

離散数学 第 6 回
関数 (1) : 関数, 像と逆像

岡本 吉央
okamotoy@uec.ac.jp

電気通信大学

2013 年 5 月 28 日

最終更新 : 2013 年 6 月 5 日 10:43

概要

今日の目標

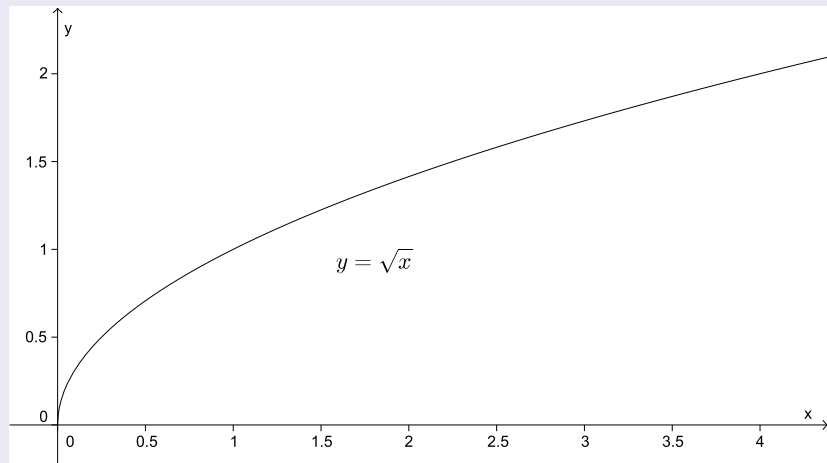
- ▶ 関数 (写像) の定義と記法を理解し，使えるようになる
- ▶ 関数の像と逆像，関数の合成を理解する

目次

- ① 関数
- ② 像と逆像
- ③ 関数の合成
- ④ 証明の例題
- ⑤ 今日のまとめ

関数と言って思い浮かべるものは？ (1)

数学 (?) の「関数」

関数 $y = \sqrt{x}$ 

関数と言って思い浮かべるものは？ (2)

プログラミングの「関数」

```
int sum(int a, int b) {  
    return a + b;  
}  
  
int absolute_value(int a) {  
    if (a < 0) {  
        return -a;  
    } else {  
        return a;  
    }  
}
```

関数とは

関数とは？

- ▶ 集合が2つある (A と B とする)
- ▶ A の1つ1つの要素を B のある要素に「移す」

数学的に関数を定義すると？

- ▶ 任意の $a \in A$ に対して、ある $b \in B$ が一意に (ただ一つ) 存在して、 a を b に移す

記法は？

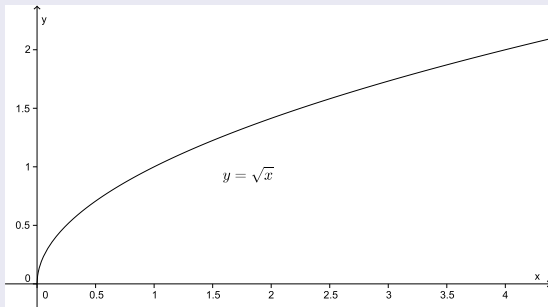
- ▶ 関数 $f: A \rightarrow B$
- ▶ 任意の $a \in A$ に対して、ある $b \in B$ が一意に存在して、 $f(a) = b$

注： f によって a を移したものを $f(a)$ と書く

「関数」を「写像」とも呼ぶ

関数と言って思い浮かべるものは？ (1) 再掲

数学 (?) の「関数」

関数 $y = \sqrt{x}$ 

- ▶ $f: [0, +\infty) \rightarrow [0, +\infty)$
- ▶ すべての $x \in [0, +\infty)$ に対して $f(x) = \sqrt{x}$

関数と言って思い浮かべるものは？ (2) 再掲

プログラミングの「関数」

```
int sum(int a, int b) {  
    return a + b;  
}
```

- ▶ $\text{sum}: \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}$
- ▶ すべての $(a, b) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ に対して $\text{sum}((a, b)) = a + b$

関数と言って思い浮かべるものは？ (2) 再掲 (続)

