

離散数学 第 4 回
集合と論理 (4) : 論理を使った証明 (第 2 ステップ)

岡本 吉央
okamotoy@uec.ac.jp

電気通信大学

2013 年 5 月 14 日

最終更新 : 2013 年 5 月 15 日 13:11

今日の目標

- ▶ 人間の読める証明が書けるようになる
 - ▶ 定義に基づいて書き直すこと
 - ▶ 推論に基づいて書き下すこと
- ▶ 全称命題の証明ができるようになる

なぜ証明を勉強するのか？

- ▶ 証明は論理的思考の根幹 \rightsquigarrow 論理的思考の訓練
- ▶ 証明は文章 (主張) \rightsquigarrow 文章構造と論理構造の対応に注目

これを通して、文章を論理的に読み書きできるようになる

目次

- ① 集合に関する証明：定義に基づいて書き直す
- ② 集合に関する証明：推論に基づいて書き下す
- ③ 集合に関する証明 (別の例)
- ④ 今日のまとめ

とりあえず，証明を試みる

証明を試みること (1)

集合 A, B に対して，

$$A \cap B \subseteq A$$

が成立する．

とりあえず，証明を試みる

証明してみること (1)

集合 A, B に対して，

$$A \cap B \subseteq A$$

が成立する．

証明：

- ▶ x を任意に選び， $x \in A \cap B$ であると仮定する．
- ▶ 共通部分の定義より， $x \in A$ かつ $x \in B$ ．
- ▶ よって， $x \in A$ が成り立つ．
- ▶ したがって， $A \cap B \subseteq A$ が成り立つ．



とりあえず、証明を試みる

証明してみること (1)

集合 A, B に対して,

$$A \cap B \subseteq A$$

が成立する。

証明：

- ▶ x を任意に選び, $x \in A \cap B$ であると仮定する。
- ▶ 共通部分の定義より, $x \in A$ かつ $x \in B$ 。
- ▶ よって, $x \in A$ が成り立つ。
- ▶ したがって, $A \cap B \subseteq A$ が成り立つ。 □

疑問？

これは何？

オイラー図の与える直観

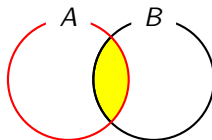
証明してみること (1)

集合 A, B に対して,

$$A \cap B \subseteq A$$

が成立する .

オイラー図を描いてみる



これは直観を与えるだけで、証明は論理に基づいて行う

証明とは？

証明とは？（常識に基づく定義）

定義と前提に基づき，推論を重ねて，結論を導くこと

「結論を導く」とは？

「『前提』ならば『結論』」という命題が恒真命題であることを示すこと

証明とは？

証明とは？ (常識に基づく定義)

定義と前提に基づき，推論を重ねて，結論を導くこと

「結論を導く」とは？

「『前提』ならば『結論』」という命題が恒真命題であることを示すこと

証明してみること (1)

集合 A, B に対して，

$$A \cap B \subseteq A$$

が成立する．

これはどういう命題なのか？ 定義に戻って書き直す

- ▶ \cap (共通部分) の定義に戻る
- ▶ \subseteq (部分集合) の定義に戻る

証明の作り方：定義に基づいて書き直す

証明したいこと

$$A \cap B \subseteq A$$

証明の作り方：定義に基づいて書き直す

証明したいこと

$$A \cap B \subseteq A$$

それを \subseteq の定義に基づいて書き直したもの任意の x に対して $(x \in A \cap B$ ならば $x \in A)$

証明の作り方：定義に基づいて書き直す

証明したいこと

$$A \cap B \subseteq A$$

それを \subseteq の定義に基づいて書き直したもの任意の x に対して $(x \in A \cap B$ ならば $x \in A)$ それを \cap の定義に基づいて書き直したもの任意の x に対して $((x \in A$ かつ $x \in B)$ ならば $x \in A)$

