離散数学 第 1 回
集合と論理 (1)：命題論理と集合

岡本 吉央

okamotoy@uec.ac.jp

電気通信大学

2013 年 4 月 9 日

最終更新：2013 年 4 月 8 日　09:32

概要

目標

離散数学を通して

- 数学における正しい用語法を身につけること
- 論理的な思考力を身につけること

なぜ？

- 数学は理工学の「言語」 $\rightsquigarrow$
正しい用語法の使用により，意志疎通が可能となる
(コミュニケーション)
- 思考は人間生活の「基礎」 $\rightsquigarrow$
論理的思考の活用により，豊かな生活が可能となる

スケジュール 前半 (予定)

1. 集合と論理 (1)：命題論理と集合 (4 月 9 日)
- ⋆ 休講 (健康診断) (4 月 16 日)
2. 集合と論理 (2)：述語論理と集合 (4 月 23 日)
3. 集合と論理 (3)：論理を使った証明 (第 1 ステップ) (4 月 30 日)
- ⋆ 休講 (国内出張) (5 月 7 日)
4. 集合と論理 (4)：論理を使った証明 (第 2 ステップ) (5 月 14 日)
5. 集合と論理 (5)：集合の演算など (5 月 21 日)
6. 対応と関数 (1)：対応と関数 (5 月 28 日)

注意：予定の変更もありうる

スケジュール 後半 (予定)

7. 対応と関数 (2)：像と逆像 (6 月 4 日)
8. 対応と関数 (3)：全射と単射 (6 月 11 日)
9. 関係 (1)：関係 (6 月 18 日)
- ⋆ 休講 (海外出張) (6 月 25 日)
10. 関係 (2)：同値関係 (7 月 2 日)
11. 関係 (3)：順序関係 (7 月 9 日)
12. 数学的帰納法 (1)：数学的帰納法と帰納的定義 (7 月 16 日)
13. 数学的帰納法 (2)：関係の閉包 (7 月 23 日)
- ⋆ 補講？ (7 月 30 日？)

注意：予定の変更もありうる

情報

教員

- 岡本 吉央 (おかもと よしお)
- 居室：西 4 号館 2 階 206
- E-mail：okamotoy@uec.ac.jp
- Web：http://dopal.cs.uec.ac.jp/okamotoy/

ティーチング・アシスタント (TA)

- 櫻井 亮佑 (さくらい りょうすけ)
- 居室：西 4 号館 5 階 502 (村松研究室)

講義資料

- Web：http://dopal.cs.uec.ac.jp/okamotoy/lect/2013/discretemath/
- 注意：資料の印刷等は各学生が自ら行う
- 講義前日の昼 12 時までに，ここに置かれる

講義資料

http://dopal.cs.uec.ac.jp/okamotoy/lect/2013/discretemath/

- スライド
- 印刷用スライド：8 枚のスライドを 1 ページに収めたもの
- 演習問題
- 用語集：よみがな，英訳付き

「印刷用スライド」と「演習問題」は各自印刷して持参すると便利

http://video.fp.uec.ac.jp/

- ビデオ

講義終了後，約 1 時間後に視聴可能

授業の進め方

講義 (70 分)
- スライドと板書で進める
- スライドのコピーに重要事項のメモを取る

演習 (20 分)
- 演習問題に取り組む
- 不明な点は教員とティーチング・アシスタントに質問する

退室 (0 分)
- 授業の感想，質問などを小さな紙に書いて提出 (匿名可)
- (感想，質問などの回答は講義の Web ページに掲載)

オフィスアワー：授業終了後
- 質問など

演習問題

演習問題の進め方

- 授業の後半 20 分は演習問題を解く時間
- 残った演習問題は復習・試験対策用
- 注意：「模範解答」のようなものは存在しない

演習問題の種類

- 復習問題：講義で取り上げた内容を反復
- 補足問題：講義で省略した内容を補足
- 追加問題：講義の内容に追加
- 発展問題：少し難しい (かもしれない)

解答の提出

- 演習問題の解答をレポートとして提出してもよい
- レポートは採点されない (成績に勘案されない)
- レポートは添削されて，返却される

評価

期末試験による

- 出題形式
  - 演習問題と同じ形式の問題を 6 題出題する
  - その中の 4 題は演習問題として提示されたものと同一である
    - ただし，発展問題は出題しない
  - 全問に解答する
- 配点：1 題 20 点満点，計 120 点満点
- 成績において，100 点以上は 100 点で打ち切り
- 時間：90 分 (おそらく)
- 持ち込み：A4 用紙 1 枚分 (裏表自筆書き込み) のみ可

格言

格言 (三省堂 大辞林)

短い言葉で、人生の真理や処世術などを述べ、教えや戒めとした言葉。「石の上にも三年」「沈黙は金」など。金言。

格言 (この講義における)

講義内容とは直接関係ないかもしれないが，
私 (岡本) が重要だと思うこと

格言 (の例)

単位取得への最短の道のりは，授業に出て，演習問題を解くこと

教科書・参考書

教科書

- 指定しない

全般的な参考書

- コミュニケーションとしての数学基礎を固められるもの
  - 嘉田勝,『論理と集合から始める数学の基礎』，日本評論社，2008 年
  - 渡辺治，木村泰紀，谷口雅治，北野晃朗,『数学の言葉と論理』，朝倉書店，2008 年
  - 中内伸光,『ろんりと集合』，日本評論社，2009 年
- 離散数学の入門書
  - 小倉久和,『はじめての離散数学』，近代科学社，2011 年
  - 石村園子,『やさしく学べる離散数学』，共立出版，2007 年
  - Seymour Lipschutz,『離散数学』，オーム社，1995 年
- 証明の書き方の入門書
  - 松井知己,『だれでも証明が書ける』，日本評論社，2010 年

注意

離散数学の教科書はそれぞれ扱う内容が異なる
(微分積分や線形代数のようにほとんどの本が同じ内容を扱う教科とは違う)

この講義の約束

- 私語はしない (ただし，演習時間の相談は OK)
- 携帯電話はマナーモードにする
- 携帯電話は使わない
- 音を立てて睡眠しない

約束が守られない場合は退席してもらう場合あり

今日の概要

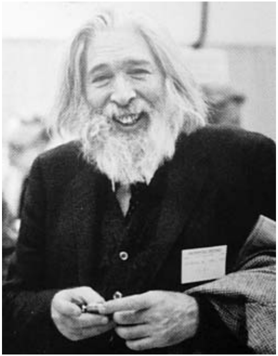
今日の目標

- 命題論理の基礎を思い出す：「論理設計論」の復習
- 集合の記法を思い出す：高校数学の復習
- 集合と論理が密接に関連していることを確認する

目次

『パズルランドのアリス』から

レイモンド・スマリヤン (著)，市場泰男 (訳)，『パズルランドのアリス』，ハヤカワ文庫，2004 年



http://www-groups.dcs.st-and.ac.uk/~history/PictDisplay/Smullyan.html

『パズルランドのアリス』の第 55 問

『パズルランドのアリス』第 2 巻，18–19 ページより

- 「こんどは論理の問題じゃ」と白の女王さまがいいました。
- 「赤の王さまが眠っていらっしゃるときは、
王さまが信じなさることはすべてまちがっている。
- つまり本当のことでないのじゃ。
- けれども、王さまが目を覚ましていらっしゃるときは、
信じなさることはすべて本当なのじゃ。
- さて、昨日の晩のぴったり十時に、赤の王さまは、
いまご自分も、また赤の女王さまも、眠っていると信じなさった。
- ではそのとき、赤の女王さまは、眠っていらっしゃったか、それとも
目をさましていらっしゃったか、どうじゃ？」

