離散数学 第 9 回
順序と同値関係 (1)：関係

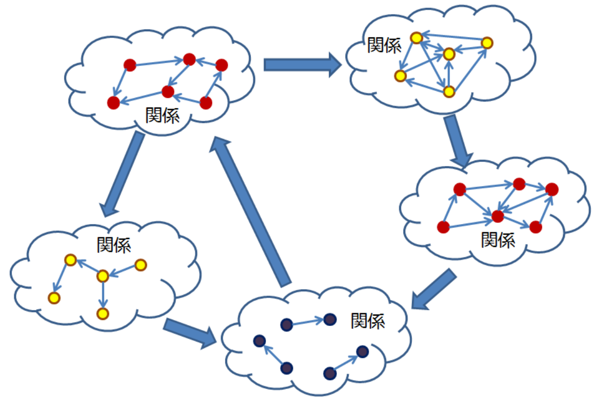
岡本 吉央
okamotoy@uec.ac.jp

電気通信大学

2013 年 6 月 18 日

最終更新：2013 年 6 月 17 日　11:09

ここまでのまとめ と ここからの話



概要

今日の目標
- 関係を理解する
- 関係の性質を理解する
  - 反射性，完全性，対称性，反対称性，推移性
- 特殊な関係を理解する
  - 順序 (半順序)，全順序，同値関係

目次

6 の約数は？

問題 1
6 の約数を全部挙げよ

解答： 1, 2, 3, 6

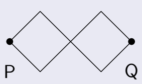
$\{a, b\}$ の部分集合は？

問題 2
集合 $\{a, b\}$ の部分集合を全部挙げよ

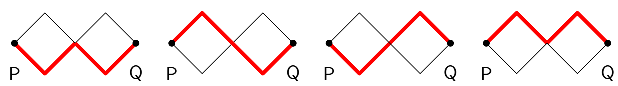
解答： $\emptyset, \{a\}, \{b\}, \{a, b\}$

スタートからゴールまで最短で行く方法は？

問題 3
次の図の P から Q まで最短でいく方法を全部挙げよ



解答：

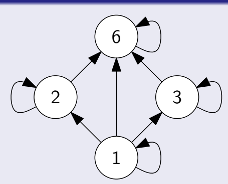


6 の約数は？ 再登場

問題 1
6 の約数を全部挙げよ

解答： 1, 2, 3, 6

「m は n の約数」のとき，m から n に矢印を引いて絵を描く



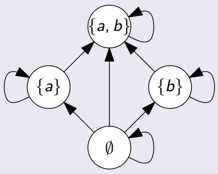
$\{a, b\}$ の部分集合は？

問題 2

集合 $\{a, b\}$ の部分集合を全部挙げよ

解答：$\emptyset, \{a\}, \{b\}, \{a, b\}$

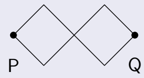
「A は B の部分集合」のとき，A から B に矢印を引いて絵を描く



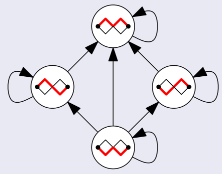
スタートからゴールまで最短で行く方法は？

問題 3

次の図の P から Q まで最短でいく方法を全部挙げよ



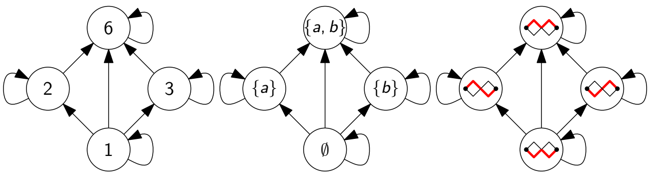
「経路 1 が経路 2 の上にいかない」とき，経路 1 から 2 に矢印を...



