離散数学 第 2 回
集合と論理 (2)：述語論理と集合

岡本 吉央
okamotoy@uec.ac.jp

電気通信大学

2013 年 4 月 23 日

最終更新：2013 年 5 月 2 日　01:59

今日の概要

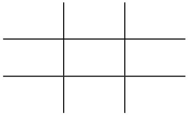
今日の目標

- 述語論理の基本を理解すること
- 部分集合の定義に現れる述語論理を理解すること

三目並べ

3×3 のマス目の上で行うゲーム

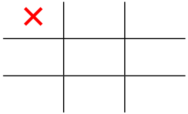
- 先手は「×」をマス目に書く
- 後手は「○」をマス目に書く
- 先手と後手は交互に書くが，既にに書かれているマス目には書けない
- 縦か横か斜めのどこかに自分の印を先に揃えた方が勝ち
(どちらも揃えられないときは，引き分け)



三目並べ

3×3 のマス目の上で行うゲーム

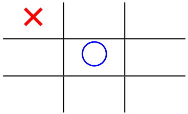
- 先手は「×」をマス目に書く
- 後手は「○」をマス目に書く
- 先手と後手は交互に書くが，既に書かれているマス目には書けない
- 縦か横か斜めのどこかに自分の印を先に揃えた方が勝ち
  (どちらも揃えられないときは，引き分け)



三目並べ

3×3 のマス目の上で行うゲーム

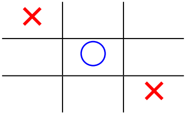
- 先手は「×」をマス目に書く
- 後手は「○」をマス目に書く
- 先手と後手は交互に書くが，既に書かれているマス目には書けない
- 縦か横か斜めのどこかに自分の印を先に揃えた方が勝ち
  (どちらも揃えられないときは，引き分け)



三目並べ

3×3 のマス目の上で行うゲーム

- 先手は「×」をマス目に書く
- 後手は「◯」をマス目に書く
- 先手と後手は交互に書くが，既に書かれているマス目には書けない
- 縦か横か斜めのどこかに自分の印を先に揃えた方が勝ち
  (どちらも揃えられないときは，引き分け)



三目並べ

3×3 のマス目の上で行うゲーム

- 先手は「×」をマス目に書く
- 後手は「○」をマス目に書く
- 先手と後手は交互に書くが，既に書かれているマス目には書けない
- 縦か横か斜めのどこかに自分の印を先に揃えた方が勝ち
  (どちらも揃えられないときは，引き分け)

×	○	
	○	
		×

三目並べ

3 × 3 のマス目の上で行うゲーム

- 先手は「×」をマス目に書く
- 後手は「○」をマス目に書く
- 先手と後手は交互に書くが，既にに書かれているマス目には書けない
- 縦か横か斜めのどこかに自分の印を先に揃えた方が勝ち
(どちらも揃えられないときは，引き分け)

×	○	
	○	
	×	×

三目並べ

3×3 のマス目の上で行うゲーム

- 先手は「×」をマス目に書く
- 後手は「○」をマス目に書く
- 先手と後手は交互に書くが，既にかかれているマス目には書けない
- 縦か横か斜めのどこかに自分の印を先に揃えた方が勝ち
(どちらも揃えられないときは，引き分け)

×	○	
	○	
○	×	×

3×3 のマス目の上で行うゲーム

- 先手は「×」をマス目に書く
- 後手は「○」をマス目に書く
- 先手と後手は交互に書くが，既に書かれているマス目には書けない
- 縦か横か斜めのどこかに自分の印を先に揃えた方が勝ち
  (どちらも揃えられないときは，引き分け)

×	○	×
	○	
○	×	×

三目並べ

3×3 のマス目の上で行うゲーム

- 先手は「×」をマス目に書く
- 後手は「○」をマス目に書く
- 先手と後手は交互に書くが，既に書かれているマス目には書けない
- 縦か横か斜めのどこかに自分の印を先に揃えた方が勝ち
  (どちらも揃えられないときは，引き分け)

×	○	×
	○	○
○	×	×

三目並べ

3×3 のマス目の上で行うゲーム

- 先手は「×」をマス目に書く
- 後手は「○」をマス目に書く
- 先手と後手は交互に書くが，既に書かれているマス目には書けない
- 縦か横か斜めのどこかに自分の印を先に揃えた方が勝ち
  (どちらも揃えられないときは，引き分け)

×	○	×
×	○	○
○	×	×

三目並べ

3×3 のマス目の上で行うゲーム

- 先手は「×」をマス目に書く
- 後手は「○」をマス目に書く
- 先手と後手は交互に書くが，既に書かれているマス目には書けない
- 縦か横か斜めのどこかに自分の印を先に揃えた方が勝ち
(どちらも揃えられないときは，引き分け)

×	○	×
×	○	○
○	×	×

質問

三目並べで「先手が必ず勝てる」や「後手が必ず勝てる」という命題をどのように書いたらよいか？

後出しジャンケン

- ジャンケンで相手が出した手を見てから，自分の手が出せるとする
- 必ず勝てる

画像 http://www.nikoli.com/blog/juno/index.php?id=08070002

後出しジャンケン

- ジャンケンで相手が出した手を見てから，自分の手が出せるとする
- 必ず勝てる

画像 http://www.nikoli.com/blog/juno/index.php?id=08070002

後出しジャンケン

- ジャンケンで相手が出した手を見てから，自分の手が出せるとする
- 必ず勝てる

画像 http://www.nikoli.com/blog/juno/index.php?id=08070002

後出しジャンケン

- ジャンケンで相手が出した手を見てから，自分の手が出せるとする
- 必ず勝てる

質問

後出しジャンケンで「自分が必ず勝てる」という命題をどのように書いたらよいか？

画像 http://www.nikoli.com/blog/juno/index.php?id=08070002

目次

次の文の真偽は？

この文は真か偽か？

n は素数である

真偽は n の具体的な値によって異なる

次の文の真偽は？

この文は真か偽か？

n は素数である

真偽は n の具体的な値によって異なる

- $n = 2$：「2 は素数である」　真

次の文の真偽は？

この文は真か偽か？

n は素数である

真偽は n の具体的な値によって異なる

- $n = 2$：「2 は素数である」 真
- $n = 3$：「3 は素数である」 真

次の文の真偽は？

この文は真か偽か？

n は素数である

真偽は n の具体的な値によって異なる

- $n = 2$：「2 は素数である」 真
- $n = 3$：「3 は素数である」 真
- $n = 4$：「4 は素数である」 偽

次の文の真偽は？

この文は真か偽か？

n は素数である

真偽は n の具体的な値によって異なる

- $n = 2$：「2 は素数である」 真
- $n = 3$：「3 は素数である」 真
- $n = 4$：「4 は素数である」 偽
- $n = 5$：「5 は素数である」 真

次の文の真偽は？

この文は真か偽か？

n は素数である

真偽は n の具体的な値によって異なる

- $n = 2$：「2 は素数である」 真
- $n = 3$：「3 は素数である」 真
- $n = 4$：「4 は素数である」 偽
- $n = 5$：「5 は素数である」 真
- $n = 6$：「6 は素数である」 偽

