

離散数学 第 5 回
集合と論理 (5) : 集合の演算など

岡本 吉央
okamotoy@uec.ac.jp

電気通信大学

2013 年 5 月 21 日

最終更新 : 2013 年 5 月 20 日 16:26

概要

今日の目標

- ▶ 部分集合について理解を深める
- ▶ 集合の直積と冪集合 (べき集合) を理解する

目次

- ① 論理を用いた証明 (続 1)
- ② 論理を用いた証明 (続 2) : 空集合を扱う
- ③ 集合の直積
- ④ 冪集合
- ⑤ 証明の例題
- ⑥ 今日のまとめ

例題 1

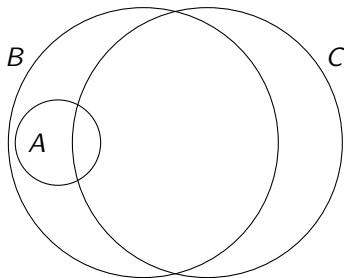
例題 1 : 次を証明せよ

任意の集合 A, B, C に対して

$$A \subseteq B \text{ ならば } C - B \subseteq C - A$$

が成立する .

オイラー図による直観



例題 1

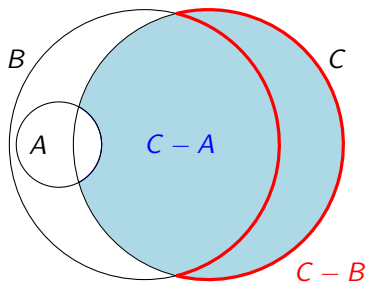
例題 1 : 次を証明せよ

任意の集合 A, B, C に対して

$$A \subseteq B \text{ ならば } C - B \subseteq C - A$$

が成立する .

オイラー図による直観

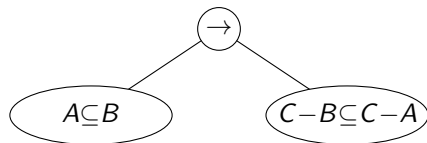


例題 1 : 構造を把握する

証明したいこと

$$A \subseteq B \text{ ならば } C - B \subseteq C - A$$

論理構造

証明する目標が「 \rightarrow 」の場合 (復習)

- ▶ 文章構造 : 「 $A \subseteq B$ を仮定する」として, $C - B \subseteq C - A$ を証明する
- ▶ 論理操作 : $A \subseteq B$ であることを仮定して, $C - B \subseteq C - A$ を証明する

例題 1 : 文章構造

$A \subseteq B$ であると仮定する .

〈ここで「 $C - B \subseteq C - A$ 」を結論として導く .〉

したがって , $A \subseteq B$ ならば $C - B \subseteq C - A$ となる . □

例題 1 : 論理操作

使える性質 (仮定)

$$A \subseteq B$$

導く性質 (目標)

$$C - B \subseteq C - A$$

部分集合の定義に基づいて目標を書き直してみる

例題 1 : 論理操作

使える性質 (仮定)

$$A \subseteq B$$

導く性質 (目標)

~~$$C - B \subseteq C - A$$~~

$$\forall x (x \in C - B \rightarrow x \in C - A)$$

部分集合の定義に基づいて目標を書き直してみる

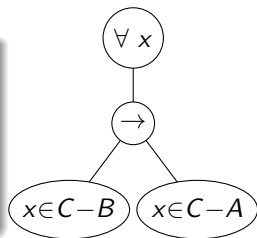
例題 1 : 論理操作

使える性質 (仮定)	導く性質 (目標)
$A \subseteq B$	$C - B \subseteq C - A$ $\forall x (x \in C - B \rightarrow x \in C - A)$

部分集合の定義に基づいて目標を書き直してみる

証明する目標が「 $\forall x \in D (\quad)$ 」の場合 (復習)

- ▶ 文章構造 : 「 $x \in D$ を任意に選ぶ」として, を証明する
- ▶ 論理操作 : 「 $x \in D$ 」であることを仮定して, を証明する



例題 1 : 論理操作

使える性質 (仮定)

$$A \subseteq B$$

導く性質 (目標)

~~$$C - B \subseteq C - A$$~~

~~$$\forall x (x \in C - B \rightarrow x \in C - A)$$~~

$$x \in C - B \rightarrow x \in C - A$$

x は任意

例題 1 : 論理操作

使える性質 (仮定)

$$A \subseteq B$$

導く性質 (目標)

~~$$C - B \subseteq C - A$$~~

~~$$\forall x (x \in C - B \rightarrow x \in C - A)$$~~

$$x \in C - B \rightarrow x \in C - A$$

x は任意

証明する目標が「 \rightarrow 」の場合 (復習)