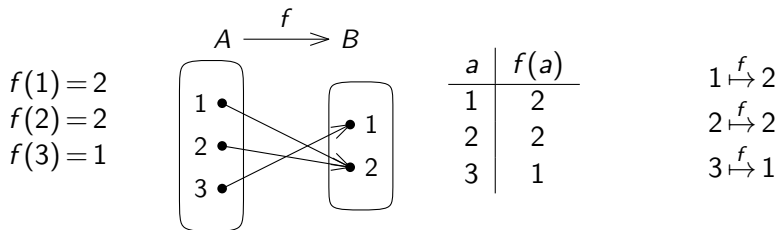
プログラミングの「関数」

```
int absolute_value(int a) {  
    if (a < 0) {  
        return -a;  
    } else {  
        return a;  
    }  
}
```

- ▶ $\text{absolute_value}: \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}$
- ▶ すべての $a \in \mathbb{Z}$ に対して
 $a < 0$ のとき $\text{absolute_value}(a) = -a$
そうでないとき $\text{absolute_value}(a) = a$

関数の例

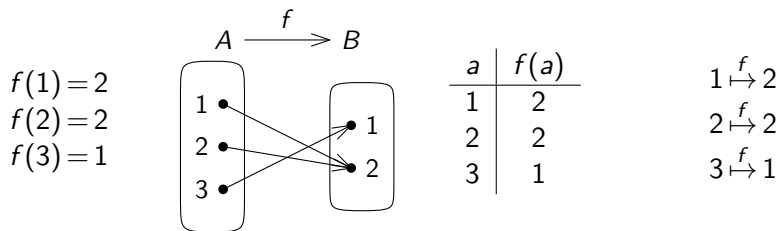
- ▶ $A = \{1, 2, 3\}$, $B = \{1, 2\}$
- ▶ 関数 $f: A \rightarrow B$ を次のように定義
 - ▶ $f(1) = 2$, $f(2) = 2$, $f(3) = 1$



関数にまつわる記法と用語

集合 A, B と関数 $f: A \rightarrow B$

- ▶ $A \xrightarrow{f} B$
- ▶ $b = f(a)$ のとき「 $f: a \mapsto b$ 」や「 $a \xrightarrow{f} b$ 」
- ▶ $f(a)$ を a における f の値という
- ▶ A を f の始域 (または定義域) という
- ▶ B を f の終域 という

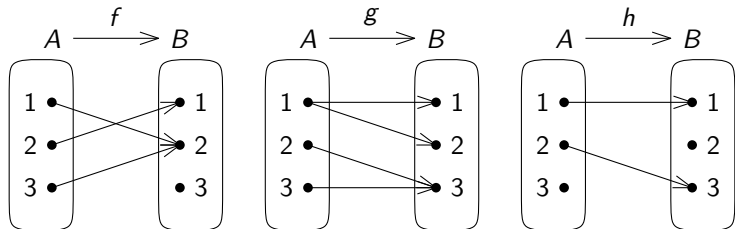


格言

関数の始域と終域を常に意識

(似たものに「行列のサイズ」がある)

問題：次の図の中で関数を表すものは？



2つの関数が等しいということ

集合 A, B, C, D と関数 $f: A \rightarrow B, g: C \rightarrow D$

f と g が等しいとは？

関数 f と g が等しいことを「 $f = g$ 」と書き、次の条件がすべて成り立つことと定義する

- ▶ $A = C$ (f と g の始域が等しい)
- ▶ $B = D$ (f と g の終域が等しい)
- ▶ すべての $a \in A$ に対して、 $f(a) = g(a)$ (関数の値が等しい)

恒等関数

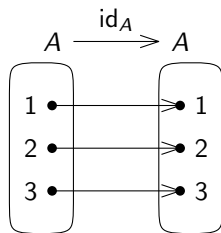
集合 A と関数 $f: A \rightarrow A$

恒等関数とは？

f が恒等関数であるとは、
任意の $a \in A$ に対して $a = f(a)$ であること

- ▶ $A \rightarrow A$ の恒等関数を id_A と書くこともある
- ▶ 例 : $A = \{1, 2, 3\}$ のとき $f: A \rightarrow A$ で