次の文の真偽は？

この文は真か偽か？

n は素数である

真偽は n の具体的な値によって異なる

- $n = 2$：「2 は素数である」 真
- $n = 3$：「3 は素数である」 真
- $n = 4$：「4 は素数である」 偽
- $n = 5$：「5 は素数である」 真
- $n = 6$：「6 は素数である」 偽
- $n = 7$：「7 は素数である」 真

次の文の真偽は？

この文は真か偽か？

n は素数である

真偽は n の具体的な値によって異なる

- $n = 2$：「2 は素数である」 真
- $n = 3$：「3 は素数である」 真
- $n = 4$：「4 は素数である」 偽
- $n = 5$：「5 は素数である」 真
- $n = 6$：「6 は素数である」 偽
- $n = 7$：「7 は素数である」 真
- $n = 8$：「8 は素数である」 偽

次の文の真偽は？

この文は真か偽か？

n は素数である

真偽は n の具体的な値によって異なる

- $n = 2$：「2 は素数である」 真
- $n = 3$：「3 は素数である」 真
- $n = 4$：「4 は素数である」 偽
- $n = 5$：「5 は素数である」 真
- $n = 6$：「6 は素数である」 偽
- $n = 7$：「7 は素数である」 真
- $n = 8$：「8 は素数である」 偽
- $\cdots$

命題関数

命題関数とは？（常識に基づく定義）

命題関数とは，変数を具体的な値に定めると真偽が定まる文

例：$P(n) =$「n は素数である」　　(ただし，$n \in \mathbb{N}$ (n は自然数))

命題関数

命題関数とは？（常識に基づく定義）

命題関数とは，変数を具体的な値に定めると真偽が定まる文

例：$P(n) =$「n は素数である」 （ただし，$n \in \mathbb{N}$ (n は自然数))

- $n = 2$：$P(2) =$「2 は素数である」 真

命題関数

命題関数とは？（常識に基づく定義）

命題関数とは，変数を具体的な値に定めると真偽が定まる文

例：$P(n) =$「n は素数である」　（ただし，$n \in \mathbb{N}$（n は自然数））

- $n = 2$：$P(2) =$「2 は素数である」　真
- $n = 3$：$P(3) =$「3 は素数である」　真
- $n = 4$：$P(4) =$「4 は素数である」　偽
- $n = 5$：$P(5) =$「5 は素数である」　真
- $n = 6$：$P(6) =$「6 は素数である」　偽
- $n = 7$：$P(7) =$「7 は素数である」　真
- $n = 8$：$P(8) =$「8 は素数である」　偽
- $\cdots$

命題関数：別の例

$Q(x, y) =$「$x + y = 6$ である」（ただし，$x \in \mathbb{R}$ かつ $y \in \mathbb{R}$ (x, y は実数))

命題関数：別の例

$Q(x, y) =$「$x + y = 6$ である」（ただし，$x \in \mathbb{R}$ かつ $y \in \mathbb{R}$ (x, y は実数))

- $x = 2,\ y = 4$： $Q(2, 4) =$「$2 + 4 = 6$ である」 真

命題関数：別の例

$Q(x, y) =$「$x + y = 6$ である」（ただし，$x \in \mathbb{R}$ かつ $y \in \mathbb{R}$ (x, y は実数))

- $x = 2,\ y = 4$： $Q(2, 4) =$ 「$2 + 4 = 6$ である」 真
- $x = 8,\ y = -2$： $Q(8, -2) =$ 「$8 + (-2) = 6$ である」 真

命題関数：別の例

$Q(x,y) =$「$x+y=6$ である」（ただし，$x \in \mathbb{R}$ かつ $y \in \mathbb{R}$ (x,y は実数)）

- $x=2$, $y=4$： $Q(2,4) =$ 「$2+4=6$ である」 真
- $x=8$, $y=-2$： $Q(8,-2) =$ 「$8+(-2)=6$ である」 真
- $x=5$, $y=9$： $Q(5,9) =$ 「$5+9=6$ である」 偽

命題関数：別の例

$Q(x,y) =$「$x+y=6$ である」（ただし，$x \in \mathbb{R}$ かつ $y \in \mathbb{R}$ (x, y は実数)）

- $x=2,\ y=4$： $Q(2,4) =$ 「$2+4=6$ である」 真
- $x=8,\ y=-2$： $Q(8,-2) =$ 「$8+(-2)=6$ である」 真
- $x=5,\ y=9$： $Q(5,9) =$ 「$5+9=6$ である」 偽
- $x=\frac{21}{4},\ y=\frac{3}{4}$： $Q(\frac{21}{4},\frac{3}{4}) =$ 「$\frac{21}{4}+\frac{3}{4}=6$ である」 真

命題関数：別の例

$Q(x,y) =$「$x+y=6$ である」（ただし，$x \in \mathbb{R}$ かつ $y \in \mathbb{R}$ (x, y は実数)）

- $x=2,\ y=4$： $Q(2,4) =$「$2+4=6$ である」 真
- $x=8,\ y=-2$： $Q(8,-2) =$「$8+(-2)=6$ である」 真
- $x=5,\ y=9$： $Q(5,9) =$「$5+9=6$ である」 偽
- $x=\frac{21}{4},\ y=\frac{3}{4}$： $Q(\frac{21}{4},\frac{3}{4}) =$「$\frac{21}{4}+\frac{3}{4}=6$ である」 真
- $x=0,\ y=6$： $Q(0,6) =$「$0+6=6$ である」 真

命題関数：別の例

$Q(x,y) =$「$x + y = 6$ である」（ただし，$x \in \mathbb{R}$ かつ $y \in \mathbb{R}$ (x, y は実数)）

- $x = 2$, $y = 4$： $Q(2,4) =$「$2 + 4 = 6$ である」 真
- $x = 8$, $y = -2$： $Q(8,-2) =$「$8 + (-2) = 6$ である」 真
- $x = 5$, $y = 9$： $Q(5,9) =$「$5 + 9 = 6$ である」 偽
- $x = \frac{21}{4}$, $y = \frac{3}{4}$： $Q(\frac{21}{4}, \frac{3}{4}) =$「$\frac{21}{4} + \frac{3}{4} = 6$ である」 真
- $x = 0$, $y = 6$： $Q(0,6) =$「$0 + 6 = 6$ である」 真
- $x = -4.5$, $y = 9.2$： $Q(-4.5, 9.2) =$「$(-4.5) + 9.2 = 6$ である」 偽
- $\cdots$

命題関数：別の例 (2)

$R(x, y) =$「x 県の県庁は y 市にある」　(ただし，x は県名，y は市名)

- $x =$ 石川, $y =$ 金沢：$R($石川, 金沢$) =$「石川県の県庁は金沢市にある」
- $x =$ 埼玉, $y =$ 浦和：$R($埼玉, 浦和$) =$「埼玉県の県庁は浦和市にある」
- $x =$ 群馬, $y =$ 高崎：$R($群馬, 高崎$) =$「群馬県の県庁は高崎市にある」
- $x =$ 広島, $y =$ 広島：$R($広島, 広島$) =$「広島県の県庁は広島市にある」
- $x =$ 静岡, $y =$ 静岡：$R($静岡, 静岡$) =$「静岡県の県庁は静岡市にある」
- $x =$ 長野, $y =$ 松本：$R($長野, 松本$) =$「長野県の県庁は松本市にある」
- $x =$ 茨城, $y =$ 茨木：$R($茨城, 茨木$) =$「茨城県の県庁は茨木市にある」
- $x =$ 愛媛, $y =$ 松山：$R($愛媛, 松山$) =$「愛媛県の県庁は松山市にある」
- $\cdots$