- ▶ 文章構造 : 「 P を仮定する」として, Q を証明する
- ▶ 論理操作 : $P \rightarrow Q$ であることを仮定して, Q を証明する

例題 1 : 論理操作

使える性質 (仮定)

$$A \subseteq B$$

$$x \in C - B$$

導く性質 (目標)

~~$$C - B \subseteq C - A$$~~

~~$$\forall x (x \in C - B \rightarrow x \in C - A)$$~~

~~$$x \in C - B \rightarrow x \in C - A$$~~

$$x \in C - A$$

x は任意

証明する目標が「 $A \subseteq B \rightarrow C - B \subseteq C - A$ 」の場合 (復習)

- ▶ 文章構造 : 「 $A \subseteq B$ を仮定する」として, $C - B \subseteq C - A$ を証明する
- ▶ 論理操作 : $A \subseteq B$ であることを仮定して, $C - B \subseteq C - A$ を証明する

例題 1 : 文章構造

$A \subseteq B$ であると仮定する .

部分集合の定義より , 任意の x に対して , $x \in C - B$ ならば $x \in C - A$ であることを証明すればよい .

x を任意に選び , $x \in C - B$ と仮定する .

〈ここで「 $x \in C - A$ 」を結論として導く .〉

したがって , $x \in C - B$ ならば $x \in C - A$ となる .

したがって , $C - B \subseteq C - A$ となる .

したがって , $A \subseteq B$ ならば $C - B \subseteq C - A$ となる . □

例題 1 : 論理操作 (整理)

使える性質 (仮定)

$$A \subseteq B$$

$$x \in C - B$$

導く性質 (目標)

$$x \in C - A$$

 x は任意

例題 1 : 論理操作 (続 1)

使える性質 (仮定)

$$A \subseteq B$$

$$x \in C - B$$

$$x \in C$$

$$x \notin B$$

導く性質 (目標)

$$x \in C - A$$

 x は任意

差集合の定義に基づいて, 書き直す

例題 1 : 論理操作 (続 2)

使える性質 (仮定)

$$A \subseteq B$$

$$x \in C - B$$

$$x \in C$$

$$x \notin B$$

$$\forall y (y \in A \rightarrow y \in B)$$

導く性質 (目標)

$$x \in C - A$$

 x は任意

部分集合の定義に基づいて, 書き直す

(変数として, x とは違う y を使うと, 紛らわしくない)

例題 1 : 論理操作 (続 3)

使える性質 (仮定)	導く性質 (目標)
$A \subseteq B$	$x \in C - A$
$x \in C - B$	
$x \in C$	
$x \notin B$	
$\forall y (y \in A \rightarrow y \in B)$	
$x \in A \rightarrow x \in B$	

 x は任意

推論 (全称例化)

任意の $a \in D$ に対して

$$\forall x \in D (P(x)) \Rightarrow P(a)$$

例題 1 : 論理操作 (続 4)

使える性質 (仮定)

$$A \subseteq B$$

$$x \in C - B$$

$$x \in C$$

$$x \notin B$$

$$\forall y (y \in A \rightarrow y \in B)$$

$$x \in A \rightarrow x \in B$$

$$x \notin A$$

導く性質 (目標)

$$x \in C - A$$

 x は任意

推論 (モードゥス・トレンス)

(演習問題)

$$((P \rightarrow Q) \wedge \neg Q) \Rightarrow \neg P$$

例題 1 : 論理操作 (続 5)

使える性質 (仮定)

$$A \subseteq B$$

$$x \in C - B$$

$$x \in C$$

$$x \notin B$$

$$\forall y (y \in A \rightarrow y \in B)$$

$$x \in A \rightarrow x \in B$$

$$x \notin A$$

$$x \in C - A$$

導く性質 (目標)

$$x \in C - A$$

 x は任意

差集合の定義に基づいて書き直した

例題 1 : 文章構造

...

〈ここで「 $x \in C - A$ 」を結論として導く。〉

...



例題 1 : 文章構造

...

差集合の定義より, $x \in C$ かつ $x \notin B$ となる.

...



例題 1 : 文章構造

...

差集合の定義より, $x \in C$ かつ $x \notin B$ となる.

部分集合の定義より, 任意の y に対して $y \in A$ ならば $y \in B$ となる.

...



例題 1 : 文章構造

...

差集合の定義より, $x \in C$ かつ $x \notin B$ となる.

部分集合の定義より, 任意の y に対して $y \in A$ ならば $y \in B$ となる.