あとで，このパズルを解く

目次

命題と真偽

命題とは？（常識に基づいた定義）

真偽を定められる文，あるいは，その内容

例：トランプでゲームをしているような状況で

- 「一郎はハートの 4 を持っている」
- 「二郎はクラブの Q を持っている」

命題であるか？ 命題ではないか？

- $\sqrt{2}$ は無理数である

命題であるか？ 命題ではないか？

- $\sqrt{2}$ は無理数である 真○

命題であるか？ 命題ではないか？

- $\sqrt{2}$ は無理数である　真○
- 2013 年 4 月 9 日は月曜日である

命題であるか？ 命題ではないか？

- $\sqrt{2}$ は無理数である 真○
- 2013 年 4 月 9 日は月曜日である 偽○

命題であるか？ 命題ではないか？

- $\sqrt{2}$ は無理数である　　真○
- 2013 年 4 月 9 日は月曜日である　　偽○
- 2013 年は戌年ですか？

命題であるか？ 命題ではないか？

- $\sqrt{2}$ は無理数である　　真○
- 2013 年 4 月 9 日は月曜日である　　偽○
- 2013 年は戌年ですか？　　×

命題であるか？ 命題ではないか？

- $\sqrt{2}$ は無理数である 真○
- 2013 年 4 月 9 日は月曜日である 偽○
- 2013 年は戌年ですか？ ×
- 2013 年は戌年です

命題であるか？ 命題ではないか？

- $\sqrt{2}$ は無理数である 真○
- 2013 年 4 月 9 日は月曜日である 偽○
- 2013 年は戌年ですか？ ×
- 2013 年は戌年です 偽○

命題であるか？ 命題ではないか？

- $\sqrt{2}$ は無理数である 真○
- 2013 年 4 月 9 日は月曜日である 偽○
- 2013 年は戌年ですか？ ×
- 2013 年は戌年です 偽○
- やったー！

命題であるか？ 命題ではないか？

- $\sqrt{2}$ は無理数である 真◯
- 2013 年 4 月 9 日は月曜日である 偽◯
- 2013 年は戌年ですか？ ×
- 2013 年は戌年です 偽◯
- やったー！ ×

命題であるか？ 命題ではないか？

- $\sqrt{2}$ は無理数である　真○
- 2013 年 4 月 9 日は月曜日である　偽○
- 2013 年は戌年ですか？　×
- 2013 年は戌年です　偽○
- やったー！　×
- ワールドカップへの切符を手に入れます！

命題であるか？ 命題ではないか？

- $\sqrt{2}$ は無理数である　真○
- 2013 年 4 月 9 日は月曜日である　偽○
- 2013 年は戌年ですか？　×
- 2013 年は戌年です　偽○
- やったー！　×
- ワールドカップへの切符を手に入れます！　×

命題であるか？ 命題ではないか？

- $\sqrt{2}$ は無理数である　真○
- 2013 年 4 月 9 日は月曜日である　偽○
- 2013 年は戌年ですか？　×
- 2013 年は戌年です　偽○
- やったー！　×
- ワールドカップへの切符を手に入れます！　×
- 調布市は広い

命題であるか？ 命題ではないか？

- $\sqrt{2}$ は無理数である　真〇
- 2013 年 4 月 9 日は月曜日である　偽〇
- 2013 年は戌年ですか？　×
- 2013 年は戌年です　偽〇
- やったー！　×
- ワールドカップへの切符を手に入れます！　×
- 調布市は広い　×

真偽の表現いろいろ

真理値とは？

「真」か「偽」という値

真	偽
true	false
T	F
1	0

以降,「真と偽」か「T と F」を用いていく

目次

記号論理

命題変数 (常識に基づいた定義)

命題を記号で表したもの

例：トランプでゲームをしているような状況で

- $P =$「一郎はハートの 4 を持っている」
- $Q =$「二郎はクラブの Q を持っている」

命題から別の命題を得ること

例

- 2 つの命題
  - P = 「一郎はハートの 4 を持っている」
  - Q = 「二郎はクラブの Q を持っている」

  の真偽から，次の命題
  - 「一郎はハートの 4 を持っていない」
  - 「一郎と二郎のどちらかはクラブの Q を持っている」

  の真偽は決定される
- つまり，
  命題から別の命題が得られ，その真偽が決まることがある

今からやること

そのような「別の命題の得られ方」と「その真偽の決まり方」を見る

否定

否定 (常識に基づいた定義)

命題 P の**否定**とは，P の真偽を反転させた命題「$\neg P$」と表記する

「$\neg P$」を「$\sim P$」,「$\overline{P}$」とも表記する

P	$\neg P$
T	F
F	T

例

- $P =$「一郎はハートの 4 を持っている」のとき
- $\neg P =$ 「一郎はハートの 4 を持っていない」

連言

連言 (常識に基づいた定義)

命題 P と Q の**連言**とは，P と Q がともに真であるとき，そのときのみ真である命題.「$P \wedge Q$」と表記する

「連言」を「論理積」,「AND」ともいう

P	Q	$P \wedge Q$
T	T	T
T	F	F
F	T	F
F	F	F

例

- $P =$「一郎はハートの 4 を持っている」
- $Q =$「二郎はクラブの Q を持っている」のとき
- $P \wedge Q =$ 「一郎はハートの 4 を持っていて，**かつ**，二郎はクラブの Q を持っている」

選言

選言 (常識に基づいた定義)

命題 P と Q の**選言**とは，P か Q が真であるとき，そのときのみ真である命題.「$P \vee Q$」と表記する

「選言」を「論理和」,「OR」ともいう

P	Q	$P \vee Q$
T	T	T
T	F	T
F	T	T
F	F	F

例

- $P =$「一郎はハートの 4 を持っている」
- $Q =$「二郎はクラブの Q を持っている」のとき
- $P \vee Q =$ 「一郎がハートの 4 を持っているか，**または**，二郎がクラブの Q を持っている」

含意

含意 (常識に基づいた定義)

命題 P から Q への**含意**とは，P が真，Q が偽であるとき，そのときのみ偽である命題.「$P \to Q$」と表記する

「$P \to Q$」を「$P \supset Q$」とも書く

P	Q	$P \to Q$
T	T	T
T	F	F
F	T	T
F	F	T

例

- $P =$「一郎はハートの 4 を持っている」
- $Q =$「二郎はクラブの Q を持っている」のとき
- $P \to Q =$ 「一郎がハートの 4 を持っている**ならば**，二郎はクラブの Q を持っている」

同値

同値 (常識に基づいた定義)

命題 P と Q の**同値**とは，P と Q の真理値が等しいとき，そのときのみ真である命題．「$P \leftrightarrow Q$」と表記する

「$P \leftrightarrow Q$」を「$P \equiv Q$」とも書く

P	Q	$P \leftrightarrow Q$
T	T	T
T	F	F
F	T	F
F	F	T

例

- $P =$「一郎はハートの 4 を持っている」
- $Q =$「二郎はクラブの Q を持っている」のとき
- $P \leftrightarrow Q =$ 「一郎がハートの 4 を持っている**とき，そのときに限り**，二郎はクラブの Q を持っている」

日本語との対応：例

否定：$\neg P$

- P ではない

連言：$P \wedge Q$

- P かつ Q
- P であり，同時に，Q でもある

選言：$P \vee Q$

- P または Q
- P あるいは Q
- P であるか，そうでなければ，Q である

含意：$P \rightarrow Q$

- P ならば Q
- P であるとき，Q でなければならない

同値：$P \leftrightarrow Q$

- P であるとき，そのときに限り Q である
- P と Q は同値である

命題論理式

演算がいろいろあるので...