命題関数：別の例 (2)

$R(x,y) =$「x 県の県庁は y 市にある」 (ただし，x は県名，y は市名)

- $x =$ 石川, $y =$ 金沢：$R($石川, 金沢$) =$「石川県の県庁は金沢市にある」 真
- $x =$ 埼玉, $y =$ 浦和：$R($埼玉, 浦和$) =$「埼玉県の県庁は浦和市にある」 偽
- $x =$ 群馬, $y =$ 高崎：$R($群馬, 高崎$) =$「群馬県の県庁は高崎市にある」 偽
- $x =$ 広島, $y =$ 広島：$R($広島, 広島$) =$「広島県の県庁は広島市にある」 真
- $x =$ 静岡, $y =$ 静岡：$R($静岡, 静岡$) =$「静岡県の県庁は静岡市にある」 真
- $x =$ 長野, $y =$ 松本：$R($長野, 松本$) =$「長野県の県庁は松本市にある」 偽
- $x =$ 茨城, $y =$ 茨木：$R($茨城, 茨木$) =$「茨城県の県庁は茨木市にある」 偽
- $x =$ 愛媛, $y =$ 松山：$R($愛媛, 松山$) =$「愛媛県の県庁は松山市にある」 真
- $\cdots$

目次

かつかつかつかつかつかつかつかつ

次のような命題関数を考える

$P(n) =$ **「n は正の数である」**

- **「2 は正の数であり，かつ，3 は正の数である」という命題は**

$$P(2) \land P(3)$$

と書ける

かつかつかつかつかつかつかつかつ

次のような命題関数を考える

$P(n) =$「n は正の数である」

- 「2 は正の数であり，かつ，3 は正の数である」という命題は

$$P(2) \wedge P(3)$$

と書ける

- 「1 以上 30 未満の自然数はどれも正の数である」という命題は

$$P(1) \wedge P(2) \wedge P(3) \wedge P(4) \wedge P(5) \wedge P(6) \wedge P(7) \wedge P(8) \wedge \\ P(9) \wedge P(10) \wedge P(11) \wedge P(12) \wedge P(13) \wedge P(14) \wedge P(15) \wedge \\ P(16) \wedge P(17) \wedge P(18) \wedge P(19) \wedge P(20) \wedge P(21) \wedge P(22) \wedge \\ P(23) \wedge P(24) \wedge P(25) \wedge P(26) \wedge P(27) \wedge P(28) \wedge P(29)$$

と書ける (が，書きたくない)

全称記号

先ほどの書きたくない命題は次のようにも書く

$$\forall\ n \in A\ (P(n))$$

ただし，$A = \{1, 2, \ldots, 29\}$

- これは「すべての $n \in A$ に対して $P(n)$」という意味
- 「任意の $n \in A$ に対して $P(n)$」とも読む

- 「$\forall$」は全称記号と呼ばれる
- 「$\forall$」を使うことの意義
  - 「$\wedge$」を並べれば書けるが，それが面倒であるとき有効
  - 「$\wedge$」を並べて書けなくても「$\wedge$」を並べた意味を表現でき有効

全称記号：別の例

1. 「すべての自然数 n に対して，$2n+1$ は奇数である」という命題

$$\forall\ n \in \mathbb{N}\ (2n+1 \text{ は奇数である})$$

2. 「すべての実数 x に対して，x^2 は非負である」という命題

$$\forall\ x \in \mathbb{R}\ (x^2 \geq 0)$$

3. 「すべての実数 x に対して，$x \geq 1$ ならば $\frac{1}{x} \leq 1$」という命題

$$\forall\ x \in \mathbb{R}\ ((x \geq 1) \to (\frac{1}{x} \leq 1))$$

またはまたはまたはまたはまたはまたはまたはまたは

次のような命題関数を考える

$Q(n) =$「n は奇数である」

- 「2 は奇数である，または，3 は奇数である」という命題は

$$Q(2) \vee Q(3)$$

と書ける

またはまたはまたはまたはまたはまたはまたはまたは

次のような命題関数を考える

$Q(n) =$「n は奇数である」

- 「2 は奇数である，または，3 は奇数である」という命題は
$$Q(2) \vee Q(3)$$
と書ける
- 「1 以上 30 未満のある自然数は奇数である」という命題は
$$Q(1) \vee Q(2) \vee Q(3) \vee Q(4) \vee Q(5) \vee Q(6) \vee Q(7) \vee Q(8) \vee Q(9) \vee Q(10) \vee Q(11) \vee Q(12) \vee Q(13) \vee Q(14) \vee Q(15) \vee Q(16) \vee Q(17) \vee Q(18) \vee Q(19) \vee Q(20) \vee Q(21) \vee Q(22) \vee Q(23) \vee Q(24) \vee Q(25) \vee Q(26) \vee Q(27) \vee Q(28) \vee Q(29)$$
と書ける (が，書きたくない)

存在記号

先ほどの書きたくない命題は次のようにも書く

$$\exists\, n \in A\ (Q(n))$$

ただし，$A = \{1, 2, \ldots, 29\}$

- これは「ある $n \in A$ に対して $Q(n)$」という意味
- 「ある $n \in A$ が存在して $Q(n)$」とも読む

- 「$\exists$」は存在記号と呼ばれる
- 「$\exists$」を使うことの意義
  - 「$\vee$」を並べれば書けるが，それが面倒であるとき有効
  - 「$\vee$」を並べて書けなくても「$\vee$」を並べた意味を表現でき有効

存在記号：別の例

1. 「ある自然数 n に対して，$2n^2 - 1$ は素数である」という命題

$$\exists\, n \in \mathbb{N}\ (2n^2 - 1 \text{ は素数である})$$

2. 「ある実数 x に対して，x^2 は非正である」という命題

$$\exists\, x \in \mathbb{R}\ (x^2 \leq 0)$$

3. 「ある実数 x に対して，$x > 1$ ならば $x = 0$」という命題

$$\exists\, x \in \mathbb{R}\ ((x > 1) \to (x = 0))$$

全称命題と存在命題

一般的な記法

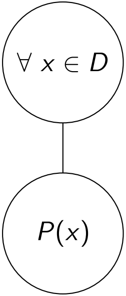
- 考える命題関数 $P(x)$ の変数 x が動く範囲を集合 D として定める (この集合を**議論領域**と呼ぶことがある)
- 「D のすべての要素 x に対して $P(x)$ となる」という命題を
$$\forall x \in D\ (P(x))$$
と表記する (この形の命題を**全称命題**と呼ぶ)
- 「D のある要素 x に対して $P(x)$ となる」という命題を
$$\exists x \in D\ (P(x))$$
と表記する (この形の命題を**存在命題**と呼ぶ)

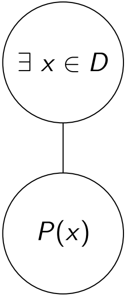
「$\forall x \in D\ \ P(x)$」,「$\forall x \in D : P(x)$」と書くこともある ($\exists$ も同様)