特に, $x \in A$ ならば $x \in B$ となる.



...

例題 1 : 文章構造

...

差集合の定義より, $x \in C$ かつ $x \notin B$ となる.

部分集合の定義より, 任意の y に対して $y \in A$ ならば $y \in B$ となる.

特に, $x \in A$ ならば $x \in B$ となる.

しかし, $x \notin B$ なので, $x \notin A$ となる.



...

例題 1 : 文章構造

...

差集合の定義より, $x \in C$ かつ $x \notin B$ となる.

部分集合の定義より, 任意の y に対して $y \in A$ ならば $y \in B$ となる.

特に, $x \in A$ ならば $x \in B$ となる.

しかし, $x \notin B$ なので, $x \notin A$ となる.

$x \in C$ と $x \notin A$ より, $x \in C - A$ となる.



...

例題 1 : 証明の清書

- ▶ $A \subseteq B$ であると仮定する .
- ▶ 部分集合の定義より, 任意の x に対して, $x \in C - B$ ならば $x \in C - A$ であることを証明すればよい .
- ▶ x を任意に選び, $x \in C - B$ と仮定する .
- ▶ 差集合の定義より, $x \in C$ かつ $x \notin B$ となる .
- ▶ 部分集合の定義より, 任意の y に対して $y \in A$ ならば $y \in B$ となる .
- ▶ 特に, $x \in A$ ならば $x \in B$ となる .
- ▶ しかし, $x \notin B$ なので, $x \notin A$ となる .
- ▶ $x \in C$ と $x \notin A$ より, $x \in C - A$ となる .
- ▶ したがって, $x \in C - B$ ならば $x \in C - A$ となる .
- ▶ したがって, $C - B \subseteq C - A$ となる .
- ▶ したがって, $A \subseteq B$ ならば $C - B \subseteq C - A$ となる . □

目次

- ① 論理を用いた証明 (続 1)
- ② 論理を用いた証明 (続 2) : 空集合を扱う
- ③ 集合の直積
- ④ 冪集合
- ⑤ 証明の例題
- ⑥ 今日のまとめ

空集合とは

空集合とは？ (復習)

要素を持たない集合を**空集合**と呼び、「 \emptyset 」または「 \varnothing 」と表記する

空集合とは？: 論理を用いて書くと

- ▶ $\neg \exists x (x \in \emptyset)$
- ▶ $\forall x (x \notin \emptyset)$

例題 2 : 空集合は任意の集合の部分集合

任意の集合 A に対して

$$\emptyset \subseteq A$$

部分集合の定義に基づいて書き直すと

任意の x に対して, $x \in \emptyset$ ならば $x \in A$

例題 2 : 論理操作

使える性質 (仮定)

$$x \in \emptyset$$

導く性質 (目標)

$$x \in A$$

例題 2 : 論理操作

使える性質 (仮定)

$$x \in \emptyset$$

$$\forall y (y \notin \emptyset)$$

導く性質 (目標)

$$x \in A$$

空集合の定義

例題 2 : 論理操作

使える性質 (仮定)

$$x \in \emptyset$$

$$\forall y (y \notin \emptyset)$$

$$x \notin \emptyset$$

導く性質 (目標)

$$x \in A$$

存在例化

例題 2 : 論理操作

使える性質 (仮定)

$x \in \emptyset$

$\forall y (y \notin \emptyset)$

$x \notin \emptyset$

矛盾 (F)

導く性質 (目標)

$x \in A$

同値変形 (矛盾法則)

$$P \wedge \neg P \Leftrightarrow F$$

例題 2 : 論理操作

使える性質 (仮定)

$x \in \emptyset$

$\forall y (y \notin \emptyset)$

$x \notin \emptyset$

矛盾 (F)

$x \in A$

導く性質 (目標)

$x \in A$

推論 (空ゆえに真)

$$F \Rightarrow P$$

例題 2 : 文章構造

部分集合の定義から、「 $x \in \emptyset$ ならば $x \in A$ 」を証明すればよい。

x を任意に選び、 $x \in \emptyset$ と仮定する。

空集合の定義より、任意の y に対して $y \notin \emptyset$ である。

特に、 $x \notin \emptyset$ である。

これと $x \in \emptyset$ は矛盾する。

したがって、 $x \in A$ となる。

したがって、 $x \in \emptyset$ ならば $x \in A$ となる。

したがって、 $\emptyset \subseteq A$ となる。



例題 2 : 証明の清書

- ▶ 部分集合の定義から、「 $x \in \emptyset$ ならば $x \in A$ 」を証明すればよい.
- ▶ x を任意に選び, $x \in \emptyset$ と仮定する.
- ▶ 空集合の定義より, 任意の y に対して $y \notin \emptyset$ である.
- ▶ 特に, $x \notin \emptyset$ である.
- ▶ これと $x \in \emptyset$ は矛盾する.
- ▶ したがって, $x \in A$ となる.
- ▶ したがって, $x \in \emptyset$ ならば $x \in A$ となる.
- ▶ したがって, $\emptyset \subseteq A$ となる.