証明の作り方：定義に基づいて書き直す (続)

書き直してできたもの (再掲)

任意の x に対して $((x \in A \text{ かつ } x \in B) \text{ ならば } x \in A)$

証明の作り方：定義に基づいて書き直す (続)

書き直してできたもの (再掲)

任意の x に対して $((x \in A \text{ かつ } x \in B) \text{ ならば } x \in A)$

ここで，命題関数 $P(x)$ と $Q(x)$ を次のように置く

- ▶ $P(x) = \text{「}x \in A\text{」}$
- ▶ $Q(x) = \text{「}x \in B\text{」}$

「書き直してできたもの」を $P(x)$ と $Q(x)$ によって書き直したもの

$$\forall x ((P(x) \wedge Q(x)) \rightarrow P(x))$$

この論理式が恒真式であることを示せばよい

はじめの「そっけない証明」をもう一度してみる

証明したいこと

$$A \cap B \subseteq A$$

証明：

- ▶ x を任意に選び， $x \in A \cap B$ であると仮定する．
- ▶ 共通部分の定義より， $x \in A$ かつ $x \in B$ ．
- ▶ よって， $x \in A$ が成り立つ．
- ▶ したがって， $A \cap B \subseteq A$ が成り立つ． □

ポイント

- ▶ 「定義に基づいて書き直す」ことを確かに行っている
 - ▶ しかし，どこで行っているのかは分かりにくい

まず、「定義に基づいて書き直す」ことに主眼を置く

とりあえず，証明を見してみる：パート2

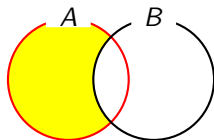
証明してみること (2)

集合 A, B に対して，

$$(A \cup B) - B \subseteq A$$

が成立する．

オイラー図から直観を得る



「証明してみること」を定義に基づいて書き直す

定義に基づいて書き直す

証明したいこと

$$(A \cup B) - B \subseteq A$$

定義に基づいて書き直す

証明したいこと

$$(A \cup B) - B \subseteq A$$

それを \subseteq の定義に基づいて書き直したもの任意の x に対して $(x \in (A \cup B) - B$ ならば $x \in A)$

定義に基づいて書き直す (続)

「 $x \in (A \cup B) - B$ 」を - の定義に基づいて書き直したもの

$$x \in A \cup B \text{ かつ } x \notin B$$

定義に基づいて書き直す (続)

「 $x \in (A \cup B) - B$ 」を $-$ の定義に基づいて書き直したもの

$$x \in A \cup B \text{ かつ } x \notin B$$

それを \cup の定義に基づいて書き直したもの

$$(x \in A \text{ または } x \in B) \text{ かつ } x \notin B$$

定義に基づいて書き直す (続)

「 $x \in (A \cup B) - B$ 」を $-$ の定義に基づいて書き直したもの

$$x \in A \cup B \text{ かつ } x \notin B$$

それを \cup の定義に基づいて書き直したもの

$$(x \in A \text{ または } x \in B) \text{ かつ } x \notin B$$

それを \notin の定義に基づいて書き直したもの

$$(x \in A \text{ または } x \in B) \text{ かつ } (x \in B \text{ ではない})$$

定義に基づいて書き直す (続 2)

証明したいことを $\subseteq, -, \cup, \notin$ の定義に基づいて書き直したものの
任意の x に対して

$((x \in A \text{ または } x \in B) \text{ かつ } (x \in B \text{ ではない})) \text{ ならば } x \in A$

定義に基づいて書き直す (続2)

証明したいことを $\subseteq, -, \cup, \notin$ の定義に基づいて書き直したものの任意の x に対して

$$(((x \in A \text{ または } x \in B) \text{ かつ } (x \in B \text{ ではない})) \text{ ならば } x \in A)$$