注意：全称命題も存在命題も真偽が (だいたい) 定まる

述語論理：文の構造

$$\forall\, x \in D\ (P(x)) \qquad\qquad \exists\, x \in D\ (P(x))$$





目次

全称命題の真理値：考え方

$D = \{a, b, c\}$ のとき

「$\forall\ x \in D\ (P(x))$」は「$P(a) \land P(b) \land P(c)$」と同値

$P(a)$	$P(b)$	$P(c)$	$P(a) \land P(b) \land P(c)$
T	T	T	T
T	T	F	F
T	F	T	F
T	F	F	F
F	T	T	F
F	T	F	F
F	F	T	F
F	F	F	F

全称命題の真理値

全称命題「$\forall\ x \in D\ (P(x))$」の真理値

- これが T であるのは，すべての $x \in D$ に対して $P(x)$ が T であるとき
- これが F であるのは，ある $x \in D$ に対して $P(x)$ が F であるとき

- 標語的に書くと (混乱するかもしれないけど)

$$\boxed{(\forall\ x \in D\ (P(x))) = \mathrm{T}} \Leftrightarrow \boxed{\forall\ x \in D\ (P(x) = \mathrm{T})}$$

$$\boxed{(\forall\ x \in D\ (P(x))) = \mathrm{F}} \Leftrightarrow \boxed{\exists\ x \in D\ (P(x) = \mathrm{F})}$$

- 便宜上，$D = \emptyset$ のときは常に

$$(\forall\ x \in \emptyset\ (P(x))) = \mathrm{T}$$

とする

先ほどの例：全称命題

- $P(n) =$「n は正の数である」，$A = \{1, 2, \ldots, 29\}$ として

$$\forall\ n \in A\ (P(n))$$

  を考える
- この論理式は「真」 (A の要素はどれも正の数)

存在命題の真理値：考え方

$D = \{a, b, c\}$ のとき

「$\exists\, x \in D\ (P(x))$」は「$P(a) \lor P(b) \lor P(c)$」と同値

$P(a)$	$P(b)$	$P(c)$	$P(a) \lor P(b) \lor P(c)$
T	T	T	T
T	T	F	T
T	F	T	T
T	F	F	T
F	T	T	T
F	T	F	T
F	F	T	T
F	F	F	F

存在命題の真理値

存在命題「$\exists\, x \in D\ (P(x))$」の真理値

- これが T であるのは，ある $x \in D$ に対して $P(x)$ が T であるとき
- これが F であるのは，すべての $x \in D$ に対して $P(x)$ が F であるとき

- 標語的に書くと (混乱するかもしれないけど)

$$\boxed{(\exists\, x \in D\ (P(x))) = \mathrm{T}} \Leftrightarrow \boxed{\exists\, x \in D\ (P(x) = \mathrm{T})}$$

$$\boxed{(\exists\, x \in D\ (P(x))) = \mathrm{F}} \Leftrightarrow \boxed{\forall\, x \in D\ (P(x) = \mathrm{F})}$$

- 便宜上，$D = \emptyset$ のときは常に

$$(\exists\, x \in \emptyset\ (P(x))) = \mathrm{F}$$

とする

先ほどの例：存在命題

- $Q(n) =$ 「n は奇数」，$A = \{1, 2, \ldots, 29\}$ として

$$\exists\, n \in A\ (Q(n))$$

  を考える
- この論理式は「真」 (A の中に奇数が存在する)

別の例

$A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$ とする

- $\forall\, n \in A$ (n は自然数である) 真

別の例

$A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$ とする

- $\forall\, n \in A$ (n は自然数である) 真
- $\forall\, n \in A$ (n は偶数である) 偽

別の例

$A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$ **とする**

- $\forall\ n \in A$ (n **は自然数である**) **真**
- $\forall\ n \in A$ (n **は偶数である**) **偽**
- $\exists\ n \in A$ (n **は偶数である**) **真**

別の例

$A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$ とする

- $\forall\ n \in A\ (n$ は自然数である$)$ 真
- $\forall\ n \in A\ (n$ は偶数である$)$ 偽
- $\exists\ n \in A\ (n$ は偶数である$)$ 真
- $\exists\ n \in A\ (n$ は自然数である$)$ 真

別の例

$A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$ とする

- $\forall\, n \in A$ (n は自然数である) 真
- $\forall\, n \in A$ (n は偶数である) 偽
- $\exists\, n \in A$ (n は偶数である) 真
- $\exists\, n \in A$ (n は自然数である) 真
- $\exists\, n \in A$ (n は素数である) 真

別の例

$A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$ **とする**

- $\forall\ n \in A$ (n **は自然数である**) **真**
- $\forall\ n \in A$ (n **は偶数である**) **偽**
- $\exists\ n \in A$ (n **は偶数である**) **真**
- $\exists\ n \in A$ (n **は自然数である**) **真**
- $\exists\ n \in A$ (n **は素数である**) **真**
- $\exists\ n \in A$ (n **は負の数である**) **偽**

命題関数に現れる変数が増えると…

次のような文の真偽は？

- すべての自然数 n に対して，$m+n$ は偶数である．
- ある自然数 n が存在して，$m+n$ は偶数である．

これらの文の真偽は m が何であるかに依存する (「命題」ではない)

$P(m,n) =$「$m+n$ は偶数である」とすると

これらの文は次のように書ける

- $\forall\, n \in \mathbb{N}\ (P(m,n))$
- $\exists\, n \in \mathbb{N}\ (P(m,n))$

自由変数と束縛変数

先ほどの例

- $\forall\, n \in \mathbb{N}\ (P(m, n))$
- $\exists\, n \in \mathbb{N}\ (P(m, n))$

これらの文において

- m **は自由変数 (対応する全称記号，存在記号が出てこない)**
- n **は束縛変数 (対応する全称記号，存在記号が出てくる)**

自由変数がない場合，その文の真偽は (だいたい) **定まる**

自由変数と束縛変数

先ほどの例

- $\forall\, n \in \mathbb{N}\ (P(m, n))$
- $\exists\, n \in \mathbb{N}\ (P(m, n))$

これらの文において

- m **は自由変数 (対応する全称記号，存在記号が出てこない)**
- n **は束縛変数 (対応する全称記号，存在記号が出てくる)**

自由変数がない場合，その文の真偽は (だいたい) 定まる

述語論理式

述語論理式とは？（常識に基づく定義）

述語論理式とは，

- 命題関数，
- 命題の演算 $\neg$，$\wedge$，$\vee$，$\rightarrow$，$\leftrightarrow$，
- 全称記号 $\forall$，存在記号 $\exists$（とそれに伴う「$x \in D$」のような記法）

を意味を成すように組み合わせたもの

述語論理式の例：D を議論領域，$P(x, y)$，$Q(x, y, z)$ を命題関数として

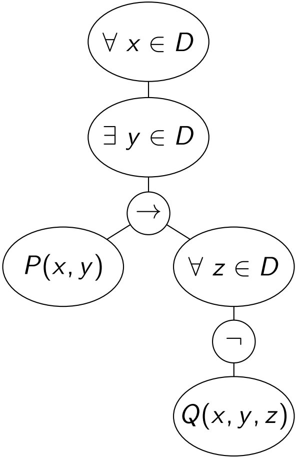
- $\forall\, x \in D\ (\exists\, y \in D\ (P(x, y) \rightarrow \forall\, z \in D\ (\neg Q(x, y, z))))$