例題 3

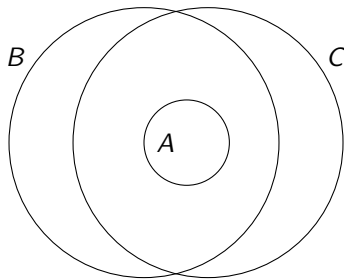
例題 3 : 次を証明せよ

任意の集合 A, B, C に対して

$$A \subseteq B \cap C \Leftrightarrow A \subseteq B \text{ かつ } A \subseteq C$$

が成立する .

図による直観



例題 3 : 同値変形による証明

$$A \subseteq B \cap C$$

例題 3 : 同値変形による証明

$$A \subseteq B \cap C$$

$$\Leftrightarrow \forall x (x \in A \rightarrow x \in B \cap C)$$

(部分集合の定義)

例題 3 : 同値変形による証明

$$A \subseteq B \cap C$$

$$\Leftrightarrow \forall x (x \in A \rightarrow x \in B \cap C)$$

(部分集合の定義)

$$\Leftrightarrow \forall x (x \in A \rightarrow ((x \in B) \wedge (x \in C)))$$

(共通部分の定義)

例題 3 : 同値変形による証明

$$A \subseteq B \cap C$$

$$\Leftrightarrow \forall x (x \in A \rightarrow x \in B \cap C)$$

(部分集合の定義)

$$\Leftrightarrow \forall x (x \in A \rightarrow ((x \in B) \wedge (x \in C)))$$

(共通部分の定義)

$$\Leftrightarrow \forall x ((x \in A \rightarrow x \in B) \wedge (x \in A \rightarrow x \in C))$$

(含意の合成)

含意の合成

$$(P \rightarrow Q) \wedge (P \rightarrow R) \Leftrightarrow P \rightarrow (Q \wedge R)$$

例題 3 : 同値変形による証明

$$A \subseteq B \cap C$$

$$\Leftrightarrow \forall x (x \in A \rightarrow x \in B \cap C) \quad (\text{部分集合の定義})$$

$$\Leftrightarrow \forall x (x \in A \rightarrow ((x \in B) \wedge (x \in C))) \quad (\text{共通部分の定義})$$

$$\Leftrightarrow \forall x ((x \in A \rightarrow x \in B) \wedge (x \in A \rightarrow x \in C)) \quad (\text{含意の合成})$$

$$\Leftrightarrow (\forall x (x \in A \rightarrow x \in B)) \wedge (\forall x (x \in A \rightarrow x \in C)) \quad (\text{分配法則})$$

\forall の分配法則

$$(\forall x \in D (P(x))) \wedge (\forall x \in D (Q(x))) \Leftrightarrow \forall x \in D (P(x) \wedge Q(x))$$

例題 3 : 同値変形による証明

$$A \subseteq B \cap C$$

$$\Leftrightarrow \forall x (x \in A \rightarrow x \in B \cap C) \quad (\text{部分集合の定義})$$

$$\Leftrightarrow \forall x (x \in A \rightarrow ((x \in B) \wedge (x \in C))) \quad (\text{共通部分の定義})$$

$$\Leftrightarrow \forall x ((x \in A \rightarrow x \in B) \wedge (x \in A \rightarrow x \in C)) \quad (\text{含意の合成})$$

$$\Leftrightarrow (\forall x (x \in A \rightarrow x \in B)) \wedge (\forall x (x \in A \rightarrow x \in C)) \quad (\text{分配法則})$$

$$\Leftrightarrow (A \subseteq B) \wedge (A \subseteq C) \quad (\text{部分集合の定義})$$

例題 3 : 同値変形による証明

$$A \subseteq B \cap C$$

$$\Leftrightarrow \forall x (x \in A \rightarrow x \in B \cap C) \quad (\text{部分集合の定義})$$

$$\Leftrightarrow \forall x (x \in A \rightarrow ((x \in B) \wedge (x \in C))) \quad (\text{共通部分の定義})$$

$$\Leftrightarrow \forall x ((x \in A \rightarrow x \in B) \wedge (x \in A \rightarrow x \in C)) \quad (\text{含意の合成})$$

$$\Leftrightarrow (\forall x (x \in A \rightarrow x \in B)) \wedge (\forall x (x \in A \rightarrow x \in C)) \quad (\text{分配法則})$$

$$\Leftrightarrow (A \subseteq B) \wedge (A \subseteq C) \quad (\text{部分集合の定義})$$