ここで、命題関数 $P(x)$ と $Q(x)$ を次のように置く

- ▶ $P(x) = \text{「}x \in A\text{」}$
- ▶ $Q(x) = \text{「}x \in B\text{」}$

「書き直したもの」を $P(x)$ と $Q(x)$ によって書き直したもの

$$\forall x (((P(x) \vee Q(x)) \wedge \neg Q(x)) \rightarrow P(x))$$

目次

- ① 集合に関する証明：定義に基づいて書き直す
- ② 集合に関する証明：推論に基づいて書き下す
- ③ 集合に関する証明 (別の例)
- ④ 今日のまとめ

とりあえず，証明を試みる（再掲）

証明を試みること (1)

集合 A, B に対して，

$$A \cap B \subseteq A$$

が成立する．

証明：

- ▶ x を任意に選び， $x \in A \cap B$ であると仮定する．
- ▶ 共通部分の定義より， $x \in A$ かつ $x \in B$ ．
- ▶ よって， $x \in A$ が成り立つ．
- ▶ したがって， $A \cap B \subseteq A$ が成り立つ．



とりあえず，証明を試みる（再掲）

証明を試みること (1)

集合 A, B に対して，

$$A \cap B \subseteq A$$

が成立する．

証明：

- ▶ x を任意に選び， $x \in A \cap B$ であると仮定する．
- ▶ 共通部分の定義より， $x \in A$ かつ $x \in B$ ．
- ▶ よって， $x \in A$ が成り立つ．
- ▶ したがって， $A \cap B \subseteq A$ が成り立つ． □

今からやること

定義に基づいて書き下したもののから，証明の構造を考える

格言

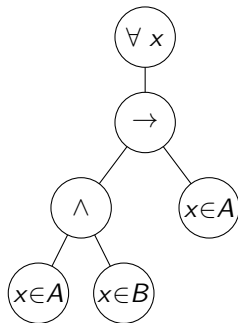
証明は文章（文章の構造をしっかりと捉える）

定義に基づいて書き下す (1)

定義に基づいて書き下したものの (再掲)

任意の x に対して $((x \in A \text{ かつ } x \in B) \text{ ならば } x \in A)$

構造



証明を書き進めるときのポイント

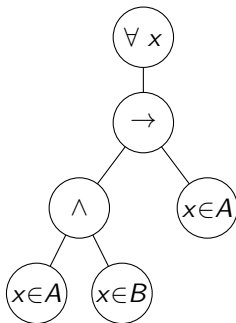
構造によって類型化され、
次の2つを組にして考える

- ▶ 証明の文章構造
- ▶ 論理操作 (同値変形, 推論)

構造による類型化：全称命題

証明する目標が「 $\forall x \in D (\quad)$ 」の場合

- ▶ 文章構造：「 $x \in D$ を任意に選ぶ」として， \quad を証明する
- ▶ 論理操作：「 $x \in D$ 」であることを仮定して， \quad を証明する



全称命題の証明：文章構造

部分集合の定義より、「任意の x に対して、 $x \in A \cap B$ ならば $x \in A$ 」を証明すればよい。

x を任意に選ぶ。

〈ここに「 $x \in A \cap B$ ならば $x \in A$ 」の証明を書く〉

したがって、 $A \cap B \subseteq A$ が成立する。



全称命題の証明：論理操作

操作前

使える性質 (仮定)

導く性質 (目標)

任意の x に対して

$$x \in A \cap B \text{ ならば } x \in A$$

操作後

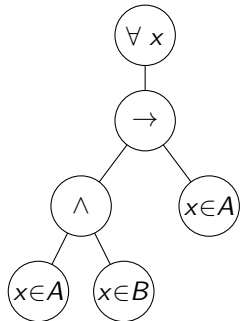
使える性質 (仮定)

導く性質 (目標)