演算を組み合わせて，複雑な命題を表現できる

例：$(P \to \neg Q) \land \neg(\neg P \leftrightarrow (R \lor Q))$

命題論理式 (常識に基づく定義)

命題論理式とは，命題を表す変数 (命題変数) と命題の演算 $\neg$，$\land$，$\lor$，$\to$，$\leftrightarrow$ を意味を成すように組み合わせたもの
(命題論理式も命題を表す)

命題論理式でないものの例：$P \lor \land \lor Q$，$P \to (Q + R)$

命題論理式の読み方

格言

文や文章を読むときは構造を理解する　(数式も同様)

- **例**：$(P \to \neg Q) \wedge \neg(\neg P \leftrightarrow (R \vee Q))$

$$\boxed{(\ P \to \neg\ Q\ ) \wedge \neg (\ \neg\ P\ \leftrightarrow (\ R\ \vee\ Q\ )\ )}$$

- **他の例**：$\sin(\alpha+\beta) = \sin\alpha\cos\beta + \cos\alpha\sin\beta$

$$\boxed{\sin(\ \alpha + \beta\ ) = \ \sin\alpha\ \ \cos\beta\ + \ \cos\alpha\ \ \sin\beta}$$

命題論理式の読み方

格言

文や文章を読むときは構造を理解する **(数式も同様)**

- **例：** $(P \to \neg Q) \land \neg(\neg P \leftrightarrow (R \lor Q))$

$$\boxed{(\boxed{P \to \neg Q}) \land \boxed{\neg(\neg P \leftrightarrow (R \lor Q))}}$$

- **他の例：** $\sin(\alpha+\beta) = \sin\alpha\cos\beta + \cos\alpha\sin\beta$

$$\boxed{\sin(\alpha+\beta) = \sin\alpha\ \cos\beta + \cos\alpha\ \sin\beta}$$

命題論理式の読み方

格言

文や文章を読むときは構造を理解する **(数式も同様)**

- **例**：$(P \to \neg Q) \land \neg(\neg P \leftrightarrow (R \lor Q))$

$$\boxed{(\boxed{\boxed{P} \to \boxed{\neg\ Q}}) \land \boxed{\neg(\ \neg\ P\ \ \leftrightarrow(\ \ R\ \lor\ Q\ \ ))}}$$

- **他の例**：$\sin(\alpha + \beta) = \sin\alpha\cos\beta + \cos\alpha\sin\beta$

$$\boxed{\sin(\ \alpha + \beta\ ) = \ \sin\alpha \ \ \cos\beta \ \ + \ \ \cos\alpha \ \ \sin\beta}$$

命題論理式の読み方

格言

文や文章を読むときは構造を理解する　(数式も同様)

- **例**：$(P \to \neg Q) \land \neg(\neg P \leftrightarrow (R \lor Q))$

$$\boxed{(\boxed{\boxed{P} \to \boxed{\neg \boxed{Q}}}) \land \boxed{\neg (\neg P \leftrightarrow (R \lor Q))}}$$

- **他の例**：$\sin(\alpha + \beta) = \sin\alpha\cos\beta + \cos\alpha\sin\beta$

$$\boxed{\sin(\ \alpha + \beta\ ) = \ \sin\alpha\ \ \cos\beta\ + \ \cos\alpha\ \ \sin\beta}$$

命題論理式の読み方

格言

文や文章を読むときは構造を理解する　　(数式も同様)

- **例**：$(P \to \neg Q) \wedge \neg(\neg P \leftrightarrow (R \vee Q))$

$$\boxed{(\boxed{\boxed{P} \to \boxed{\neg \boxed{Q}}}) \wedge \boxed{\neg(\boxed{\neg\ P\ \leftrightarrow (\ R \vee Q\ )})}}$$

- **他の例**：$\sin(\alpha + \beta) = \sin\alpha\cos\beta + \cos\alpha\sin\beta$

$$\boxed{\sin(\ \alpha + \beta\ ) = \ \sin\alpha\ \ \cos\beta\ + \ \cos\alpha\ \ \sin\beta}$$

命題論理式の読み方

格言

文や文章を読むときは構造を理解する **(数式も同様)**

- **例：** $(P \to \neg Q) \wedge \neg(\neg P \leftrightarrow (R \vee Q))$

$$\boxed{(\boxed{\boxed{P} \to \boxed{\neg\boxed{Q}}}) \wedge \boxed{\neg(\boxed{\boxed{\neg P} \leftrightarrow (\boxed{R \vee Q})})}}$$

- **他の例：** $\sin(\alpha + \beta) = \sin\alpha\cos\beta + \cos\alpha\sin\beta$

$$\boxed{\sin(\ \alpha + \beta\ ) = \ \sin\alpha\ \ \cos\beta\ + \ \cos\alpha\ \ \sin\beta}$$

命題論理式の読み方

格言

文や文章を読むときは構造を理解する　　(数式も同様)

- **例**：$(P \to \neg Q) \land \neg(\neg P \leftrightarrow (R \lor Q))$

$$\boxed{(\boxed{\boxed{P} \to \boxed{\neg \boxed{Q}}}) \land \boxed{\neg(\boxed{\boxed{\neg \boxed{P}} \leftrightarrow (\boxed{R \lor Q})})}}$$

- **他の例**：$\sin(\alpha + \beta) = \sin\alpha\cos\beta + \cos\alpha\sin\beta$

$$\boxed{\sin(\ \alpha + \beta\ ) = \ \sin\alpha\ \ \cos\beta\ \ +\ \ \cos\alpha\ \ \sin\beta}$$

命題論理式の読み方

格言

文や文章を読むときは構造を理解する (数式も同様)

- **例**：$(P \to \neg Q) \land \neg(\neg P \leftrightarrow (R \lor Q))$

$$\boxed{(\boxed{\boxed{P} \to \boxed{\neg\boxed{Q}}}) \land \boxed{\neg(\boxed{\boxed{\neg\boxed{P}} \leftrightarrow (\boxed{\boxed{R} \lor \boxed{Q}})})}}$$

- **他の例**：$\sin(\alpha + \beta) = \sin\alpha\cos\beta + \cos\alpha\sin\beta$

$$\boxed{\sin(\ \alpha + \beta\ ) = \ \sin\alpha \ \ \cos\beta \ + \ \cos\alpha \ \ \sin\beta}$$

命題論理式の読み方

格言

文や文章を読むときは**構造**を理解する　(数式も同様)

- **例**：$(P \to \neg Q) \land \neg(\neg P \leftrightarrow (R \lor Q))$

$$\boxed{(\boxed{\boxed{P} \to \boxed{\neg \boxed{Q}}}) \land \boxed{\neg(\boxed{\boxed{\neg \boxed{P}} \leftrightarrow (\boxed{\boxed{R} \lor \boxed{Q}})})}}$$

- **他の例**：$\sin(\alpha + \beta) = \sin\alpha\cos\beta + \cos\alpha\sin\beta$

$$\boxed{\boxed{\sin(\ \alpha + \beta\ )} = \boxed{\sin\ \alpha\quad \cos\beta\quad +\quad \cos\alpha\quad \sin\ \beta}}$$

命題論理式の読み方

格言

文や文章を読むときは構造を理解する (数式も同様)

- **例**：$(P \to \neg Q) \wedge \neg(\neg P \leftrightarrow (R \vee Q))$

$$\boxed{(\boxed{\boxed{P} \to \boxed{\neg \boxed{Q}}}) \wedge \boxed{\neg (\boxed{\boxed{\neg \boxed{P}} \leftrightarrow (\boxed{\boxed{R} \vee \boxed{Q}})})}}$$