閉論理式と開論理式とは？

- **閉論理式**：自由変数を持たない述語論理式　（真偽は (だいたい) 定まる）
- **開論理式**：自由変数を持つ述語論理式　（真偽は定まらない）

述語論理式：構造

$$\forall\ x \in D\ (\exists\ y \in D\ (P(x,y) \to \forall\ z \in D\ (\neg Q(x,y,z))))$$



次の閉論理式の真偽は？

次の閉論理式の真偽は？

1. $\forall\, m \in \mathbb{N}\ (\forall\, n \in \mathbb{N}\ (m + n$ は偶数である$))$
2. $\exists\, m \in \mathbb{N}\ (\forall\, n \in \mathbb{N}\ (m + n$ は偶数である$))$
3. $\forall\, m \in \mathbb{N}\ (\exists\, n \in \mathbb{N}\ (m + n$ は偶数である$))$
4. $\exists\, m \in \mathbb{N}\ (\exists\, n \in \mathbb{N}\ (m + n$ は偶数である$))$

いきなり考えるのは難しいので

$\mathbb{N}$ ではなく有限集合の場合を考える

$\mathbb{N}$ の場合の証明は次回考える

次の閉論理式の真偽は？ 有限バージョン

次の閉論理式の真偽は？

1. $\forall\ m \in \{1,2\}\ (\forall\ n \in \{1,2\}\ (m+n$ **は偶数である**$))$
2. $\exists\ m \in \{1,2\}\ (\forall\ n \in \{1,2\}\ (m+n$ **は偶数である**$))$
3. $\forall\ m \in \{1,2\}\ (\exists\ n \in \{1,2\}\ (m+n$ **は偶数である**$))$
4. $\exists\ m \in \{1,2\}\ (\exists\ n \in \{1,2\}\ (m+n$ **は偶数である**$))$

復習

「$\forall$」は「$\wedge$」みたいで，「$\exists$」は「$\vee$」みたい

次の閉論理式の真偽は？ 有限バージョン (1)

次の 3 つは同値

- $\forall\ m \in \{1,2\}\ (\forall\ n \in \{1,2\}\ (m+n$ **は偶数である**$))$

次の閉論理式の真偽は？ 有限バージョン (1)

次の 3 つは同値

- $\forall\, m \in \{1,2\}\ (\forall\, n \in \{1,2\}\ (m+n$ **は偶数である**$))$
- $\forall\, m \in \{1,2\}\ ($「$m+1$ **は偶数である**」$\land$「$m+2$ **は偶数である**」$)$

次の閉論理式の真偽は？ 有限バージョン (1)

次の 3 つは同値

- $\forall\ m \in \{1, 2\}\ (\forall\ n \in \{1, 2\}\ (m + n$ **は偶数である**$))$
- $\forall\ m \in \{1, 2\}\ ($「$m + 1$ **は偶数である**」$\wedge$「$m + 2$ **は偶数である**」$)$
- $($「$1 + 1$ **は偶数である**」$\wedge$「$1 + 2$ **は偶数である**」$) \wedge$
  $($「$2 + 1$ **は偶数である**」$\wedge$「$2 + 2$ **は偶数である**」$)$

次の閉論理式の真偽は？ 有限バージョン (1)

次の 3 つは同値

- $\forall\, m \in \{1,2\}\ (\forall\, n \in \{1,2\}\ (m+n$ **は偶数である**$))$
- $\forall\, m \in \{1,2\}\ ($「$m+1$ **は偶数である**」$\land$「$m+2$ **は偶数である**」$)$
- $($「$1+1$ **は偶数である**」$\land$「$1+2$ **は偶数である**」$)\ \land$
  $($「$2+1$ **は偶数である**」$\land$「$2+2$ **は偶数である**」$)$

- **これは**「$(\mathrm{T} \land \mathrm{F}) \land (\mathrm{F} \land \mathrm{T})$」
- **つまり，これは** F (**偽**)

次の閉論理式の真偽は？ 有限バージョン (2)

次の 3 つは同値

- $\exists\ m \in \{1, 2\}\ (\forall\ n \in \{1, 2\}\ (m + n$ **は偶数である**$))$

次の閉論理式の真偽は？ 有限バージョン (2)

次の 3 つは同値

- $\exists\, m \in \{1,2\}\ (\forall\, n \in \{1,2\}\ (m+n$ **は偶数である**$))$
- $\exists\, m \in \{1,2\}\ ($「$m+1$ **は偶数である**」$\wedge$「$m+2$ **は偶数である**」$)$

次の閉論理式の真偽は？ 有限バージョン (2)

次の 3 つは同値

- $\exists\ m \in \{1,2\}\ (\forall\ n \in \{1,2\}\ (m+n$ **は偶数である**$))$
- $\exists\ m \in \{1,2\}\ ($**「**$m+1$ **は偶数である」**$\wedge$**「**$m+2$ **は偶数である」**$)$
- $($**「**$1+1$ **は偶数である」**$\wedge$**「**$1+2$ **は偶数である」**$)\ \vee$
  $($**「**$2+1$ **は偶数である」**$\wedge$**「**$2+2$ **は偶数である」**$)$

次の閉論理式の真偽は？ 有限バージョン (2)

次の 3 つは同値

- $\exists\ m \in \{1,2\}\ (\forall\ n \in \{1,2\}\ (m+n$ **は偶数である**$))$
- $\exists\ m \in \{1,2\}$ (「$m+1$ **は偶数である**」$\land$「$m+2$ **は偶数である**」)
- (「$1+1$ **は偶数である**」$\land$「$1+2$ **は偶数である**」) $\lor$
  (「$2+1$ **は偶数である**」$\land$「$2+2$ **は偶数である**」)

- **これは**「$(\mathrm{T} \land \mathrm{F}) \lor (\mathrm{F} \land \mathrm{T})$」
- **つまり，これは** F (**偽**)

次の閉論理式の真偽は？ 有限バージョン (3)

次の 3 つは同値

- $\forall\, m \in \{1, 2\}\ (\exists\, n \in \{1, 2\}\ (m + n$ **は偶数である**$))$

次の閉論理式の真偽は？ 有限バージョン (3)

次の 3 つは同値

- $\forall\, m \in \{1,2\}\ (\exists\, n \in \{1,2\}\ (m+n$ **は偶数である**$))$
- $\forall\, m \in \{1,2\}\ ($「$m+1$ **は偶数である**」$\vee$「$m+2$ **は偶数である**」$)$

次の閉論理式の真偽は？ 有限バージョン (3)

次の 3 つは同値

- $\forall\ m \in \{1, 2\}\ (\exists\ n \in \{1, 2\}\ (m + n$ **は偶数である**$))$
- $\forall\ m \in \{1, 2\}\ ($「$m + 1$ **は偶数である**」$\vee$「$m + 2$ **は偶数である**」$)$
- $($「$1 + 1$ **は偶数である**」$\vee$「$1 + 2$ **は偶数である**」$) \wedge$
  $($「$2 + 1$ **は偶数である**」$\vee$「$2 + 2$ **は偶数である**」$)$