$$f(1) = 1, \quad f(2) = 2, \quad f(3) = 3$$



目次

- ① 関数
- ② 像と逆像
- ③ 関数の合成
- ④ 証明の例題
- ⑤ 今日のまとめ

関数の像

$f: A \rightarrow B$ を関数とする

像とは？

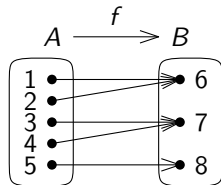
f による部分集合 $X \subseteq A$ の像を $f(X)$ と書き

$$f(X) = \{b \mid b \in B \text{ かつ, ある } a \in X \text{ が存在して } b = f(a)\}$$

注意

- ▶ X は A の部分集合 (A の要素ではない)
- ▶ $f(X)$ は B の部分集合

例



- ▶ $f(\{1, 2\}) = \{6\}$
- ▶ $f(\{1, 2, 3\}) = \{6, 7\}$
- ▶ $f(\{1, 2, 3, 4\}) = \{6, 7\}$
- ▶ $f(\{1, 2, 3, 4, 5\}) = \{6, 7, 8\}$
- ▶ $f(\{2\}) = \{6\}$

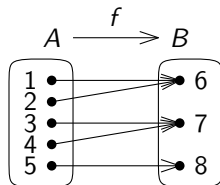
関数の像：例をより詳細に

 $f: A \rightarrow B$ を関数とする

像とは？

 f による部分集合 $X \subseteq A$ の像を $f(X)$ と書き

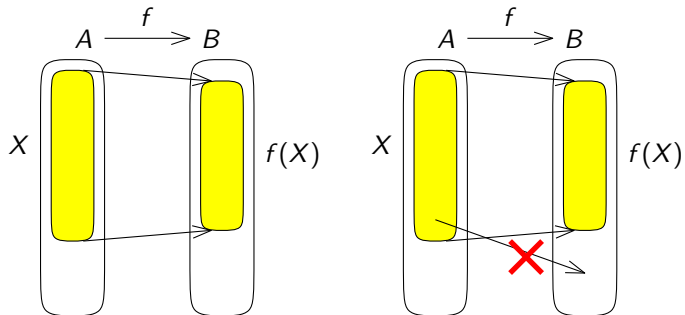
$$f(X) = \{b \mid b \in B \text{ かつ, ある } a \in X \text{ が存在して } b = f(a)\}$$

例： $f(\{1, 2, 3\})$ は？

- ▶ $6 \in f(\{1, 2, 3\})$ か？
 - ▶ $6 = f(1)$ なので YES
- ▶ $7 \in f(\{1, 2, 3\})$ か？
 - ▶ $7 = f(3)$ なので YES
- ▶ $8 \in f(\{1, 2, 3\})$ か？
 - ▶ $8 \neq f(1), 8 \neq f(2), 8 \neq f(3)$ なので NO

したがって、 $f(\{1, 2, 3\}) = \{6, 7\}$

関数の像：図による直感



関数の逆像

$f: A \rightarrow B$ を関数とする

逆像とは？

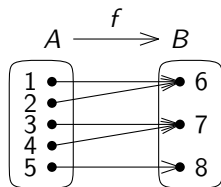
f による部分集合 $Y \subseteq B$ の逆像 (または原像) を $f^{-1}(Y)$ と書き

$$f^{-1}(Y) = \{a \mid a \in A \text{ かつ, ある } b \in Y \text{ が存在して } b = f(a)\}$$

注意

- ▶ Y は B の部分集合 (B の要素ではない)
- ▶ $f^{-1}(Y)$ は A の部分集合

例



- ▶ $f^{-1}(\{6\}) = \{1, 2\}$
- ▶ $f^{-1}(\{6, 7\}) = \{1, 2, 3, 4\}$
- ▶ $f^{-1}(\{6, 7, 8\}) = \{1, 2, 3, 4, 5\}$
- ▶ $f^{-1}(\{7, 8\}) = \{3, 4, 5\}$
- ▶ $f^{-1}(\{6, 8\}) = \{1, 2, 5\}$

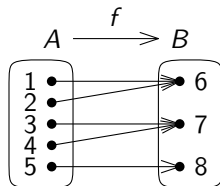
関数の逆像：例をより詳細に

逆像とは？

f による部分集合 $Y \subseteq B$ の逆像 (または原像) を $f^{-1}(Y)$ と書き

$$f^{-1}(Y) = \{a \mid a \in A \text{ かつ, ある } b \in Y \text{ が存在して } b = f(a)\}$$