- **他の例**：$\sin(\alpha + \beta) = \sin\alpha\cos\beta + \cos\alpha\sin\beta$

$$\boxed{\boxed{\sin(\boxed{\alpha + \beta})} = \boxed{\sin\alpha \quad \cos\beta \quad + \quad \cos\alpha \quad \sin\beta}}$$

命題論理式の読み方

格言

文や文章を読むときは構造を理解する　　(数式も同様)

- **例：** $(P \to \neg Q) \land \neg(\neg P \leftrightarrow (R \lor Q))$

$$\boxed{\left(\boxed{\boxed{P} \to \boxed{\neg \boxed{Q}}}\right) \land \boxed{\neg \left(\boxed{\boxed{\neg \boxed{P}} \leftrightarrow \left(\boxed{\boxed{R} \lor \boxed{Q}}\right)}\right)}}$$

- **他の例：** $\sin(\alpha + \beta) = \sin\alpha\cos\beta + \cos\alpha\sin\beta$

$$\boxed{\boxed{\sin\left(\boxed{\boxed{\alpha} + \boxed{\beta}}\right)} = \boxed{\sin\alpha \quad \cos\beta \quad + \quad \cos\alpha \quad \sin\beta}}$$

命題論理式の読み方

格言

文や文章を読むときは構造を理解する **(数式も同様)**

- **例：** $(P \to \neg Q) \land \neg(\neg P \leftrightarrow (R \lor Q))$

$$\boxed{(\boxed{\boxed{P}\to\boxed{\neg\boxed{Q}}})\land\boxed{\neg(\boxed{\boxed{\neg\boxed{P}}\leftrightarrow(\boxed{\boxed{R}\lor\boxed{Q}})})}}$$

- **他の例：** $\sin(\alpha+\beta) = \sin\alpha\cos\beta + \cos\alpha\sin\beta$

$$\boxed{\boxed{\sin(\boxed{\boxed{\alpha}+\boxed{\beta}})} = \boxed{\boxed{\sin\alpha\ \cos\beta}+\boxed{\cos\alpha\ \sin\beta}}}$$

命題論理式の読み方

格言

文や文章を読むときは構造を理解する **(数式も同様)**

- **例：** $(P \to \neg Q) \land \neg(\neg P \leftrightarrow (R \lor Q))$

$$\boxed{(\boxed{\boxed{P}\to\boxed{\neg\boxed{Q}}})\land\boxed{\neg(\boxed{\boxed{\neg\boxed{P}}\leftrightarrow(\boxed{\boxed{R}\lor\boxed{Q}})})}}$$

- **他の例：** $\sin(\alpha+\beta) = \sin\alpha\cos\beta + \cos\alpha\sin\beta$

$$\boxed{\boxed{\sin(\boxed{\boxed{\alpha}+\boxed{\beta}})}=\boxed{\boxed{\boxed{\boxed{\sin\alpha}\,\boxed{\cos\beta}}+\boxed{\boxed{\cos\alpha}\,\boxed{\sin\beta}}}}}$$

命題論理式の読み方

格言

文や文章を読むときは構造を理解する　　(数式も同様)

- **例：** $(P \to \neg Q) \land \neg(\neg P \leftrightarrow (R \lor Q))$

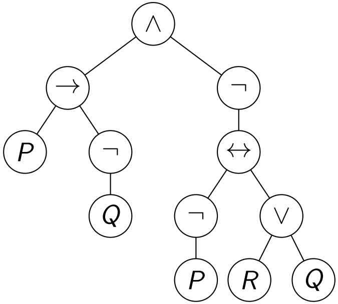
$$\boxed{(\boxed{\boxed{P} \to \boxed{\neg \boxed{Q}}}) \land \boxed{\neg(\boxed{\boxed{\neg \boxed{P}} \leftrightarrow (\boxed{\boxed{R} \lor \boxed{Q}})})}}$$

- **他の例：** $\sin(\alpha + \beta) = \sin\alpha\cos\beta + \cos\alpha\sin\beta$

$$\boxed{\boxed{\sin(\boxed{\boxed{\alpha} + \boxed{\beta}})} = \boxed{\boxed{\boxed{\boxed{\sin\boxed{\alpha}}\boxed{\cos\boxed{\beta}}} + \boxed{\boxed{\cos\boxed{\alpha}}\boxed{\sin\boxed{\beta}}}}}}$$

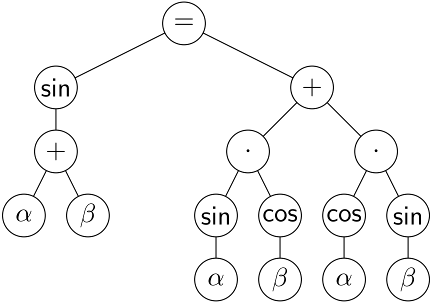
式の読み方：木構造 (1)

$$\boxed{(\boxed{\boxed{P} \to \boxed{\neg \boxed{Q}}}) \wedge \boxed{\neg(\boxed{\boxed{\neg\boxed{P}} \leftrightarrow (\boxed{\boxed{R} \vee \boxed{Q}})})}}$$



式の読み方：木構造 (2)

$$\boxed{\boxed{\sin\left(\boxed{\boxed{\alpha}+\boxed{\beta}}\right)} = \boxed{\boxed{\boxed{\sin\boxed{\alpha}}\,\boxed{\cos\boxed{\beta}}}+\boxed{\boxed{\cos\boxed{\alpha}}\,\boxed{\sin\boxed{\beta}}}}}$$



命題論理式の真偽はどのように決まるのか？

命題変数 P と Q を使った命題論理式「$(P \to Q) \to \neg Q$」を考える

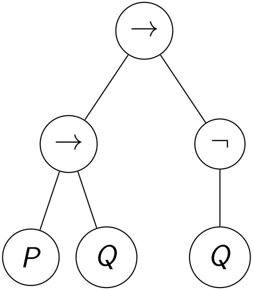
- **この式の真偽は P と Q の真偽から決まるけど，どのように？**

P	Q			$(P \to Q) \to \neg Q$
T	T			?
T	F			?
F	T			?
F	F			?

命題論理式の真偽はどのように決まるのか？

命題変数 P と Q を使った命題論理式「$(P \to Q) \to \neg Q$」を考える

- **この式の真偽は P と Q の真偽から決まるけど，どのように？**
- **まずは構造を見る！**

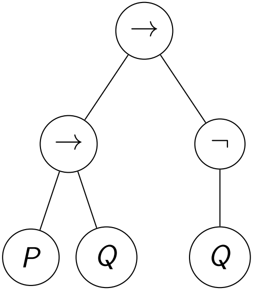


P	Q			$(P \to Q) \to \neg Q$
T	T			**?**
T	F			**?**
F	T			**?**
F	F			**?**

命題論理式の真偽はどのように決まるのか？

命題変数 P と Q を使った命題論理式「$(P \to Q) \to \neg Q$」を考える

- この式の真偽は P と Q の真偽から決まるけど，どのように？
- まずは構造を見る！
- 構造を見て，バラバラにする

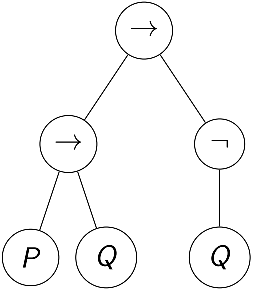


P	Q	$P \to Q$	$\neg Q$	$(P \to Q) \to \neg Q$
T	T			**?**
T	F			**?**
F	T			**?**
F	F			**?**