次の閉論理式の真偽は？ 有限バージョン (3)

次の 3 つは同値

- $\forall\ m \in \{1,2\}\ (\exists\ n \in \{1,2\}\ (m+n$ **は偶数である**$))$
- $\forall\ m \in \{1,2\}$ (「$m+1$ **は偶数である**」$\vee$「$m+2$ **は偶数である**」)
- (「$1+1$ **は偶数である**」$\vee$「$1+2$ **は偶数である**」) $\wedge$
  (「$2+1$ **は偶数である**」$\vee$「$2+2$ **は偶数である**」)

- **これは**「$(\mathrm{T} \vee \mathrm{F}) \wedge (\mathrm{F} \vee \mathrm{T})$」
- **つまり，これは** T (**真**)

次の閉論理式の真偽は？ 有限バージョン (4)

次の 3 つは同値

- $\exists\, m \in \{1,2\}\ (\exists\, n \in \{1,2\}\ (m+n$ **は偶数である**$))$

次の閉論理式の真偽は？ 有限バージョン (4)

次の 3 つは同値

- $\exists\ m \in \{1,2\}\ (\exists\ n \in \{1,2\}\ (m+n$ **は偶数である**$))$
- $\exists\ m \in \{1,2\}\ ($「$m+1$ **は偶数である**」$\vee$「$m+2$ **は偶数である**」$)$

次の閉論理式の真偽は？ 有限バージョン (4)

次の 3 つは同値

- $\exists\ m \in \{1, 2\}\ (\exists\ n \in \{1, 2\}\ (m + n$ **は偶数である**$))$
- $\exists\ m \in \{1, 2\}\ ($「$m + 1$ **は偶数である**」$\vee$「$m + 2$ **は偶数である**」$)$
- $($「$1 + 1$ **は偶数である**」$\vee$「$1 + 2$ **は偶数である**」$) \vee$
  $($「$2 + 1$ **は偶数である**」$\vee$「$2 + 2$ **は偶数である**」$)$

次の閉論理式の真偽は？ 有限バージョン (4)

次の 3 つは同値

- $\exists\ m \in \{1, 2\}\ (\exists\ n \in \{1, 2\}\ (m + n$ **は偶数である**$))$
- $\exists\ m \in \{1, 2\}$ (「$m + 1$ **は偶数である**」$\vee$「$m + 2$ **は偶数である**」)
- (「$1 + 1$ **は偶数である**」$\vee$「$1 + 2$ **は偶数である**」) $\vee$
  (「$2 + 1$ **は偶数である**」$\vee$「$2 + 2$ **は偶数である**」)

- **これは**「$(\mathrm{T} \vee \mathrm{F}) \vee (\mathrm{F} \vee \mathrm{T})$」
- **つまり，これは** T (**真**)

次の閉論理式の真偽は？ 有限バージョン：まとめ

次の閉論理式の真偽は？

1. $\forall\ m \in \{1,2\}\ (\forall\ n \in \{1,2\}\ (m+n$ **は偶数である**$))$ **偽**
2. $\exists\ m \in \{1,2\}\ (\forall\ n \in \{1,2\}\ (m+n$ **は偶数である**$))$ **偽**
3. $\forall\ m \in \{1,2\}\ (\exists\ n \in \{1,2\}\ (m+n$ **は偶数である**$))$ **真**
4. $\exists\ m \in \{1,2\}\ (\exists\ n \in \{1,2\}\ (m+n$ **は偶数である**$))$ **真**

復習

「$\forall$」は「$\wedge$」みたいで,「$\exists$」は「$\vee$」みたい

無限バージョンの真偽は次回以降 (のつもり)

変数のスコープ (作用域)

変数のスコープ

- 「$\forall\, x \in D\ (\cdots)$」の「$(\cdots)$」が x のスコープ
- 「$\exists\, x \in D\ (\cdots)$」の「$(\cdots)$」が x のスコープ

例

変数のスコープ (作用域)

変数のスコープ

- 「$\forall\ x \in D\ (\cdots)$」の「$(\cdots)$」が x のスコープ
- 「$\exists\ x \in D\ (\cdots)$」の「$(\cdots)$」が x のスコープ

例

- $\forall\ x \in D\ (\exists\ y \in D\ (P(x,y) \to \forall\ z \in D\ (\neg Q(x,y,z))))$

変数のスコープ (作用域)

変数のスコープ

- 「$\forall\, x \in D\ (\cdots)$」の「$(\cdots)$」が x のスコープ
- 「$\exists\, x \in D\ (\cdots)$」の「$(\cdots)$」が x のスコープ

例

- $\forall\, x \in D\ (\exists\, y \in D\ (P(x, y) \to \forall\, z \in D\ (\neg Q(x, y, z))))$

変数のスコープ (作用域)

変数のスコープ

- 「$\forall\, x \in D\ (\cdots)$」の「$(\cdots)$」が x のスコープ
- 「$\exists\, x \in D\ (\cdots)$」の「$(\cdots)$」が x のスコープ

例

- $\forall\, x \in D\ (\exists\, y \in D\ (P(x, y) \to \forall\, z \in D\ (\neg Q(x, y, z))))$

変数のスコープ (作用域)

変数のスコープ

- 「$\forall\, x \in D\ (\cdots)$」の「$(\cdots)$」が x のスコープ
- 「$\exists\, x \in D\ (\cdots)$」の「$(\cdots)$」が x のスコープ

例

- $\forall\, x \in D\ (\exists\, y \in D\ (P(x, y) \rightarrow \forall\, z \in D\ (\neg Q(x, y, z))))$

変数のスコープ (作用域)

変数のスコープ

- 「$\forall\, x \in D\ (\cdots)$」の「$(\cdots)$」が x のスコープ
- 「$\exists\, x \in D\ (\cdots)$」の「$(\cdots)$」が x のスコープ

例

- $\forall\, x \in D\ (\exists\, y \in D\ (P(x, y) \to \forall\, z \in D\ (\neg Q(x, y, z))))$
- $(\forall\, x \in D\ (P(x))) \vee (\forall\, x \in D\ (Q(x)))$

変数のスコープ (作用域)

変数のスコープ

- 「$\forall\, x \in D\ (\cdots)$」の「$(\cdots)$」が x のスコープ
- 「$\exists\, x \in D\ (\cdots)$」の「$(\cdots)$」が x のスコープ

例

- $\forall\, x \in D\ (\exists\, y \in D\ (P(x, y) \to \forall\, z \in D\ (\neg Q(x, y, z))))$
- $(\forall\, x \in D\ (P(x))) \vee (\forall\, x \in D\ (Q(x)))$

変数のスコープ (作用域)

変数のスコープ

- 「$\forall\, x \in D\ (\cdots)$」の「$(\cdots)$」が x のスコープ
- 「$\exists\, x \in D\ (\cdots)$」の「$(\cdots)$」が x のスコープ

例

- $\forall\, x \in D\ (\exists\, y \in D\ (P(x, y) \rightarrow \forall\, z \in D\ (\neg Q(x, y, z))))$
- $(\forall\, x \in D\ (P(x))) \vee (\forall\, x \in D\ (Q(x)))$

変数のスコープ (作用域)

