mathbb{R}$	$\cancel{a^2 = a'^2 \land a \neq a'}$
$a = 1$	$a^2 = a'^2$
$a' = -1$	
$a^2 = 1$	
$a'^2 = 1$	

実数の性質

例題 4 (前半)：論理操作

使える性質 (仮定)	導く性質 (目標)
$1 \in \mathbb{R}$	$\cancel{\exists\, a, a' \in \mathbb{R}\ (a^2 = a'^2 \wedge a \neq a')}$
$-1 \in \mathbb{R}$	$\cancel{a^2 = a'^2 \wedge a \neq a'}$
$a = 1$	$a^2 = a'^2$
$a' = -1$	
$a^2 = 1$	
$a'^2 = 1$	
$a^2 = a'^2$	

等号の性質

例題 4 (後半)：論理操作

使える性質 (仮定)	導く性質 (目標)
$1 \in \mathbb{R}$	$a \neq a'$
$-1 \in \mathbb{R}$	
$a = 1$	
$a' = -1$	
$a \neq a'$	

等号の性質

例題 4：文章構造

単射の定義から,「ある $a, a' \in \mathbb{R}$ に対して，$a^2 = a'^2$ かつ $a \neq a'$」となることを証明すればよい．

$a = 1, a' = -1$ とすると，$a, a' \in \mathbb{R}$．

このとき，$a^2 = 1$ かつ $a'^2 = 1$ なので，$a^2 = a'^2$．
そして，$a \neq a'$．

したがって,「ある $a, a' \in \mathbb{R}$ に対して，$a^2 = a'^2$ かつ $a \neq a'$」となる．

したがって，f は単射ではない． □

補足：始域・終域の違いと単射性の違い

見た目が同じでも，始域・終域が違うと単射かどうか変わるかも

次の 4 つの関数は単射か？

- $f_1 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$，　$f_1(a) = a^2$
- $f_2 : \mathbb{R} \to [0, \infty)$，　$f_2(a) = a^2$
- $f_3 : [0, \infty) \to [0, \infty)$，　$f_3(a) = a^2$
- $f_4 : [0, 1] \to [0, \infty)$，　$f_4(a) = a^2$

格言 (再々掲)

関数の始域と終域を常に意識　(似たものに「行列のサイズ」がある)

補足：始域・終域の違いと単射性の違い

見た目が同じでも，始域・終域が違うと単射かどうか変わるかも

次の 4 つの関数は単射か？

- $f_1 \colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$， $f_1(a) = a^2$ **単射ではない**
- $f_2 \colon \mathbb{R} \to [0, \infty)$， $f_2(a) = a^2$
- $f_3 \colon [0, \infty) \to [0, \infty)$， $f_3(a) = a^2$
- $f_4 \colon [0, 1] \to [0, \infty)$， $f_4(a) = a^2$

格言 (再々掲)

関数の始域と終域を常に意識 (似たものに「行列のサイズ」がある)

補足：始域・終域の違いと単射性の違い

見た目が同じでも，始域・終域が違うと単射かどうか変わるかも

次の 4 つの関数は単射か？

- $f_1 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$，　$f_1(a) = a^2$　**単射ではない**
- $f_2 : \mathbb{R} \to [0, \infty)$，　$f_2(a) = a^2$　**単射ではない**
- $f_3 : [0, \infty) \to [0, \infty)$，　$f_3(a) = a^2$
- $f_4 : [0, 1] \to [0, \infty)$，　$f_4(a) = a^2$

格言 (再々掲)

関数の始域と終域を常に意識　(似たものに「行列のサイズ」がある)

補足：始域・終域の違いと単射性の違い

見た目が同じでも，始域・終域が違うと単射かどうか変わるかも

次の 4 つの関数は単射か？

- $f_1 \colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f_1(a) = a^2$ 単射ではない
- $f_2 \colon \mathbb{R} \to [0, \infty)$, $f_2(a) = a^2$ 単射ではない
- $f_3 \colon [0, \infty) \to [0, \infty)$, $f_3(a) = a^2$ 単射である
- $f_4 \colon [0, 1] \to [0, \infty)$, $f_4(a) = a^2$

格言 (再々掲)

関数の始域と終域を常に意識 (似たものに「行列のサイズ」がある)

補足：始域・終域の違いと単射性の違い

見た目が同じでも，始域・終域が違うと単射かどうか変わるかも

次の 4 つの関数は単射か？

- $f_1 \colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$， $f_1(a) = a^2$ **単射ではない**
- $f_2 \colon \mathbb{R} \to [0, \infty)$， $f_2(a) = a^2$ **単射ではない**
- $f_3 \colon [0, \infty) \to [0, \infty)$， $f_3(a) = a^2$ **単射である**
- $f_4 \colon [0, 1] \to [0, \infty)$， $f_4(a) = a^2$ **単射である**

格言 (再々掲)

関数の始域と終域を常に意識 (似たものに「行列のサイズ」がある)