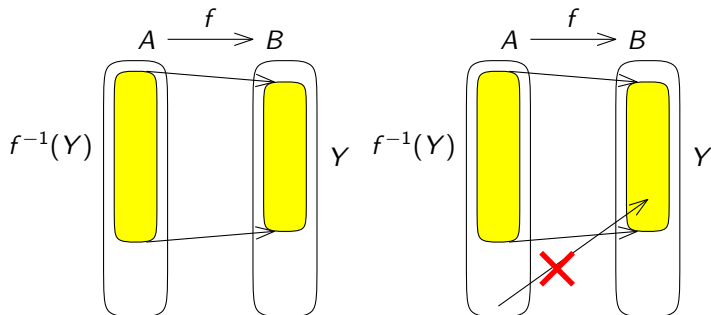
例： $f^{-1}(\{6, 7\})$ は？



- ▶ $1 \in f^{-1}(\{6, 7\})$ か？
 - ▶ $6 = f(1)$ なので YES
- ▶ $2 \in f^{-1}(\{6, 7\})$ か？
 - ▶ $6 = f(2)$ なので YES
- ▶ $3 \in f^{-1}(\{6, 7\})$ か？
 - ▶ $7 = f(3)$ なので YES
- ▶ $4 \in f^{-1}(\{6, 7\})$ か？
 - ▶ $7 = f(4)$ なので YES
- ▶ $5 \in f^{-1}(\{6, 7\})$ か？
 - ▶ $6 \neq f(5), 7 \neq f(5)$ なので NO

したがって、 $f^{-1}(\{6, 7\}) = \{1, 2, 3, 4\}$

関数の逆像：図による直感



目次

- ① 関数
- ② 像と逆像
- ③ 関数の合成**
- ④ 証明の例題
- ⑤ 今日のまとめ

関数の合成

集合 A, B, C と関数 $f: A \rightarrow B, g: B \rightarrow C$

関数の合成とは？

関数 f と g の合成を $g \circ f: A \rightarrow C$ と表記し, 任意の $x \in A$ に対して

$$(g \circ f)(x) = g(f(x))$$

とすることで定義する

注意： f の終域と g の始域が同じでないといけない
(同じでないときは合成を定義できない)

関数の合成：例

- ▶ $A = \{1, 2, 3\}$, $B = \{4, 5, 6, 7\}$, $C = \{8, 9\}$
- ▶ 関数 $f: A \rightarrow B$ を次で定義
 - ▶ $f(1) = 5$, $f(2) = 4$, $f(3) = 7$
- ▶ 関数 $g: B \rightarrow C$ を次で定義
 - ▶ $g(4) = 8$, $g(5) = 9$, $g(6) = 9$, $g(7) = 8$

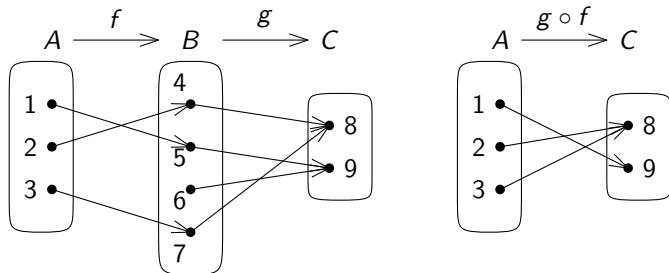
このとき, $g \circ f: A \rightarrow C$ を考えると,

$$(g \circ f)(3) = g(f(3)) = g(7) = 8$$

関数の合成：例 (続)

- ▶ $A = \{1, 2, 3\}$, $B = \{4, 5, 6, 7\}$, $C = \{8, 9\}$
- ▶ 関数 $f: A \rightarrow B$ を次で定義
 - ▶ $f(1) = 5$, $f(2) = 4$, $f(3) = 7$
- ▶ 関数 $g: B \rightarrow C$ を次で定義
 - ▶ $g(4) = 8$, $g(5) = 9$, $g(6) = 9$, $g(7) = 8$