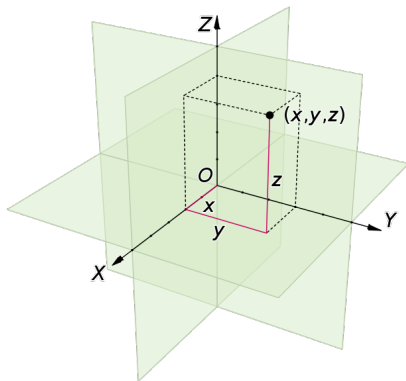
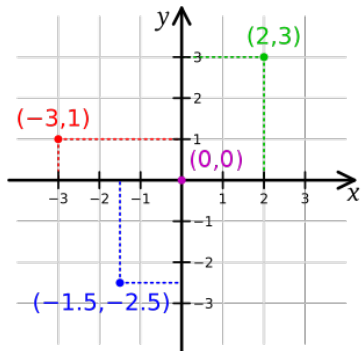
□

目次

- ① 論理を用いた証明 (続 1)
- ② 論理を用いた証明 (続 2) : 空集合を扱う
- ③ 集合の直積**
- ④ 冪集合
- ⑤ 証明の例題
- ⑥ 今日のまとめ

座標

- ▶ 2次元平面の点の座標は2つの実数を「対」にして表現する
- ▶ このように、集合の要素を「対」にすることは有用



http://en.wikipedia.org/wiki/Cartesian_coordinate_system

構造体

プログラミングの構造体

```
struct account {  
    string name;  
    int account_number;  
    int balance;  
};
```

数個のデータを組にして，一つの構造を表現する

順序対 (2 個組)

順序対とは？ (常識に基づく定義)

順序対とは，ものを2つ並べたもののことである．

- ▶ a と a' をこの順で並べたものは「 (a, a') 」と表記する

「順序対」は単に「対」や「組」と呼ばれることもある

同じ順序対 (常識に基づく定義)

2つの順序対 (a, a') と (b, b') が等しいことを $(a, a') = (b, b')$ と表記し，

$$a = b \text{ かつ } a' = b'$$

であることと定義する

注意： (a, a') と (a', a) は $a \neq a'$ ならば異なる

集合の直積 (1)

集合の直積

集合 A と集合 B の直積を $A \times B$ と表記して,

$$A \times B = \{(x, y) \mid x \in A \text{ かつ } y \in B\}$$

と定義する

「直積」は「デカルト積」とも呼ぶ

例

$A = \{a, b\}$, $B = \{c, d, e\}$ のとき,

$$A \times B = \{(a, c), (a, d), (a, e), (b, c), (b, d), (b, e)\}$$

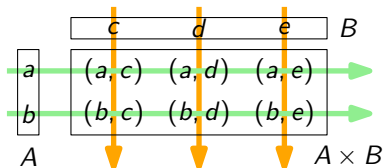
簡単な確認: $A \times B$ の要素数 = (A の要素数) \times (B の要素数)

集合の直積：図示

例

$A = \{a, b\}$, $B = \{c, d, e\}$ のとき,

$$A \times B = \{(a, c), (a, d), (a, e), (b, c), (b, d), (b, e)\}$$



例 続き

$A = \{a, b\}$, $B = \{c, d, e\}$ のとき,

$$B \times A = \{(c, a), (c, b), (d, a), (d, b), (e, a), (e, b)\}$$

n 個組

n は自然数

n 個組とは？ (常識に基づく定義)

n 個組とは，ものを n 個並べたもののことである．

▶ a_1, a_2, \dots, a_n をこの順で並べたものは「 (a_1, a_2, \dots, a_n) 」と表記する

同じ n 個組 (常識に基づく定義)

2つの n 個組 (a_1, a_2, \dots, a_n) と (b_1, b_2, \dots, b_n) が等しいことを
 $(a_1, a_2, \dots, a_n) = (b_1, b_2, \dots, b_n)$ と表記し，

すべての i に対して $a_i = b_i$

であることと定義する

集合の直積 (2)