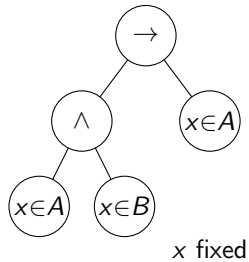
$$x \in A \cap B \text{ ならば } x \in A$$

全称命題の証明：目標の構造も変化

操作前の目標



操作後の目標



x は固定済み

全称命題の証明：一般論

操作前の目標

$\forall x (P(x) \rightarrow Q(x))$ が正しい (恒真である) ことの証明

操作後の目標

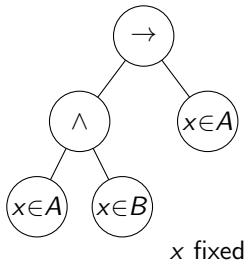
$P(x) \rightarrow Q(x)$ がすべての x に対して正しい (恒真である) ことの証明

この2つが同じ結論を導くことは、 \forall の定義から分かる
(同値変形を記号ではなく、文章で行ったにすぎない)

構造による類型化：含意

証明する目標が「 \rightarrow 」の場合

- ▶ 文章構造：「 P を仮定する」として、 Q を証明する
- ▶ 論理操作： P であることを仮定して、 Q を証明する



含意の証明：文章構造

部分集合の定義より、「任意の x に対して、 $x \in A \cap B$ ならば $x \in A$ 」を証明すればよい。

x を任意に選ぶ。

$x \in A \cap B$ であると仮定する。

〈ここに「 $x \in A$ 」の証明を書く〉

したがって、 $A \cap B \subseteq A$ が成立する。



含意の証明：論理操作

操作前

使える性質 (仮定)

導く性質 (目標)

$$x \in A \cap B \text{ ならば } x \in A$$

操作後

使える性質 (仮定)

導く性質 (目標)

$$x \in A \cap B$$

$$x \in A$$

含意の証明：一般論

操作前の目標

$P \rightarrow Q$ が正しいことの証明

操作後の目標

P が正しいときに、 Q が正しいことの証明

この2つが同じ結論を導くことは、 \rightarrow の定義から分かる
(同値変形を記号ではなく、文章で行ったにすぎない)

証明の続き (1)：文章構造

部分集合の定義より、「任意の x に対して、 $x \in A \cap B$ ならば $x \in A$ 」を証明すればよい。

x を任意に選ぶ。

$x \in A \cap B$ であると仮定する。

〈ここに「 $x \in A$ 」の証明を書く〉

したがって、 $A \cap B \subseteq A$ が成立する。



証明の続き (2)：文章構造

部分集合の定義より、「任意の x に対して、 $x \in A \cap B$ ならば $x \in A$ 」を証明すればよい。

x を任意に選ぶ。

$x \in A \cap B$ であると仮定する。

$x \in A \cap B$ より、 $x \in A$ かつ $x \in B$ が成り立つ。

したがって、 $A \cap B \subseteq A$ が成立する。 □

証明の続き (2) : 文章構造

部分集合の定義より、「任意の x に対して、 $x \in A \cap B$ ならば $x \in A$ 」を証明すればよい。

x を任意に選ぶ。

$x \in A \cap B$ であると仮定する。

$x \in A \cap B$ より、 $x \in A$ かつ $x \in B$ が成り立つ。
よって、 $x \in A$ が成り立つ。

したがって、 $A \cap B \subseteq A$ が成立する。 □

証明終了：文章構造

部分集合の定義より、「任意の x に対して、 $x \in A \cap B$ ならば $x \in A$ 」を証明すればよい。

x を任意に選ぶ。

$x \in A \cap B$ であると仮定する。

$x \in A \cap B$ より、 $x \in A$ かつ $x \in B$ が成り立つ。
よって、 $x \in A$ が成り立つ。

したがって、 $A \cap B \subseteq A$ が成立する。 □

証明終了：清書

- ▶ 部分集合の定義より、「任意の x に対して、 $x \in A \cap B$ ならば $x \in A$ 」を証明すればよい。
- ▶ x を任意に選ぶ。
- ▶ $x \in A \cap B$ であると仮定する。
- ▶ $x \in A \cap B$ より、 $x \in A$ かつ $x \in B$ が成り立つ。
- ▶ よって、 $x \in A$ が成り立つ。
- ▶ したがって、 $A \cap B \subseteq A$ が成立する。 □