このとき, $g \circ f: A \rightarrow C$ を考えると,



目次

- ① 関数
- ② 像と逆像
- ③ 関数の合成
- ④ 証明の例題
- ⑤ 今日のまとめ

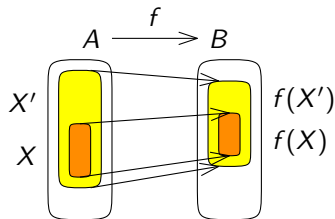
例題

次を証明したい

任意の集合 A, B , 任意の関数 $f: A \rightarrow B$, 任意の $X, X' \subseteq A$ に対して

$$X \subseteq X' \text{ ならば } f(X) \subseteq f(X')$$

図による直感



部分集合の定義に基づいて書き直す

$$\forall x (x \in X \rightarrow x \in X') \rightarrow \forall y (y \in f(X) \rightarrow y \in f(X'))$$

例題：論理操作

使える性質 (仮定)

$$\forall x (x \in X \rightarrow x \in X')$$

導く性質 (目標)

$$\forall y (y \in f(X) \rightarrow y \in f(X'))$$

例題：論理操作

使える性質 (仮定)

$$\forall x (x \in X \rightarrow x \in X')$$

導く性質 (目標)

~~$$\forall y (y \in f(X) \rightarrow y \in f(X'))$$~~

$$y \in f(X) \rightarrow y \in f(X')$$

y は任意に固定

「目標」の構造を見る

例題：論理操作

使える性質 (仮定)

$$\forall x (x \in X \rightarrow x \in X')$$

$$y \in f(X)$$

導く性質 (目標)

~~$$\forall y (y \in f(X) \rightarrow y \in f(X'))$$~~

~~$$y \in f(X) \rightarrow y \in f(X')$$~~

$$y \in f(X')$$

「目標」の構造を見る

例題：文章構造

部分集合の定義から「任意の x に対して『 $x \in X$ ならば $x \in X'$ 』」ならば、「任意の y に対して『 $y \in f(X)$ ならば $y \in f(X')$ 』」となることを証明すればよい。

任意の要素 y を選び、 $y \in f(X)$ と仮定する。

〈ここで $y \in f(X')$ を結論として導く。〉

したがって、 $y \in f(X)$ ならば $y \in f(X')$ となる。

したがって、 $X \subseteq X'$ ならば $f(X) \subseteq f(X')$ となる。 □

例題：論理操作

使える性質 (仮定)

$$\forall x (x \in X \rightarrow x \in X')$$

$$y \in f(X)$$

$$\exists z \in X (y = f(z))$$

導く性質 (目標)

~~$$\forall y (y \in f(X) \rightarrow y \in f(X'))$$~~

~~$$y \in f(X) \rightarrow y \in f(X')$$~~

$$y \in f(X')$$

像の定義に基づいて書き直す

例題：論理操作

使える性質 (仮定)

$$\forall x (x \in X \rightarrow x \in X')$$

$$y \in f(X)$$

$$\exists z \in X (y = f(z))$$

導く性質 (目標)

~~$$\forall y (y \in f(X) \rightarrow y \in f(X'))$$~~

~~$$y \in f(X) \rightarrow y \in f(X')$$~~

~~$$y \in f(X')$$~~

$$\exists z' \in X' (y = f(z'))$$

像の定義に基づいて書き直す

例題：文章構造

部分集合の定義から「任意の x に対して『 $x \in X$ ならば $x \in X'$ 』」ならば、「任意の y に対して『 $y \in f(X)$ ならば $y \in f(X')$ 』」となることを証明すればよい。

任意の要素 y を選び、 $y \in f(X)$ と仮定する。

像の定義から、ある $z \in X$ が存在して $y = f(z)$ となる。

像の定義から、ある $z' \in X'$ が存在して $y = f(z')$ となることを証明すればよい。

〈ここで「ある $z' \in X'$ が存在して $y = f(z')$ 」を導く。〉

したがって、 $y \in f(X')$ となる。

したがって、 $y \in f(X)$ ならば $y \in f(X')$ となる。

したがって、 $X \subseteq X'$ ならば $f(X) \subseteq f(X')$ となる。



例題：論理操作 — 目標の確認

使える性質 (仮定)

$$\forall x (x \in X \rightarrow x \in X')$$

$$y \in f(X)$$

$$\exists z \in X (y = f(z))$$

導く性質 (目標)