変数のスコープ

- 「$\forall\, x \in D\ (\cdots)$」の「$(\cdots)$」が x のスコープ
- 「$\exists\, x \in D\ (\cdots)$」の「$(\cdots)$」が x のスコープ

例

- $\forall\, x \in D\ (\exists\, y \in D\ (P(x, y) \to \forall\, z \in D\ (\neg Q(x, y, z))))$
- $(\forall\, x \in D\ (P(x))) \vee (\forall\, x \in D\ (Q(x)))$
- $\forall\, x \in D\ (\exists\, y \in D\ (P(x) \wedge Q(y, z)))$

変数のスコープ (作用域)

変数のスコープ

- 「$\forall\, x \in D\ (\cdots)$」の「$(\cdots)$」が x のスコープ
- 「$\exists\, x \in D\ (\cdots)$」の「$(\cdots)$」が x のスコープ

例

- $\forall\, x \in D\ (\exists\, y \in D\ (P(x, y) \to \forall\, z \in D\ (\neg Q(x, y, z))))$
- $(\forall\, x \in D\ (P(x))) \vee (\forall\, x \in D\ (Q(x)))$
- $\forall\, x \in D\ (\exists\, y \in D\ (P(x) \wedge Q(y, z)))$

変数のスコープ (作用域)

変数のスコープ

- 「$\forall\, x \in D\ (\cdots)$」の「$(\cdots)$」が x のスコープ
- 「$\exists\, x \in D\ (\cdots)$」の「$(\cdots)$」が x のスコープ

例

- $\forall\, x \in D\ (\exists\, y \in D\ (P(x, y) \rightarrow \forall\, z \in D\ (\neg Q(x, y, z))))$
- $(\forall\, x \in D\ (P(x))) \vee (\forall\, x \in D\ (Q(x)))$
- $\forall\, x \in D\ (\exists\, y \in D\ (P(x) \wedge Q(y, z)))$

変数のスコープ (作用域)

変数のスコープ

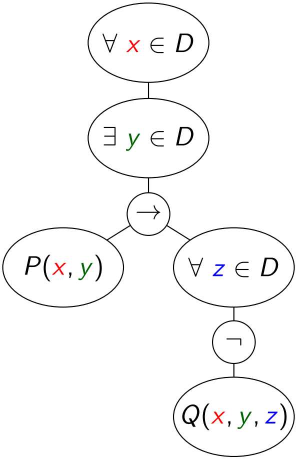
- 「$\forall\ x \in D\ (\cdots)$」の「$(\cdots)$」が x のスコープ
- 「$\exists\ x \in D\ (\cdots)$」の「$(\cdots)$」が x のスコープ

例

- $\forall\ x \in D\ (\exists\ y \in D\ (P(x, y) \to \forall\ z \in D\ (\neg Q(x, y, z))))$
- $(\forall\ x \in D\ (P(x))) \lor (\forall\ x \in D\ (Q(x)))$
- $\forall\ x \in D\ (\exists\ y \in D\ (P(x) \land Q(y, z)))$ (注：これは開論理式)

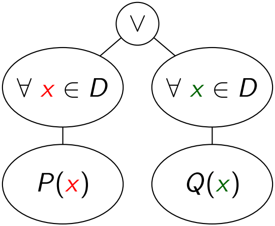
変数のスコープ (作用域)：構造 — 例 1

$$\forall\ x \in D\ (\exists\ y \in D\ (P(x, y) \to \forall\ z \in D\ (\neg Q(x, y, z))))$$



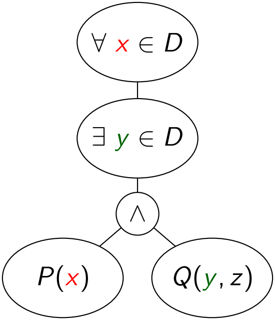
変数のスコープ (作用域)：構造 — 例 2

$$(\forall\ x \in D\ (P(x))) \vee (\forall\ x \in D\ (Q(x)))$$



変数のスコープ (作用域)：構造 — 例 3

$$\forall\, x \in D\ (\exists\, y \in D\ (P(x) \wedge Q(y, z)))$$



全称命題と存在命題：注意

注意

議論領域 D が明らかなときは,「$\in D$」を省いて書くこともある

つまり

- 全称命題は
$$\forall\, x\ (P(x))$$
- 存在命題は
$$\exists\, x\ (P(x))$$

と表記する

目次

後出しジャンケン (再掲)

- ジャンケンで相手が出した手を見てから，自分の手が出せるとする
- 必ず勝てる


質問

後出しジャンケンで「自分が必ず勝てる」という命題をどのように書いたらよいか？

画像 http://www.nikoli.com/blog/juno/index.php?id=08070002

後出しジャンケン：述語論理の視点から

質問

後出しジャンケンで「自分が必ず勝てる」という命題を
どのように書いたらよいか？

$H = \{$ グー, チョキ, パー $\}$ とすると

画像 http://www.nikoli.com/blog/juno/index.php?id=08070002

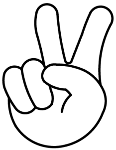
後出しジャンケン：述語論理の視点から

質問

後出しジャンケンで「自分が必ず勝てる」という命題をどのように書いたらよいか？

$H = \{$ グー, チョキ, パー $\}$ とすると

$$\forall\, x \in H \; (\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad)$$



画像 http://www.nikoli.com/blog/juno/index.php?id=08070002

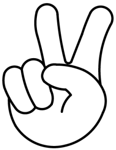
後出しジャンケン：述語論理の視点から

質問

後出しジャンケンで「自分が必ず勝てる」という命題を
どのように書いたらよいか？

$H = \{$ **グー**, **チョキ**, **パー** $\}$ **とすると**

$$\forall\, x \in H\ (\exists\, y \in H\ (\qquad\qquad\qquad))$$



画像 http://www.nikoli.com/blog/juno/index.php?id=08070002

後出しジャンケン：述語論理の視点から

質問

後出しジャンケンで「自分が必ず勝てる」という命題をどのように書いたらよいか？

$H = \{$ **グー**, **チョキ**, **パー** $\}$ **とすると**

$$\forall\, x \in H\ (\exists\, y \in H\ (y \text{ は } x \text{ に勝つ}))$$

画像 http://www.nikoli.com/blog/juno/index.php?id=08070002

三目並べ (ちょっとルール変更)

3×3 のマス目の上で行うゲーム

- 先手は「×」をマス目に書く
- 後手は「○」をマス目に書く
- 先手と後手は交互に書くが，既に書かれているマス目には書けない
- マス目が全部埋まったときに，先手は一列揃えたい
- それができれば先手の勝ち，できなければ後手の勝ち