命題論理式の真偽はどのように決まるのか？

命題変数 P と Q を使った命題論理式「$(P \to Q) \to \neg Q$」を考える

- **この式の真偽は P と Q の真偽から決まるけど，どのように？**
- **まずは構造を見る！**
- **構造を見て，バラバラにする**

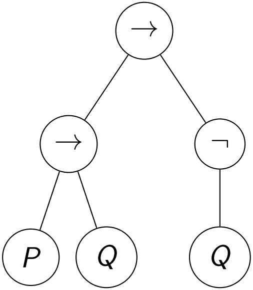


P	Q	$P \to Q$	$\neg Q$	$(P \to Q) \to \neg Q$
T	T			**?**
T	F			**?**
F	T			**?**
F	F			**?**
$\uparrow$	$\uparrow$	$\uparrow$		

命題論理式の真偽はどのように決まるのか？

命題変数 P と Q を使った命題論理式「$(P \to Q) \to \neg Q$」を考える

- この式の真偽は P と Q の真偽から決まるけど，どのように？
- まずは構造を見る！
- 構造を見て，バラバラにする

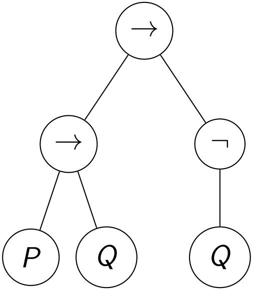


P	Q	$P \to Q$	$\neg Q$	$(P \to Q) \to \neg Q$
T	T	T		?
T	F	F		?
F	T	T		?
F	F	T		?
↑	↑	↑		

命題論理式の真偽はどのように決まるのか？

命題変数 P と Q を使った命題論理式「$(P \to Q) \to \neg Q$」を考える

- この式の真偽は P と Q の真偽から決まるけど，どのように？
- まずは構造を見る！
- 構造を見て，バラバラにする

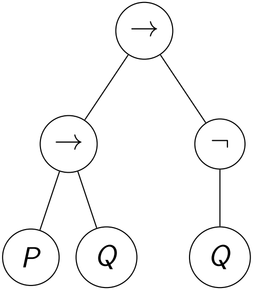


P	Q	$P \to Q$	$\neg Q$	$(P \to Q) \to \neg Q$
T	T	T		?
T	F	F		?
F	T	T		?
F	F	T		?

命題論理式の真偽はどのように決まるのか？

命題変数 P と Q を使った命題論理式「$(P \to Q) \to \neg Q$」を考える

- この式の真偽は P と Q の真偽から決まるけど，どのように？
- まずは構造を見る！
- 構造を見て，バラバラにする

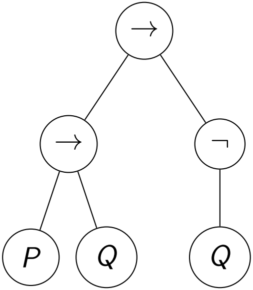


P	Q	$P \to Q$	$\neg Q$	$(P \to Q) \to \neg Q$
T	T	T		?
T	F	F		?
F	T	T		?
F	F	T		?
	↑		↑	

命題論理式の真偽はどのように決まるのか？

命題変数 P と Q を使った命題論理式「$(P \to Q) \to \neg Q$」を考える

- この式の真偽は P と Q の真偽から決まるけど，どのように？
- まずは構造を見る！
- 構造を見て，バラバラにする

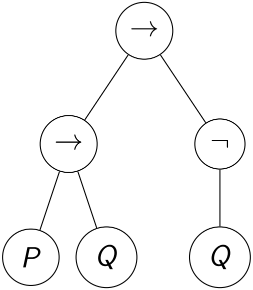


P	Q	$P \to Q$	$\neg Q$	$(P \to Q) \to \neg Q$
T	T	T	F	?
T	F	F	T	?
F	T	T	F	?
F	F	T	T	?
	↑		↑	

命題論理式の真偽はどのように決まるのか？

命題変数 P と Q を使った命題論理式「$(P \to Q) \to \neg Q$」を考える

- この式の真偽は P と Q の真偽から決まるけど，どのように？
- まずは構造を見る！
- 構造を見て，バラバラにする

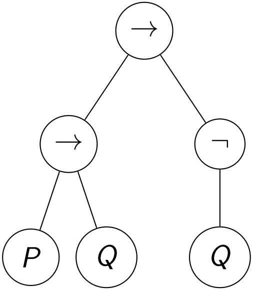


P	Q	$P \to Q$	$\neg Q$	$(P \to Q) \to \neg Q$
T	T	T	F	?
T	F	F	T	?
F	T	T	F	?
F	F	T	T	?

命題論理式の真偽はどのように決まるのか？

命題変数 P と Q を使った命題論理式「$(P \to Q) \to \neg Q$」を考える

- この式の真偽は P と Q の真偽から決まるけど，どのように？
- まずは構造を見る！
- 構造を見て，バラバラにする

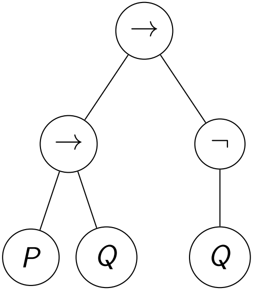


P	Q	$P \to Q$	$\neg Q$	$(P \to Q) \to \neg Q$
T	T	T	F	?
T	F	F	T	?
F	T	T	F	?
F	F	T	T	?
		↑	↑	↑

命題論理式の真偽はどのように決まるのか？

命題変数 P と Q を使った命題論理式「$(P \to Q) \to \neg Q$」を考える

- この式の真偽は P と Q の真偽から決まるけど，どのように？
- まずは構造を見る！
- 構造を見て，バラバラにする

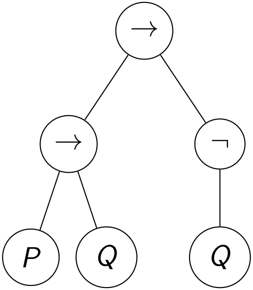


P	Q	$P \to Q$	$\neg Q$	$(P \to Q) \to \neg Q$
T	T	T	F	F
T	F	F	T	T
F	T	T	F	F
F	F	T	T	T
		↑	↑	↑

命題論理式の真偽はどのように決まるのか？

命題変数 P と Q を使った命題論理式「$(P \to Q) \to \neg Q$」を考える

- この式の真偽は P と Q の真偽から決まるけど，どのように？
- まずは構造を見る！
- 構造を見て，バラバラにする



P	Q	$P \to Q$	$\neg Q$	$(P \to Q) \to \neg Q$
T	T	T	F	F
T	F	F	T	T
F	T	T	F	F
F	F	T	T	T

↑これを「**真理値表**」と呼ぶ

真理値表による分析：例

命題変数 P, Q に対して，「$\neg(P \wedge (Q \vee \neg P))$」を考える

- **この命題論理式の真理値表は以下の通り**

P	Q				$\neg(P \wedge (Q \vee \neg P))$
T	T				
T	F				
F	T				
F	F				

真理値表による分析：例

命題変数 P, Q に対して，「$\neg(P \land (Q \lor \neg P))$」を考える

- **この命題論理式の真理値表は以下の通り**

P	Q			$P \land (Q \lor \neg P)$	$\neg(P \land (Q \lor \neg P))$
T	T				
T	F				
F	T				
F	F				

真理値表による分析：例

命題変数 P, Q に対して，「$\neg(P \wedge (Q \vee \neg P))$」を考える

- この命題論理式の真理値表は以下の通り

P	Q		$Q \vee \neg P$	$P \wedge (Q \vee \neg P)$	$\neg(P \wedge (Q \vee \neg P))$
T	T				
T	F				
F	T				
F	F				