~~$$\forall y (y \in f(X) \rightarrow y \in f(X'))$$~~

~~$$y \in f(X) \rightarrow y \in f(X')$$~~

~~$$y \in f(X')$$~~

$$\exists z' \in X' (y = f(z'))$$

- ▶ $y = f(z')$ となる $z' \in X$ が存在することを証明したい
- ▶ 方針：そのような z' を自分で見つける
- ▶ (構成による証明と呼ばれる)

例題：論理操作

使える性質 (仮定)

$$\forall x (x \in X \rightarrow x \in X')$$

$$y \in f(X)$$

$$\exists z \in X (y = f(z))$$

導く性質 (目標)

~~$$\forall y (y \in f(X) \rightarrow y \in f(X'))$$~~

~~$$y \in f(X) \rightarrow y \in f(X')$$~~

~~$$y \in f(X')$$~~

$$\exists z' \in X' (y = f(z'))$$

仮定に \exists があるときに使える推論

推論：存在例化

 $P(a)$ が成り立つような任意の $a \in D$ に対して

$$\exists x \in D (P(x)) \Rightarrow P(a)$$

例題：論理操作

使える性質 (仮定)

$$\forall x (x \in X \rightarrow x \in X')$$

$$y \in f(X)$$

$$\exists z \in X (y = f(z))$$

$$y = f(a)$$

$$a \in X$$

導く性質 (目標)

~~$$\forall y (y \in f(X) \rightarrow y \in f(X'))$$~~

~~$$y \in f(X) \rightarrow y \in f(X')$$~~

~~$$y \in f(X')$$~~

$$\exists z' \in X' (y = f(z'))$$

$y = f(a)$ を満たす $a \in X$ が存在するので，それを考える

例題：文章構造

...

任意の要素 y を選び, $y \in f(X)$ と仮定する.

像の定義から, ある $z \in X$ が存在して $y = f(z)$ となる.

像の定義から, ある $z' \in X'$ が存在して $y = f(z')$ となることを証明すればよい.

$y = f(a)$ となる $a \in X$ を考える.

〈ここで「ある $z' \in X'$ が存在して $y = f(z')$ 」を導く.〉

したがって, $y \in f(X')$ となる.

したがって, $y \in f(X)$ ならば $y \in f(X')$ となる.

したがって, $X \subseteq X'$ ならば $f(X) \subseteq f(X')$ となる. □

例題：論理操作

使える性質 (仮定)

$$\forall x (x \in X \rightarrow x \in X')$$

$$y \in f(X)$$

$$\exists z \in X (y = f(z))$$

$$y = f(a)$$

$$a \in X$$

$$a \in X \rightarrow a \in X'$$

導く性質 (目標)

~~$$\forall y (y \in f(X) \rightarrow y \in f(X'))$$~~

~~$$y \in f(X) \rightarrow y \in f(X')$$~~

~~$$y \in f(X')$$~~

$$\exists z' \in X' (y = f(z'))$$

全称例化：任意の $a \in D$ に対して「 $\forall x \in D (P(x)) \Rightarrow P(a)$ 」

例題：文章構造

使える性質 (仮定)

$$\forall x (x \in X \rightarrow x \in X')$$

$$y \in f(X)$$

$$\exists z \in X (y = f(z))$$

$$y = f(a)$$

$$a \in X$$

$$a \in X \rightarrow a \in X'$$

$$a \in X'$$

導く性質 (目標)

~~$$\forall y (y \in f(X) \rightarrow y \in f(X'))$$~~

~~$$y \in f(X) \rightarrow y \in f(X')$$~~

~~$$y \in f(X')$$~~

$$\exists z' \in X' (y = f(z'))$$

モードゥス・ポネンス： $P \wedge (P \rightarrow Q) \Rightarrow Q$

例題：文章構造

...

任意の要素 y を選び, $y \in f(X)$ と仮定する.

...

$y = f(a)$ となる $a \in X$ を考える.

$a \in X$ と「任意の x に対して『 $x \in X$ ならば $x \in X'$ 』」から,
 $a \in X'$ となる.

ここで「ある $z' \in X'$ が存在して $y = f(z')$ 」を結論として導く.

したがって, $y \in f(X')$ となる.

したがって, $y \in f(X)$ ならば $y \in f(X')$ となる.