格言 (再掲)

証明は文章 (文章の構造をしっかりと捉える)

最後に行った論理操作は何なのか？

推論に基づく証明

推論とは？ (常識に基づいた定義)

「 $P \Rightarrow Q$ 」であるとき、
使える性質 (仮定) の中の P を Q で置き換えること

注意 : 「導く性質 (目標) の P 」を Q で置き換えてはいけない

重要な性質

操作後の目標が証明できると、操作前の目標も証明できたことになる

推論 (1)：論理操作

操作前

使える性質 (仮定)

$x \in A \cap B$

導く性質 (目標)

$x \in A$

操作後

使える性質 (仮定)

$x \in A \cap B$

$x \in A$ かつ $x \in B$

導く性質 (目標)

$x \in A$

推論に用いた事実： $x \in A \cap B \Leftrightarrow x \in A$ かつ $x \in B$ (\cap の定義)

推論 (2) : 論理操作

操作前

使える性質 (仮定)

$x \in A \cap B$

$x \in A \text{ かつ } x \in B$

導く性質 (目標)

$x \in A$

操作後

使える性質 (仮定)

$x \in A \cap B$

$x \in A \text{ かつ } x \in B$

$x \in A$

導く性質 (目標)

$x \in A$

推論に用いた事実： $P \wedge Q \Rightarrow P$ (恒真式)

もう一度証明を試みる

部分集合の定義より、「任意の x に対して、 $x \in A \cap B$ ならば $x \in A$ 」を証明すればよい。

x を任意に選ぶ。

$x \in A \cap B$ であると仮定する。

$x \in A \cap B$ より、 $x \in A$ かつ $x \in B$ が成り立つ。
よって、 $x \in A$ が成り立つ。

したがって、 $A \cap B \subseteq A$ が成立する。 □

推論に基づく証明：一般論

操作前の目標

$P \rightarrow R$ が正しいことの証明

ここで「 $P \Rightarrow Q$ 」が成り立つとする

操作後の目標

$P \wedge Q \rightarrow R$ が正しいことの証明

操作後の目標が達成できれば、操作前の目標も達成できる

- ▶ なぜか？
- ▶ $((P \rightarrow Q) \wedge ((P \wedge Q) \rightarrow R)) \Rightarrow (P \rightarrow R)$ が成り立つから (演習問題)

ポイント

推論により、証明において使える性質が増えていき、証明がしやすくなっていく

目次

- ① 集合に関する証明 : 定義に基づいて書き直す
- ② 集合に関する証明 : 推論に基づいて書き下す
- ③ 集合に関する証明 (別の例)**
- ④ 今日のまとめ

とりあえず、証明を試みる：パート2

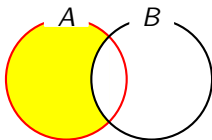
証明してみること (2)

集合 A, B に対して、

$$(A \cup B) - B \subseteq A$$

が成立する。

オイラー図から直観を得る

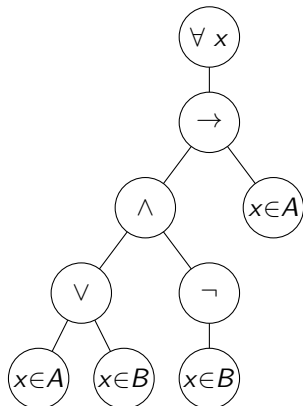


定義に基づいて書き直したもの

任意の x に対して

$$(((x \in A \text{ または } x \in B) \text{ かつ } (x \in B \text{ ではない})) \text{ ならば } x \in A)$$