集合の直積

集合 A_1, A_2, \dots, A_n の直積を $A_1 \times A_2 \times \dots \times A_n$ と表記して,

$$A_1 \times A_2 \times \dots \times A_n = \{(x_1, x_2, \dots, x_n) \mid \forall i \in \{1, 2, \dots, n\} (x_i \in A_i)\}$$

と定義する

「 $A_1 \times A_2 \times \dots \times A_n$ 」を「 $\prod_{i=1}^n A_i$ 」と書くこともある

例

$A = \{a, b\}$, $B = \{c, d, e\}$, $C = \{f, g\}$ のとき,

$$A \times B \times C = \{(a, c, f), (a, c, g), (a, d, f), (a, d, g), (a, e, f), (a, e, g), \\ (b, c, f), (b, c, g), (b, d, f), (b, d, g), (b, e, f), (b, e, g)\}$$

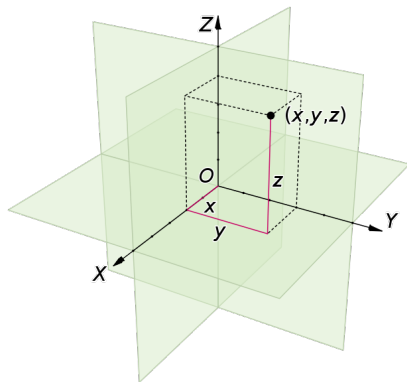
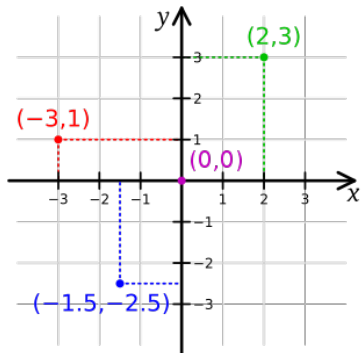
簡単な確認: $A_1 \times A_2 \times \dots \times A_n$ の要素数 = $(A_1$ の要素数) \times $(A_2$ の要素数) $\times \dots \times$ $(A_n$ の要素数)

集合の直積 (関係する記法)

- ▶ $A \times A$ を A^2 と書く
- ▶ $A \times A \times A$ を A^3 と書く
- ▶ $\underbrace{A \times A \times \cdots \times A}_{n \text{ 個}}$ を A^n と書く

集合の直積：例 1 (デカルト座標系)

- ▶ $\mathbb{R}^2 = 2$ 次元平面
- ▶ $\mathbb{R}^3 = 3$ 次元空間
- ▶ ...



http://en.wikipedia.org/wiki/Cartesian_coordinate_system

集合の直積：例 2 (IP アドレス)

(IPv4 における) IP アドレスは 1 バイトの数 4 つで表現される

- ▶ www.uec.ac.jp: 130.153.9.10
- ▶ www.kantei.go.jp: 202.232.146.151

つまり,

可能な IP アドレス全体の集合 = $\{0, \dots, 255\}^4$

集合の直積：例 3 (DNA (デオキシリボ核酸))

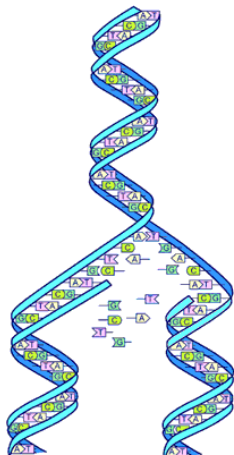
DNA は生物の遺伝情報を担う物質

- ▶ アデニン (A), チミン (T), シトシン (C), グアニン (G) という塩基の並び方で遺伝情報はだいたい決められている

つまり,

- ▶ DNA が持つ遺伝情報全体の集合
= $\{A, T, C, G\}^n$

n は生物種によって異なる自然数



http://en.wikipedia.org/wiki/DNA_replication

集合の直積：補足

集合の直積 (再掲)

集合 A と集合 B の直積を $A \times B$ と表記して,

$$A \times B = \{(x, y) \mid x \in A \text{ かつ } y \in B\}$$

と定義する

定義から, 次が分かる

- ▶ $A \times \emptyset = \emptyset$
- ▶ $\emptyset \times B = \emptyset$

目次

- ① 論理を用いた証明 (続 1)
- ② 論理を用いた証明 (続 2) : 空集合を扱う
- ③ 集合の直積
- ④ 冪集合**
- ⑤ 証明の例題
- ⑥ 今日のまとめ

冪集合

冪集合

集合 A の冪集合とは A の部分集合全体から成る集合であり, 2^A と表記する.