したがって, $X \subseteq X'$ ならば $f(X) \subseteq f(X')$ となる. □

例題：論理操作

使える性質 (仮定)

$$\forall x (x \in X \rightarrow x \in X')$$

$$y \in f(X)$$

$$\exists z \in X (y = f(z))$$

$$y = f(a)$$

$$a \in X$$

$$a \in X \rightarrow a \in X'$$

$$a \in X'$$

導く性質 (目標)

~~$$\forall y (y \in f(X) \rightarrow y \in f(X'))$$~~

~~$$y \in f(X) \rightarrow y \in f(X')$$~~

~~$$y \in f(X')$$~~

~~$$\exists z' \in X' (y = f(z'))$$~~

$$y = f(a)$$

 z' として a を選んだ

構成

例題：論理操作

使える性質 (仮定)

$$\forall x (x \in X \rightarrow x \in X')$$

$$y \in f(X)$$

$$\exists z \in X (y = f(z))$$

$$y = f(a)$$

$$a \in X$$

$$a \in X \rightarrow a \in X'$$

$$a \in X'$$

導く性質 (目標)

~~$$\forall y (y \in f(X) \rightarrow y \in f(X'))$$~~

~~$$y \in f(X) \rightarrow y \in f(X')$$~~

~~$$y \in f(X')$$~~

~~$$\exists z' \in X' (y = f(z'))$$~~

$$y = f(a)$$

例題：文章構造

...

任意の要素 y を選び, $y \in f(X)$ と仮定する.

...

$y = f(a)$ となる $a \in X$ を考える.

$a \in X$ と「任意の x に対して『 $x \in X$ ならば $x \in X'$ 』」から,
 $a \in X'$ となる.

$a \in X'$ なので, $z' = a$ とすると, $y = f(z')$ となる.

したがって、「ある $z' \in X'$ が存在して $y = f(z')$ 」となる.

したがって, $y \in f(X')$ となる.

したがって, $y \in f(X)$ ならば $y \in f(X')$ となる.

したがって, $X \subseteq X'$ ならば $f(X) \subseteq f(X')$ となる. □

例題：証明の清書

- ▶ 部分集合の定義から「任意の x に対して『 $x \in X$ ならば $x \in X'$ 』」ならば、「任意の y に対して『 $y \in f(X)$ ならば $y \in f(X')$ 』」となることを証明すればよい。
- ▶ 任意の要素 y を選び、 $y \in f(X)$ と仮定する。
- ▶ 像の定義から、ある $z \in X$ が存在して $y = f(z)$ となる。
- ▶ 像の定義から、ある $z' \in X'$ が存在して $y = f(z')$ となることを証明すればよい。
- ▶ $y = f(a)$ となる $a \in X$ を考える。
- ▶ $a \in X$ と「任意の x に対して『 $x \in X$ ならば $x \in X'$ 』」から、 $a \in X'$ となる。
- ▶ $a \in X'$ なので、 $z' = a$ とすると、 $y = f(z')$ となる。
- ▶ したがって、「ある $z' \in X'$ が存在して $y = f(z')$ 」となる。
- ▶ したがって、 $y \in f(X')$ となる。
- ▶ したがって、 $y \in f(X)$ ならば $y \in f(X')$ となる。
- ▶ したがって、 $X \subseteq X'$ ならば $f(X) \subseteq f(X')$ となる。 □

目次

- ① 関数
- ② 像と逆像
- ③ 関数の合成
- ④ 証明の例題
- ⑤ **今日のまとめ**

今日のまとめ

関数とそれにまつわる概念

- ▶ 関数 (写像) の定義と記法
- ▶ 関数の像と逆像, 関数の合成

証明法

- ▶ 構成による証明

余談：「関数」という用語

『数学の言葉づかい100』(日本評論社, 1999年) 58ページより

関数の用語 *functio* は17世紀末ライプニッツにより初めて用いられた。

(中略)

関数がよく f で表されるのはこれにちなむもので、各国語でもこのラテン語の直訳として *function*, *Funktion*, *fonction*, (中略) などが用いられている。わが国へは中国で音訳された函数が輸入され、現在では代用漢字による関数があてられて、初等教育の段階でほぼ定着した。

目次

- ① 関数
- ② 像と逆像
- ③ 関数の合成
- ④ 証明の例題
- ⑤ 今日のまとめ