証明することの構造



全称命題の証明：文章構造

部分集合の定義より、「任意の x に対して、 $x \in (A \cup B) - B$ ならば $x \in A$ 」を証明すればよい。

x を任意に選ぶ。

〈ここに「 $x \in (A \cup B) - B$ ならば $x \in A$ 」の証明を書く〉

したがって、 $(A \cup B) - B \subseteq A$ が成立する。



全称命題の証明：論理操作

操作前

使える性質 (仮定)

導く性質 (目標)

任意の x に対して

$$x \in (A \cup B) - B \text{ ならば } x \in A$$

操作後

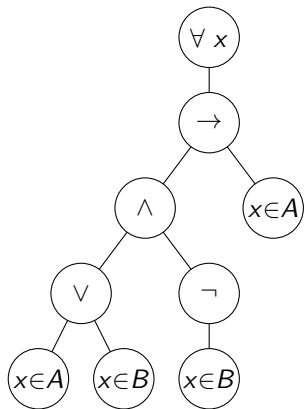
使える性質 (仮定)

導く性質 (目標)

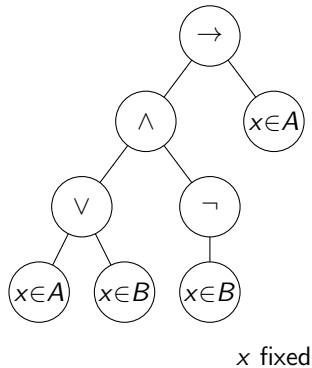
$$x \in (A \cup B) - B \text{ ならば } x \in A$$

全称命題の証明：目標の構造も変化

操作前の目標



操作後の目標



x は固定済み

含意の証明：論理操作

操作前

使える性質 (仮定)

導く性質 (目標)

$$x \in (A \cup B) - B \text{ ならば } x \in A$$

操作後

使える性質 (仮定)

導く性質 (目標)

$$x \in (A \cup B) - B$$

$$x \in A$$

含意の証明：文章構造

部分集合の定義より、「任意の x に対して、 $x \in (A \cup B) - B$ ならば $x \in A$ 」を証明すればよい。

x を任意に選ぶ。

$x \in (A \cup B) - B$ であると仮定する。

〈ここに「 $x \in A$ 」の証明を書く〉

したがって、 $(A \cup B) - B \subseteq A$ が成立する。



同値変形 (1) : 論理操作

操作前

使える性質 (仮定)

$$x \in (A \cup B) - B$$

導く性質 (目標)

$$x \in A$$

操作後

使える性質 (仮定)

$$x \in (A \cup B) - B$$

$$x \in A \cup B$$

$$x \notin B$$

導く性質 (目標)

$$x \in A$$

推論に用いた事実 : $x \in (A \cup B) - B \Leftrightarrow x \in A \cup B$ かつ $x \notin B$

同値変形 (2) : 論理操作

操作前

使える性質 (仮定)

$$x \in (A \cup B) - B$$

導く性質 (目標)

$$x \in A$$

操作後

使える性質 (仮定)

$$x \in (A \cup B) - B$$

$$x \in A \cup B$$

$$x \notin B$$

$$x \in A \text{ または } x \in B$$

導く性質 (目標)

$$x \in A$$

推論に用いた事実 : $x \in A \cup B \Leftrightarrow x \in A \text{ または } x \in B$

同値変形：文章構造

部分集合の定義より、「任意の x に対して、 $x \in (A \cup B) - B$ ならば $x \in A$ 」を証明すればよい。

x を任意に選ぶ。

$x \in (A \cup B) - B$ であると仮定する。

$x \in (A \cup B) - B$ より、 $x \in A \cup B$ かつ $x \notin B$ である。

$x \in A \cup B$ より、 $x \in A$ または $x \in B$ である。

...