$$2^A = \{B \mid B \subseteq A\}$$

- ▶ 「冪集合」の他に「巾集合」、「べき集合」、「ベキ集合」とも書く
- ▶ 「 2^A 」の他に「 $\mathcal{P}(A)$ 」、「 $\mathcal{P}(A)$ 」とも書く
- ▶ 冪集合の要素は集合 (冪集合は集合の集合)

例

$A = \{a, b, c\}$ のとき

$$2^A = \{\emptyset, \{a\}, \{b\}, \{c\}, \{a, b\}, \{a, c\}, \{b, c\}, \{a, b, c\}\}$$

簡単な確認: 2^A の要素数 = 2^A の要素数

冪集合：他の例

冪集合 (再掲)

集合 A の冪集合とは A の部分集合全体から成る集合であり, 2^A と表記する.

$$2^A = \{B \mid B \subseteq A\}$$

- ▶ $2^{\{a\}} = \{\emptyset, \{a\}\}$
- ▶ $2^\emptyset = \{\emptyset\}$
- ▶ $2^{\{\emptyset\}} = \{\emptyset, \{\emptyset\}\}$

目次

- ① 論理を用いた証明 (続 1)
- ② 論理を用いた証明 (続 2) : 空集合を扱う
- ③ 集合の直積
- ④ 冪集合
- ⑤ 証明の例題**
- ⑥ 今日のまとめ

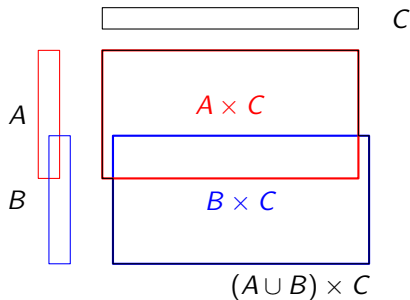
証明の例題 4

例題 4

任意の集合 A, B, C に対して，次が成り立つことを証明せよ．

$$(A \cup B) \times C = (A \times C) \cup (B \times C).$$

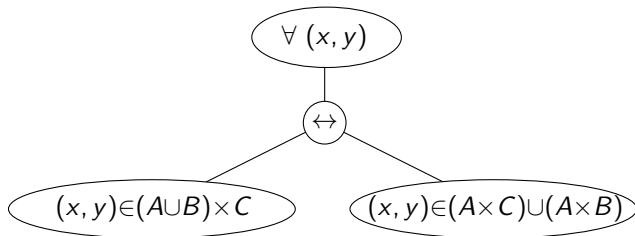
図の直観



例題 4 : 論理構造

「 $=$ 」の定義に基づいて書き直す

$$\forall (x, y) ((x, y) \in (A \cup B) \times C \leftrightarrow (x, y) \in (A \times C) \cup (B \times C))$$



同値変形によって証明してみる

例題 4 : 同値変形による証明

$$(x, y) \in (A \cup B) \times C$$

例題 4 : 同値変形による証明

$$(x, y) \in (A \cup B) \times C$$

$$\Leftrightarrow (x \in A \cup B) \wedge (y \in C)$$

(直積の定義)

例題 4 : 同値変形による証明

$$(x, y) \in (A \cup B) \times C$$

$$\Leftrightarrow (x \in A \cup B) \wedge (y \in C)$$

(直積の定義)

$$\Leftrightarrow ((x \in A) \vee (x \in B)) \wedge (y \in C)$$

(合併の定義)

例題 4 : 同値変形による証明

$$(x, y) \in (A \cup B) \times C$$

$$\Leftrightarrow (x \in A \cup B) \wedge (y \in C)$$

(直積の定義)

$$\Leftrightarrow ((x \in A) \vee (x \in B)) \wedge (y \in C)$$

(合併の定義)

$$\Leftrightarrow ((x \in A) \wedge (y \in C)) \vee ((x \in B) \wedge (y \in C))$$

(分配法則)

分配法則

$$(P \vee Q) \wedge R \Leftrightarrow (P \wedge R) \vee (Q \wedge R)$$

例題 4 : 同値変形による証明

$$(x, y) \in (A \cup B) \times C$$

$$\Leftrightarrow (x \in A \cup B) \wedge (y \in C)$$

(直積の定義)

$$\Leftrightarrow ((x \in A) \vee (x \in B)) \wedge (y \in C)$$

(合併の定義)

$$\Leftrightarrow ((x \in A) \wedge (y \in C)) \vee ((x \in B) \wedge (y \in C))$$

(分配法則)

$$\Leftrightarrow ((x, y) \in A \times C) \vee ((x, y) \in B \times C)$$

(直積の定義)