真理値表による分析：例

命題変数 P, Q に対して，「$\neg(P \wedge (Q \vee \neg P))$」を考える

- この命題論理式の真理値表は以下の通り

P	Q	$\neg P$	$Q \vee \neg P$	$P \wedge (Q \vee \neg P)$	$\neg(P \wedge (Q \vee \neg P))$
T	T				
T	F				
F	T				
F	F				

真理値表による分析：例

命題変数 P, Q に対して，「$\neg(P \land (Q \lor \neg P))$」を考える

- この命題論理式の真理値表は以下の通り

P	Q	$\neg P$	$Q \lor \neg P$	$P \land (Q \lor \neg P)$	$\neg(P \land (Q \lor \neg P))$
T	T				
T	F				
F	T				
F	F				
↑		↑			

真理値表による分析：例

命題変数 P, Q に対して，「$\neg(P \wedge (Q \vee \neg P))$」を考える

- この命題論理式の真理値表は以下の通り

P	Q	$\neg P$	$Q \vee \neg P$	$P \wedge (Q \vee \neg P)$	$\neg(P \wedge (Q \vee \neg P))$
T	T	F			
T	F	F			
F	T	T			
F	F	T			
$\uparrow$		$\uparrow$			

真理値表による分析：例

命題変数 P, Q に対して，「$\neg(P \wedge (Q \vee \neg P))$」を考える

- **この命題論理式の真理値表は以下の通り**

P	Q	$\neg P$	$Q \vee \neg P$	$P \wedge (Q \vee \neg P)$	$\neg(P \wedge (Q \vee \neg P))$
T	T	F			
T	F	F			
F	T	T			
F	F	T			

真理値表による分析：例

命題変数 P, Q に対して，「$\neg(P \land (Q \lor \neg P))$」を考える

- **この命題論理式の真理値表は以下の通り**

P	Q	$\neg P$	$Q \lor \neg P$	$P \land (Q \lor \neg P)$	$\neg(P \land (Q \lor \neg P))$
T	T	F			
T	F	F			
F	T	T			
F	F	T			
	↑	↑	↑		

真理値表による分析：例

命題変数 P, Q に対して，「$\neg(P \wedge (Q \vee \neg P))$」を考える

- **この命題論理式の真理値表は以下の通り**

P	Q	$\neg P$	$Q \vee \neg P$	$P \wedge (Q \vee \neg P)$	$\neg(P \wedge (Q \vee \neg P))$
T	T	F	T		
T	F	F	F		
F	T	T	T		
F	F	T	T		
	↑	↑	↑		

真理値表による分析：例

命題変数 P, Q に対して，「$\neg(P \wedge (Q \vee \neg P))$」を考える

- **この命題論理式の真理値表は以下の通り**

P	Q	$\neg P$	$Q \vee \neg P$	$P \wedge (Q \vee \neg P)$	$\neg(P \wedge (Q \vee \neg P))$
T	T	F	T		
T	F	F	F		
F	T	T	T		
F	F	T	T		

真理値表による分析：例

命題変数 P, Q に対して，「$\neg(P \wedge (Q \vee \neg P))$」を考える

- **この命題論理式の真理値表は以下の通り**

P	Q	$\neg P$	$Q \vee \neg P$	$P \wedge (Q \vee \neg P)$	$\neg(P \wedge (Q \vee \neg P))$
T	T	F	T		
T	F	F	F		
F	T	T	T		
F	F	T	T		
↑			↑	↑	

真理値表による分析：例

命題変数 P, Q に対して，「$\neg(P \wedge (Q \vee \neg P))$」を考える

- この命題論理式の真理値表は以下の通り

P	Q	$\neg P$	$Q \vee \neg P$	$P \wedge (Q \vee \neg P)$	$\neg(P \wedge (Q \vee \neg P))$
T	T	F	T	T	
T	F	F	F	F	
F	T	T	T	F	
F	F	T	T	F	
↑			↑	↑	

真理値表による分析：例

命題変数 P, Q に対して，「$\neg(P \wedge (Q \vee \neg P))$」を考える

- **この命題論理式の真理値表は以下の通り**

P	Q	$\neg P$	$Q \vee \neg P$	$P \wedge (Q \vee \neg P)$	$\neg(P \wedge (Q \vee \neg P))$
T	T	F	T	T	
T	F	F	F	F	
F	T	T	T	F	
F	F	T	T	F	

真理値表による分析：例

命題変数 P, Q に対して，「$\neg(P \land (Q \lor \neg P))$」を考える

- **この命題論理式の真理値表は以下の通り**

P	Q	$\neg P$	$Q \lor \neg P$	$P \land (Q \lor \neg P)$	$\neg(P \land (Q \lor \neg P))$
T	T	F	T	T	
T	F	F	F	F	
F	T	T	T	F	
F	F	T	T	F	
				$\uparrow$	$\uparrow$

真理値表による分析：例

命題変数 P, Q に対して，「$\neg(P \wedge (Q \vee \neg P))$」を考える

- **この命題論理式の真理値表は以下の通り**

P	Q	$\neg P$	$Q \vee \neg P$	$P \wedge (Q \vee \neg P)$	$\neg(P \wedge (Q \vee \neg P))$
T	T	F	T	T	F
T	F	F	F	F	T
F	T	T	T	F	T
F	F	T	T	F	T
				↑	↑

真理値表による分析：書くときの注意

- 場合に漏れがないように
- 1 つの演算について 1 つの列を作るように
- 規則を当てはめた結果が右側に来るように
- 一方，罫線は引いても引かなくてもよい (もっと引いてもよい)

P	Q	$\neg P$	$Q \lor \neg P$	$P \land (Q \lor \neg P)$	$\neg(P \land (Q \lor \neg P))$
T	T	F	T	T	F
T	F	F	F	F	T
F	T	T	T	F	T
F	F	T	T	F	T

目次

『パズルランドのアリス』の第 55 問 (再掲)

『パズルランドのアリス』第 2 巻，18–19 ページより

- 「こんどは論理の問題じゃ」と白の女王さまがいいました。
- 「赤の王さまが眠っていらっしゃるときは、
王さまが信じなさることはすべてまちがっている。
- つまり本当のことでないのじゃ。
- けれども、王さまが目を覚ましていらっしゃるときは、
信じなさることはすべて本当なのじゃ。
- さて、昨日の晩のぴったり十時に、赤の王さまは、
いまご自分も、また赤の女王さまも、眠っていると信じなさった。
- ではそのとき、赤の女王さまは、眠っていらっしゃったか、それとも
目をさましていらっしゃったか、どうじゃ？」

論理によるモデル化

命題変数を導入

- P = 赤の王さまが眠っている
- Q = 赤の女王さまが眠っている

各命題を命題論理式として記述

- 王さまが信じていることは「$P \wedge Q$」
- 王さまのキャラクターから「$P \leftrightarrow \neg(P \wedge Q)$」
- 知りたいことは「Q」

つまり，

- 「$P \leftrightarrow \neg(P \wedge Q)$」を真とする「$Q$」は何？

真理値表

P	Q	$P \wedge Q$	$\neg(P \wedge Q)$	$P \leftrightarrow \neg(P \wedge Q)$
T	T	T	F	F
T	F	F	T	T
F	T	F	T	F
F	F	F	T	F

つまり，

- **「$P \leftrightarrow \neg(P \wedge Q)$」が真となるのは，「$Q$」が偽のときのみ**
- **よって，赤の女王さまは眠っていない**

格言

論理は思考をまとめる道具

目次

集合

集合 (常識に基づく定義)