したがって、 $(A \cup B) - B \subseteq A$ が成立する。



推論：論理操作

操作後

使える性質 (仮定)	導く性質 (目標)
$x \in (A \cup B) - B$ $x \in A \cup B$ $x \notin B$ $x \in A$ または $x \in B$ $x \in A$	$x \in A$

推論に用いた事実： $\neg Q \wedge (P \vee Q) \Rightarrow P$
 (選言三段論法と呼ばれることがある)

推論：文章構造

部分集合の定義より、「任意の x に対して、 $x \in (A \cup B) - B$ ならば $x \in A$ 」を証明すればよい。

x を任意に選ぶ。

$x \in (A \cup B) - B$ であると仮定する。

$x \in (A \cup B) - B$ より、 $x \in A \cup B$ かつ $x \notin B$ である。

$x \in A \cup B$ より、 $x \in A$ または $x \in B$ である。

しかし、 $x \notin B$ であるため、 $x \in A$ となる。

したがって、 $(A \cup B) - B \subseteq A$ が成立する。 □

証明完了：清書

- ▶ 部分集合の定義より、「任意の x に対して、 $x \in (A \cup B) - B$ ならば $x \in A$ 」を証明すればよい。
- ▶ x を任意に選ぶ。
- ▶ $x \in (A \cup B) - B$ であると仮定する。
- ▶ $x \in (A \cup B) - B$ より、 $x \in A \cup B$ かつ $x \notin B$ である。
- ▶ $x \in A \cup B$ より、 $x \in A$ または $x \in B$ である。
- ▶ しかし、 $x \notin B$ であるため、 $x \in A$ となる。
- ▶ したがって、 $(A \cup B) - B \subseteq A$ が成立する。 □

有用な推論

三段論法 (前回)

$$(P \rightarrow Q) \wedge (Q \rightarrow R) \Rightarrow P \rightarrow R$$

選言三段論法 (今回)

$$(P \vee Q) \wedge \neg P \Rightarrow Q$$

モードゥス・ポネンス (前回)

$$P \wedge (P \rightarrow Q) \Rightarrow Q$$

 \wedge の除去 (今回)

$$P \wedge Q \Rightarrow P$$

他のものは出て来たときに説明

目次

- ① 集合に関する証明：定義に基づいて書き直す
- ② 集合に関する証明：推論に基づいて書き下す
- ③ 集合に関する証明 (別の例)
- ④ 今日のまとめ

今日のまとめ

今日の目標

- ▶ 人間の読める証明が書けるようになる
 - ▶ 定義に基づいて書き直すこと
 - ▶ 推論に基づいて書き下すこと
- ▶ 全称命題の証明ができるようになる

なぜ証明を勉強するのか？

- ▶ 証明は論理的思考の根幹 \rightsquigarrow 論理的思考の訓練
- ▶ 証明は文章 (主張) \rightsquigarrow 文章構造と論理構造の対応に注目

これを通して、文章を論理的に読み書きできるようになる

コミュニケーションとしての証明：補足

$(A \cup B) - B \subseteq A$ を証明するとき

例えば、次の証明は正しいか？

- ▶ x を任意に選び、 $x \in (A \cup B) - B$ と仮定する。
- ▶ このとき、 $x \in A$ である。



問題点

- ▶ 1行目と2行目の間に、本来あるべきステップがない
- ▶ しかし、それがあれば正しい
- ▶ 「本来あるべきステップ」は書くほどのものでもない？

格言

証明は「正しく」かつ「伝わるように」書くことが重要

- ▶ 証明は書き手の主張を読み手に伝えるもの
- ▶ 「伝え方」は誰が書き手であるかによって変わる
- ▶ 「伝わり方」は誰が読み手であるかによって変わる

目次

- ① 集合に関する証明：定義に基づいて書き直す
- ② 集合に関する証明：推論に基づいて書き下す
- ③ 集合に関する証明 (別の例)
- ④ 今日のまとめ