例題 4 : 同値変形による証明

$$(x, y) \in (A \cup B) \times C$$

$$\Leftrightarrow (x \in A \cup B) \wedge (y \in C)$$

(直積の定義)

$$\Leftrightarrow ((x \in A) \vee (x \in B)) \wedge (y \in C)$$

(合併の定義)

$$\Leftrightarrow ((x \in A) \wedge (y \in C)) \vee ((x \in B) \wedge (y \in C))$$

(分配法則)

$$\Leftrightarrow ((x, y) \in A \times C) \vee ((x, y) \in B \times C)$$

(直積の定義)

$$\Leftrightarrow (x, y) \in (A \times C) \cup (B \times C)$$

(合併の定義)

例題 4 : 同値変形による証明

$$(x, y) \in (A \cup B) \times C$$

$$\Leftrightarrow (x \in A \cup B) \wedge (y \in C)$$

(直積の定義)

$$\Leftrightarrow ((x \in A) \vee (x \in B)) \wedge (y \in C)$$

(合併の定義)

$$\Leftrightarrow ((x \in A) \wedge (y \in C)) \vee ((x \in B) \wedge (y \in C))$$

(分配法則)

$$\Leftrightarrow ((x, y) \in A \times C) \vee ((x, y) \in B \times C)$$

(直積の定義)

$$\Leftrightarrow (x, y) \in (A \times C) \cup (B \times C)$$

(合併の定義)



証明の例題 5

例題 5

集合 A, B に対して, 次が成り立つことを証明せよ.

$$2^{A \cap B} = 2^A \cap 2^B.$$

定義に基づいて書き直す

$$\forall X (X \in 2^{A \cap B} \leftrightarrow X \in 2^A \cap 2^B)$$

同値変形によって証明してみる

例題 5 : 同値変形による証明

$$X \in 2^{A \cap B}$$

例題 5 : 同値変形による証明

$$X \in 2^{A \cap B}$$

$$\Leftrightarrow X \subseteq A \cap B$$

(冪集合の定義)

例題 5 : 同値変形による証明

$$X \in 2^{A \cap B}$$

$$\Leftrightarrow X \subseteq A \cap B$$

$$\Leftrightarrow X \subseteq A \text{ かつ } X \subseteq B$$

(冪集合の定義)

(例題 3)

例題 3

$$A \subseteq B \cap C \Leftrightarrow A \subseteq B \text{ かつ } A \subseteq C$$

例題 5 : 同値変形による証明

$$X \in 2^{A \cap B}$$

$$\Leftrightarrow X \subseteq A \cap B$$

(冪集合の定義)

$$\Leftrightarrow X \subseteq A \text{ かつ } X \subseteq B$$

(例題 3)

$$\Leftrightarrow X \in 2^A \text{ かつ } X \in 2^B$$

(冪集合の定義)

例題 5 : 同値変形による証明

$$X \in 2^{A \cap B}$$

$$\Leftrightarrow X \subseteq A \cap B$$

(冪集合の定義)

$$\Leftrightarrow X \subseteq A \text{ かつ } X \subseteq B$$

(例題 3)

$$\Leftrightarrow X \in 2^A \text{ かつ } X \in 2^B$$

(冪集合の定義)

$$\Leftrightarrow X \in 2^A \cap 2^B$$

(共通部分の定義)

例題 5 : 同値変形による証明

$$X \in 2^{A \cap B}$$

$$\Leftrightarrow X \subseteq A \cap B$$

(冪集合の定義)

$$\Leftrightarrow X \subseteq A \text{ かつ } X \subseteq B$$

(例題 3)

$$\Leftrightarrow X \in 2^A \text{ かつ } X \in 2^B$$

(冪集合の定義)

$$\Leftrightarrow X \in 2^A \cap 2^B$$

(共通部分の定義)



目次

- ① 論理を用いた証明 (続 1)
- ② 論理を用いた証明 (続 2) : 空集合を扱う
- ③ 集合の直積
- ④ 冪集合
- ⑤ 証明の例題
- ⑥ **今日のまとめ**

今日のまとめ

今日の目標

- ▶ 部分集合について理解を深める
- ▶ 集合の直積と冪集合 (べき集合) を理解する

今後の予告

今までの部分を**基礎**として進める

- ▶ 2つの集合がどのような関係を持っているか？
 - ▶ 対応, 関数, 関係
- ▶ 無限を取り扱う方法
 - ▶ 数学的帰納法, 再帰的定義

目次

- ① 論理を用いた証明 (続 1)
- ② 論理を用いた証明 (続 2) : 空集合を扱う
- ③ 集合の直積
- ④ 冪集合
- ⑤ 証明の例題
- ⑥ 今日のまとめ