集合とはものの集まり

集合の記法

波かっこ 「{」と「}」を使って記述する

例：

- $\{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$
- { あ, い, う, え, お }

集合の要素とは？

集合を構成する 1 つ 1 つのものを要素または元と呼ぶ

格言

数学理解の基本は「定義」と「記法」の理解

要素であることの記法

記法

- x が集合 A の要素であることを次のように表記する

$$x \in A$$

- x が集合 A の要素ではないことを次のように表記する

$$x \notin A$$

例：$A = \{$ あ, い, う, え, お $\}$ とすると

- あ $\in A$
- ま $\notin A$
- お $\in A$
- う $\in A$

集合の記述法 (1)：要素を並べる

$$U = \{\text{アメリカ}, \text{イギリス}, \text{イタリア}, \text{オーストリア}, \text{オーストラリア}, \text{オランダ}, \text{カナダ}, \text{韓国}, \text{ギリシャ}, \text{スウェーデン}, \text{スイス}, \text{スペイン}, \text{ソ連}, \text{中国}, \text{ドイツ}, \text{西ドイツ}, \text{日本}, \text{ノルウェー}, \text{フィンランド}, \text{フランス}, \text{ベルギー}, \text{メキシコ}, \text{ユーゴスラビア}\}$$

集合の「外延的定義」と呼ばれる

注

集合に対して「=」が何を意味するのかは次回紹介する

集合の記述法 (2)：性質を定める

$$U = \{x \mid x \text{ は (2012 年までに) 近代オリンピックが開催された国 }\}$$

記法

「$\{x \mid x$ がこの集合の要素であるための (必要十分) 条件 $\}$」

「$\mid$」の代わりに「$:$」や「$;$」を使うこともある

集合の「内包的定義」と呼ばれる

集合の記述法：他の例

$$A = \{2, 3, 5, 7\}$$

集合の記述法：他の例

$$
\begin{aligned}
A &= \{2, 3, 5, 7\} \\
&= \{7, 2, 5, 3\}
\end{aligned}
$$

←並べる順番が違っても集合としては同じ

集合の記述法：他の例

$$
\begin{aligned}
A &= \{2,3,5,7\} \\
&= \{7,2,5,3\} \qquad \text{←並べる順番が違っても集合としては同じ} \\
&= \{\, n \mid n \text{ は } 10 \text{ 以下の素数である} \,\}
\end{aligned}
$$

集合の記述法：他の例

$$
\begin{aligned}
A &= \{2, 3, 5, 7\} \\
&= \{7, 2, 5, 3\} \qquad \textbf{←並べる順番が違っても集合としては同じ} \\
&= \{\, n \mid n\ \textbf{は}\ 10\ \textbf{以下の素数である}\,\} \\
&= \left\{ n \,\middle|\, \begin{array}{l} n\ \textbf{は整数であり，かつ，} \\ n^4 - 17n^3 + 101n^2 - 247n + 210 = 0\ \textbf{を満たす} \end{array} \right\}
\end{aligned}
$$

集合の記述法：他の例

$$
\begin{aligned}
A &= \{2,3,5,7\} \\
&= \{7,2,5,3\} \qquad \text{←並べる順番が違っても集合としては同じ} \\
&= \{n \mid n \text{ は } 10 \text{ 以下の素数である}\} \\
&= \left\{ n \;\middle|\; \begin{array}{l} n \text{ は整数であり，かつ，} \\ n^4 - 17n^3 + 101n^2 - 247n + 210 = 0 \text{ を満たす} \end{array} \right\}
\end{aligned}
$$

外延的定義の利点・欠点

利点

- 何が要素か分かりやすい

欠点

- 全要素を並べる必要がある
- 全要素を並べられないかも
- 集合の性質が分かりにくい

内包的定義の利点・欠点

利点

- 集合の性質が分かりやすい
- 全要素を並べなくてもよい

欠点

- 何が要素か分かりにくい
- よく書き間違える（要努力！）

集合の記述法：他の例 2

$$B = \{n^2 \mid n \text{ は } 10 \text{ 以下の素数である }\}$$

集合の記述法：他の例 2

$$\begin{aligned} B &= \{n^2 \mid n \text{ は } 10 \text{ 以下の素数である }\} \\ &= \{2^2, 3^2, 5^2, 7^2\} \end{aligned}$$

集合の記述法：他の例 2

$$
\begin{aligned}
B &= \{n^2 \mid n \text{ は 10 以下の素数である }\} \\
&= \{2^2, 3^2, 5^2, 7^2\} \\
&= \{4, 9, 25, 49\}
\end{aligned}
$$

集合の記述法：他の例 2

$$
\begin{aligned}
B &= \{n^2 \mid n \text{ は } 10 \text{ 以下の素数である}\} \\
&= \{2^2, 3^2, 5^2, 7^2\} \\
&= \{4, 9, 25, 49\} \\
C &= \{m - n \mid m \text{ と } n \text{ は } 10 \text{ 以下の素数である}\}
\end{aligned}
$$

集合の記述法：他の例 2

$$
\begin{aligned}
B &= \{n^2 \mid n \text{ は 10 以下の素数である }\} \\
&= \{2^2, 3^2, 5^2, 7^2\} \\
&= \{4, 9, 25, 49\} \\
C &= \{m - n \mid m \text{ と } n \text{ は 10 以下の素数である }\} \\
&= \{2-2, 2-3, 2-5, 2-7, 3-2, 3-3, 3-5, 3-7, \\
&\quad 5-2, 5-3, 5-5, 5-7, 7-2, 7-3, 7-5, 7-7\}
\end{aligned}
$$

集合の記述法：他の例 2

$$\begin{aligned}
B &= \{n^2 \mid n \text{ は 10 以下の素数である }\} \\
&= \{2^2, 3^2, 5^2, 7^2\} \\
&= \{4, 9, 25, 49\} \\
C &= \{m - n \mid m \text{ と } n \text{ は 10 以下の素数である }\} \\
&= \{2-2, 2-3, 2-5, 2-7, 3-2, 3-3, 3-5, 3-7, \\
&\quad 5-2, 5-3, 5-5, 5-7, 7-2, 7-3, 7-5, 7-7\} \\
&= \{0, -1, -3, -5, 1, 0, -2, -4, 3, 2, 0, -2, 5, 4, 2, 0\}
\end{aligned}$$

集合の記述法：他の例 2

$$\begin{aligned}
B &= \{n^2 \mid n \text{ は } 10 \text{ 以下の素数である}\} \\
&= \{2^2, 3^2, 5^2, 7^2\} \\
&= \{4, 9, 25, 49\} \\
C &= \{m - n \mid m \text{ と } n \text{ は } 10 \text{ 以下の素数である}\} \\
&= \{2-2, 2-3, 2-5, 2-7, 3-2, 3-3, 3-5, 3-7, \\
&\quad\ 5-2, 5-3, 5-5, 5-7, 7-2, 7-3, 7-5, 7-7\} \\
&= \{0, -1, -3, -5, 1, 0, -2, -4, 3, 2, 0, -2, 5, 4, 2, 0\} \\
&= \{-5, -4, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4, 5\}
\end{aligned}$$

よく出てくる (無限) 集合

表記法

- $\mathbb{N}$ = すべての自然数からなる集合 (自然数全体)
- $\mathbb{Z}$ = すべての整数からなる集合 (整数全体)
- $\mathbb{Q}$ = すべての有理数からなる集合 (有理数全体)
- $\mathbb{R}$ = すべての実数からなる集合 (実数全体)
- $\mathbb{C}$ = すべての複素数からなる集合 (複素数全体)