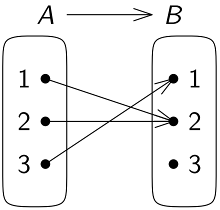
目次

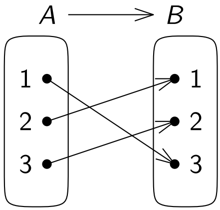
全単射

集合 A, B **と関数** $f\colon A \to B$

全単射とは？

f **が全単射であるとは，全射であり，かつ，単射であること**



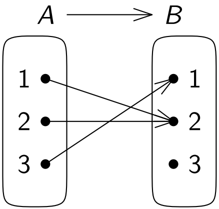


全単射

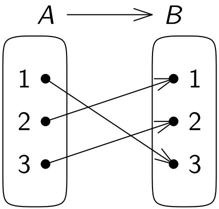
集合 A, B **と関数** $f\colon A \to B$

全単射とは？

f **が全単射であるとは，全射であり，かつ，単射であること**



全単射ではない

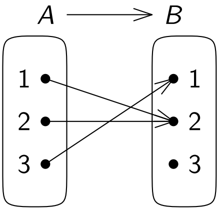


全単射

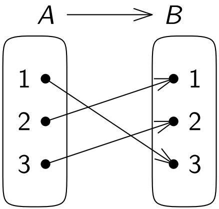
集合 A, B と関数 $f\colon A \to B$

全単射とは？

f が**全単射**であるとは，全射であり，かつ，単射であること



全単射ではない



全単射である

逆関数

集合 A, B **と****全単射** $f\colon A \to B$

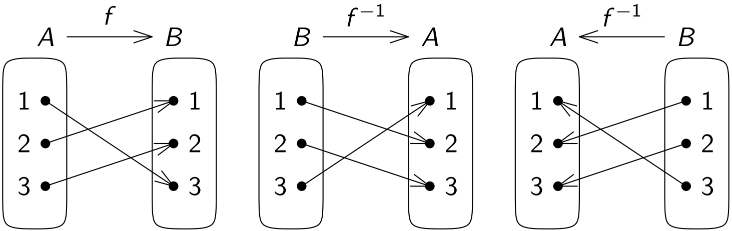
逆関数とは？

f **の逆関数とは** $f^{-1}\colon B \to A$ **で，**

任意の $a \in A,\ b \in B$ **に対して** $a = f^{-1}(b)$ **と** $b = f(a)$ **が同値**

となるもののことである

論理記号で書くと「$\forall\, a \in A\ (\forall\, b \in B\ (a = f^{-1}(b) \leftrightarrow b = f(a)))$**」**



例題 5

例題 5

次の関数 $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

$$\text{任意の } a \in \mathbb{R} \text{ に対して } f(a) = 3a + 1$$

は全単射であるが (例題 1，3)，その逆関数 $f^{-1}\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ が

$$\text{任意の } b \in \mathbb{R} \text{ に対して } f^{-1}(b) = \frac{b-1}{3}$$

で与えられることを証明せよ．

証明：同値変形により証明する．

□

例題 5

例題 5

次の関数 $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

$$\text{任意の } a \in \mathbb{R} \text{ に対して } f(a) = 3a + 1$$

は全単射であるが (例題 1，3)，その逆関数 $f^{-1}\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ が

$$\text{任意の } b \in \mathbb{R} \text{ に対して } f^{-1}(b) = \frac{b-1}{3}$$

で与えられることを証明せよ．

証明：同値変形により証明する．

$$b = f(a)$$

例題 5

例題 5

次の関数 $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

$$\text{任意の } a \in \mathbb{R} \text{ に対して } f(a) = 3a + 1$$

は全単射であるが (例題 1，3)，その逆関数 $f^{-1}\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ が

$$\text{任意の } b \in \mathbb{R} \text{ に対して } f^{-1}(b) = \frac{b-1}{3}$$

で与えられることを証明せよ．

証明：同値変形により証明する．

$$b = f(a) \Leftrightarrow b = 3a + 1$$

□

例題 5

例題 5

次の関数 $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

$$\text{任意の } a \in \mathbb{R} \text{ に対して } f(a) = 3a + 1$$

は全単射であるが (例題 1，3)，その逆関数 $f^{-1}\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ が

$$\text{任意の } b \in \mathbb{R} \text{ に対して } f^{-1}(b) = \frac{b-1}{3}$$

で与えられることを証明せよ．

証明：同値変形により証明する．

$$b = f(a) \Leftrightarrow b = 3a + 1 \Leftrightarrow a = \frac{b-1}{3}$$

□

例題 5

例題 5

次の関数 $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

$$\text{任意の } a \in \mathbb{R} \text{ に対して } f(a) = 3a + 1$$

は全単射であるが (例題 1，3)，その逆関数 $f^{-1}\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ が

$$\text{任意の } b \in \mathbb{R} \text{ に対して } f^{-1}(b) = \frac{b-1}{3}$$

で与えられることを証明せよ．

証明：同値変形により証明する．

$$b = f(a) \Leftrightarrow b = 3a + 1 \Leftrightarrow a = \frac{b-1}{3} \Leftrightarrow a = f^{-1}(b).$$

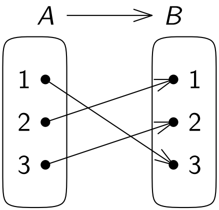
□

逆関数と逆像：注意

注意

関数 $f\colon A \to B$

- $Y \subseteq B$ のとき，$f^{-1}(Y)$ は Y の逆像
  - f が全単射であろうがなかろうが定義される
- $b \in B$ のとき，$f^{-1}(b)$ は f の逆関数 f^{-1} の b における値
  - f が全単射であるときのみ定義される



- $f^{-1}(\{1,2\}) = \{2,3\}$
- $f^{-1}(\{2\}) = \{3\}$
- $f^{-1}(2) = 3$

もう一つ注意

全単射の逆関数も全単射 (演習問題)

目次

今日のまとめ

関数とそれにまつわる概念

- 全射，単射，全単射
- 全単射の逆関数

証明の作り方

- 「ではない」ことの証明で使う 反例 (構成による証明)

目次