×	○	×
×	○	○
○	×	×

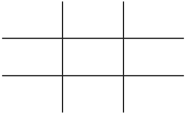
質問

三目並べで「先手が必ず勝てる」や「後手が必ず勝てる」という命題をどのように書いたらよいか？

三目並べ (ちょっとルール変更)：述語論理の視点から

質問

三目並べで「先手が必ず勝てる」という命題をどう書いたらよいか？

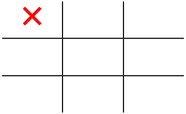


三目並べ (ちょっとルール変更)：述語論理の視点から

質問

三目並べで「先手が必ず勝てる」という命題をどう書いたらよいか？

$\exists a(\qquad)$

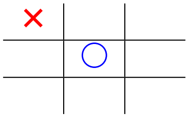


三目並べ (ちょっとルール変更)：述語論理の視点から

質問

三目並べで「先手が必ず勝てる」という命題をどう書いたらよいか？

$$\exists a(\forall b(\qquad))$$

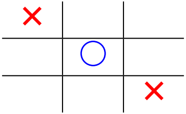


三目並べ (ちょっとルール変更)：述語論理の視点から

質問

三目並べで「先手が必ず勝てる」という命題をどう書いたらよいか？

$\exists a(\forall b(\exists c(\qquad)))$



三目並べ (ちょっとルール変更)：述語論理の視点から

質問

三目並べで「先手が必ず勝てる」という命題をどう書いたらよいか？

$$\exists a(\forall b(\exists c(\forall d(\qquad\qquad\qquad\qquad))))$$

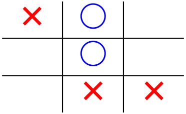
×	○	
	○	
		×

三目並べ (ちょっとルール変更)：述語論理の視点から

質問

三目並べで「先手が必ず勝てる」という命題をどう書いたらよいか？

$$\exists a(\forall b(\exists c(\forall d(\exists e(\qquad\qquad)))))$$



三目並べ (ちょっとルール変更)：述語論理の視点から

質問

三目並べで「先手が必ず勝てる」という命題をどう書いたらよいか？

$$\exists a(\forall b(\exists c(\forall d(\exists e(\forall f(\qquad))))))$$

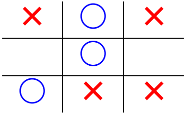
×	○	
	○	
○	×	×

三目並べ (ちょっとルール変更)：述語論理の視点から

質問

三目並べで「先手が必ず勝てる」という命題をどう書いたらよいか？

$$\exists a(\forall b(\exists c(\forall d(\exists e(\forall f(\exists g(\qquad)))))))$$



三目並べ (ちょっとルール変更)：述語論理の視点から

質問

三目並べで「先手が必ず勝てる」という命題をどう書いたらよいか？

$$\exists a(\forall b(\exists c(\forall d(\exists e(\forall f(\exists g(\forall h(\qquad\qquad))))))))$$

×	○	×
	○	○
○	×	×

三目並べ (ちょっとルール変更)：述語論理の視点から

質問

三目並べで「先手が必ず勝てる」という命題をどう書いたらよいか？

$$\exists a(\forall b(\exists c(\forall d(\exists e(\forall f(\exists g(\forall h(\exists i(\qquad\qquad)))))))))$$

×	○	×
×	○	○
○	×	×

三目並べ (ちょっとルール変更)：述語論理の視点から

質問

三目並べで「先手が必ず勝てる」という命題をどう書いたらよいか？

$$\exists a(\forall b(\exists c(\forall d(\exists e(\forall f(\exists g(\forall h(\exists i(\{a, c, e, g, i\} \text{ で一列占めている})))))))))$$

×	○	×
×	○	○
○	×	×

「∃ は自分，∀ は相手」

格言

「∀」「∃」が連なるときは，ゲームだと思うと分かりやすい

- ∃：自分の手番
- ∀：相手の手番

そう思って，以前の例を見てみる

次の閉論理式の真偽は？（再掲）

1. $\forall\ m \in \{1,2\}\ (\forall\ n \in \{1,2\}\ (m+n$ は偶数である$))$ 偽
2. $\exists\ m \in \{1,2\}\ (\forall\ n \in \{1,2\}\ (m+n$ は偶数である$))$ 偽
3. $\forall\ m \in \{1,2\}\ (\exists\ n \in \{1,2\}\ (m+n$ は偶数である$))$ 真
4. $\exists\ m \in \{1,2\}\ (\exists\ n \in \{1,2\}\ (m+n$ は偶数である$))$ 真

目次

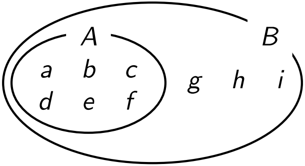
部分集合：直観

次の 2 つの集合を考える

- $A = \{a, b, c, d, e, f\}$
- $B = \{a, b, c, d, e, f, g, h, i\}$

A は B の部分集合

図に描いてみる
(「オイラー図」と呼ぶ)



部分集合とは？(直観)

集合 A が集合 B の部分集合であるとは，A が B に含まれていること

「含まれている」とは？ 論理を使って書くことを考える

部分集合：定義

部分集合とは？ (論理を使った定義)

A が B の部分集合であるとは，

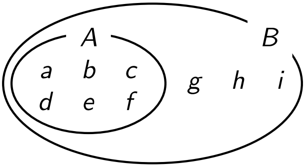
任意の x に対して，　$x \in A$ ならば $x \in B$

次の 2 つの集合を考える

- $A = \{a, b, c, d, e, f\}$
- $B = \{a, b, c, d, e, f, g, h, i\}$

A は B の部分集合

図に描いてみる



部分集合の表記法

A が B の部分集合であることを「$A \subseteq B$」と表記する

「$A \subset B$」や「$A \subseteqq B$」と表記することもある

例

表記法：復習

- $\mathbb{N}$ = すべての自然数からなる集合
- $\mathbb{Z}$ = すべての整数からなる集合
- $\mathbb{Q}$ = すべての有理数からなる集合
- $\mathbb{R}$ = すべての実数からなる集合
- $\mathbb{C}$ = すべての複素数からなる集合

- $\mathbb{N} \subseteq \mathbb{Z}$
- $\mathbb{Z} \subseteq \mathbb{Q}$
- $\mathbb{Q} \subseteq \mathbb{R}$
- $\mathbb{R} \subseteq \mathbb{C}$

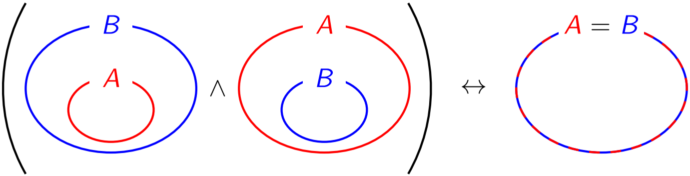
同じ集合

同じ集合

2 つの集合 A と B が同じであることを

$$A \subseteq B \text{ かつ } B \subseteq A$$

が成り立つことと定義し,「$A = B$」と表記する



目次

今日のまとめ

述語論理

- $\forall x\,(\cdots)$：すべての x に対して $\cdots$
- $\exists x\,(\cdots)$：ある x に対して $\cdots$

集合

- 部分集合の定義

述語論理：補足

疑問 ?: 恒真性の証明

なぜ述語論理の論理式は，その恒真性を真理値表で証明できないのか？

これにちゃんと答えるためには,「シンタックス」と「セマンティクス」など論理学の基盤・重要概念を学ぶ必要がある.

興味のある人は次のことばを調べてみる

- シンタックス (統語論) とセマンティクス (意味論)
- 述語論理における「解釈」
- 証明論とモデル理論

シンタックスとセマンティクスは自然言語処理，人工知能においても重要な概念

これは「論理学」の授業ではないので，これ以上深く立ち入らない

目次