例：

- $2 \in \mathbb{N}$

よく出てくる (無限) 集合

表記法

- $\mathbb{N}$ = すべての自然数からなる集合 (自然数全体)
- $\mathbb{Z}$ = すべての整数からなる集合 (整数全体)
- $\mathbb{Q}$ = すべての有理数からなる集合 (有理数全体)
- $\mathbb{R}$ = すべての実数からなる集合 (実数全体)
- $\mathbb{C}$ = すべての複素数からなる集合 (複素数全体)

例：

- $2 \in \mathbb{N}$
- $-3 \notin \mathbb{N}$
- $-3 \in \mathbb{Z}$

よく出てくる (無限) 集合

表記法

- $\mathbb{N} =$ すべての自然数からなる集合 (自然数全体)
- $\mathbb{Z} =$ すべての整数からなる集合 (整数全体)
- $\mathbb{Q} =$ すべての有理数からなる集合 (有理数全体)
- $\mathbb{R} =$ すべての実数からなる集合 (実数全体)
- $\mathbb{C} =$ すべての複素数からなる集合 (複素数全体)

例：

- $2 \in \mathbb{N}$
- $-3 \notin \mathbb{N}$
- $-3 \in \mathbb{Z}$
- $\frac{1}{2} \notin \mathbb{Z}$
- $\frac{1}{2} \in \mathbb{Q}$

よく出てくる (無限) 集合

表記法

- $\mathbb{N}$ = すべての自然数からなる集合 (自然数全体)
- $\mathbb{Z}$ = すべての整数からなる集合 (整数全体)
- $\mathbb{Q}$ = すべての有理数からなる集合 (有理数全体)
- $\mathbb{R}$ = すべての実数からなる集合 (実数全体)
- $\mathbb{C}$ = すべての複素数からなる集合 (複素数全体)

例：

- $2 \in \mathbb{N}$
- $-3 \notin \mathbb{N}$
- $-3 \in \mathbb{Z}$
- $\frac{1}{2} \notin \mathbb{Z}$
- $\frac{1}{2} \in \mathbb{Q}$
- $\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$
- $\sqrt{2} \in \mathbb{R}$

よく出てくる (無限) 集合

表記法

- $\mathbb{N} =$ すべての自然数からなる集合 (自然数全体)
- $\mathbb{Z} =$ すべての整数からなる集合 (整数全体)
- $\mathbb{Q} =$ すべての有理数からなる集合 (有理数全体)
- $\mathbb{R} =$ すべての実数からなる集合 (実数全体)
- $\mathbb{C} =$ すべての複素数からなる集合 (複素数全体)

例：

- $2 \in \mathbb{N}$
- $-3 \notin \mathbb{N}$
- $-3 \in \mathbb{Z}$
- $\frac{1}{2} \notin \mathbb{Z}$
- $\frac{1}{2} \in \mathbb{Q}$
- $\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$
- $\sqrt{2} \in \mathbb{R}$
- $1 + \sqrt{2}i \notin \mathbb{R}$
- $1 + \sqrt{2}i \in \mathbb{C}$

目次

共通部分

共通部分とは？

集合 A, B の**共通部分**を $A \cap B$ と表記し，

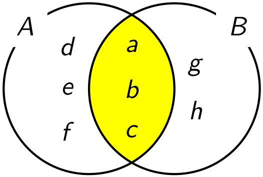
$$A \cap B = \{x \mid x \in A \text{ かつ } x \in B\}$$

で定義する

例：

- $A = \{a, b, c, d, e, f\}$
- $B = \{a, b, c, g, h\}$ のとき，
- $A \cap B = \{a, b, c\}$

オイラー図



「共通部分」は「積集合」,「交わり」とも呼ばれる

合併

合併とは？

集合 A, B の**合併**を $A \cup B$ と表記し，

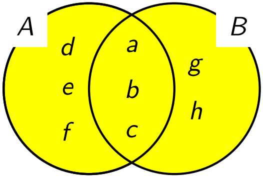
$$A \cup B = \{x \mid x \in A \text{ または } x \in B\}$$

で定義する

例：

- $A = \{a, b, c, d, e, f\}$
- $B = \{a, b, c, g, h\}$ のとき，
- $A \cup B = \{a, b, c, d, e, f, g, h\}$

オイラー図



「合併」は「和集合」,「結び」とも呼ばれる

差集合

差集合とは？

集合 A, B に対して，**差集合** $A - B$ を

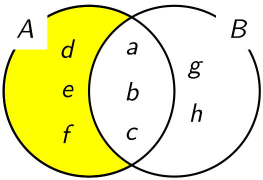
$$A - B = \{x \mid x \in A \text{ かつ } x \notin B\}$$

で定義する

例：

- $A = \{a, b, c, d, e, f\}$
- $B = \{a, b, c, g, h\}$ のとき，
- $A - B = \{d, e, f\}$

オイラー図



「$A - B$」の代わりに「$A \setminus B$」と書くこともある

空集合

空集合とは？

要素を持たない集合を**空集合**と呼び,「$\emptyset$」または「$\varnothing$」と表記する

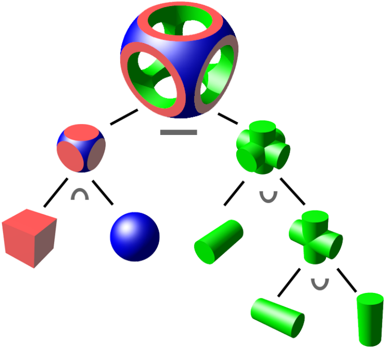
注 1：空集合は「$\{\ \}$」とも書く

注 2：空集合の記号「$\emptyset$」と「$\varnothing$」はギリシャ文字「Φ」,「ϕ」と違う

集合の演算の応用例：Constructive Solid Geometry

Constructive Solid Geometry

単純な物体に対して集合演算を適用することで，複雑な物体を表現するコンピュータ・グラフィクスの技法



http://en.wikipedia.org/wiki/File:Csg_tree.png

命題論理と集合の類似性

まとめの表

命題論理	集合
$\wedge$	$\cap$
$\vee$	$\cup$

なので，

- 命題 P, Q に対して「$P \cap Q$」と書いては**いけない**！
- 集合 A, B に対して「$A \wedge B$」と書いては**いけない**！

目次

今日のまとめ

命題とその真偽

- 命題：「真」か「偽」が定まる文

命題論理式と真理値表

- 命題論理式：命題を組み合わせて得られた命題
- 真理値表：命題論理式の真偽を分析する道具

集合と集合の演算

- 集合の記述法 (要素を並べる，性質を定める)
- 共通部分，合併，差集合，空集合

論理学?: 補足

この講義で扱うのは「論理学」ではない！

- 後の授業で必要なことだけを扱った（「論理学を使う」という立場)
- そのため，常識に基づいて論理学のさわりを見た
- ちゃんとした「論理学」については別の機会に勉強を

「論理学」自体に興味がある場合は，以下の本を推薦

- レイモンド・スマリヤン (著)，田中 朋之，長尾 確 (訳),『スマリヤンの決定不能の論理パズル』，白揚社，2008 年．
- 戸田山 和久,『論理学をつくる』，名古屋大学出版会，2000 年．

集合の定義：補足

集合 (常識に基づく定義) 再掲

集合とはものの集まり

これを集合の定義だとすると，様々な「まずいこと」が起きると知られている

興味のある人は次のことばを調べてみる

- ラッセルのパラドックス （「まずいこと」の例）
- 公理的集合論 （「まずいこと」の解決法）

この授業では，集合自身についてあまり深く考えないことにする

残った時間の使い方

- 演習問題をやる
  - 相談推奨 (ひとりでやらない)
- 質問をする
  - 教員とティーチング・アシスタントは巡回
- 退室時，小さな紙に感想など書いて提出する
  - 内容は何でも OK
  - 匿名で OK

目次