共通点？ なぜ？

この 3 つは「同じ形」をしている

- 「同じ形」とは何？
- なぜ同じ形をしている？



格言

抽象化，それが数学の威力の 1 つ

目次

関係とは？

集合 A

関係とは？（常識に基づく定義）

A 上の関係は次のように定められるもの

- 関係を表す記号「R」がある　（例えば，$\leq$ や $=$ や $\subseteq$）
- 任意の $x, y \in A$ に対して「$x \mathrel{R} y$」が成り立つか成り立たないか，のどちらか

注：$x \mathrel{R} y$ が成り立っても，$y \mathrel{R} x$ が成り立つとは限らない

例 1

例 1

- $A = \{1, 2, 3, 6\}$
- 任意の $x, y \in A$ に対して

$x \mid y$ であることを x は y の約数である

と定義する

- $1 \mid 1$ ○
- $1 \mid 2$ ○
- $1 \mid 3$ ○
- $1 \mid 6$ ○
- $2 \mid 1$ ×
- $2 \mid 2$ ○
- $2 \mid 3$ ×
- $2 \mid 6$ ○
- $3 \mid 1$ ×
- $3 \mid 2$ ×
- $3 \mid 3$ ○
- $3 \mid 6$ ○
- $6 \mid 1$ ×
- $6 \mid 2$ ×
- $6 \mid 3$ ×
- $6 \mid 6$ ○

関係の表現法 (1)：関数

関数としての関係の表現

A 上の関係 R を関数 $A^2 \to \{○, ×\}$，

$$(x, y) \mapsto \begin{cases} ○ & (x \mathrel{R} y \text{ のとき}) \\ × & (x \mathrel{R} y \text{ ではないとき}) \end{cases}$$

で表現する

例 1 の場合

- $(1, 1) \mapsto$ ○
- $(1, 2) \mapsto$ ○
- $(1, 3) \mapsto$ ○
- $(1, 6) \mapsto$ ○
- $(2, 1) \mapsto$ ×
- $(2, 2) \mapsto$ ○
- $(2, 3) \mapsto$ ×
- $(2, 6) \mapsto$ ○
- $(3, 1) \mapsto$ ×
- $(3, 2) \mapsto$ ×
- $(3, 3) \mapsto$ ○
- $(3, 6) \mapsto$ ○
- $(6, 1) \mapsto$ ×
- $(6, 2) \mapsto$ ×
- $(6, 3) \mapsto$ ×
- $(6, 6) \mapsto$ ○

関係の表現法 (2)：集合

集合としての関係の表現

A 上の関係 R を集合

$$\{(x, y) \mid x \in A \text{ かつ } y \in A \text{ かつ } x \mathrel{R} y\}$$

で表現する

例 1 の場合

$$\{(1, 1), (1, 2), (1, 3), (1, 6), (2, 2), (2, 6), (3, 3), (3, 6), (6, 6)\}$$

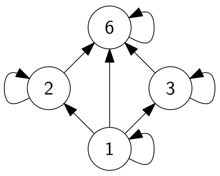
関係の表現法 (3)：グラフ

集合としての関係の表現

A 上の関係 R を
- 頂点集合を A として，
- $x \, R \, y$ であるとき，そのときに限り $x \to y$ という矢印を引く

グラフで表現する

例 1 の場合

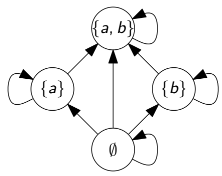


例 2

例 2
- $A = \{\emptyset, \{a\}, \{b\}, \{a, b\}\}$
- 任意の $X, Y \in A$ に対して

$X \subseteq Y$ であることを X は Y の部分集合である

と定義する

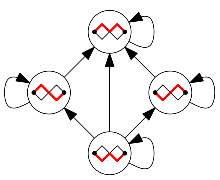


例 3

例 3
- $A = \{ \quad , \quad , \quad , \quad \}$
- 任意の $X, Y \in A$ に対して

$X \preceq Y$ であることを X は Y の上に来ない

と定義する

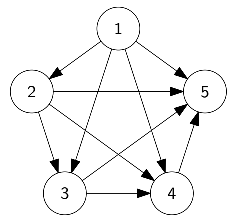


例 4

例 4
- $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$
- 任意の $x, y \in A$ に対して

$x < y$ であることを x は y より小さい

と定義する

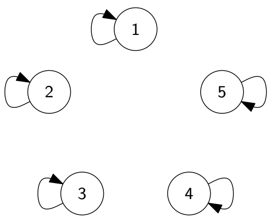


例 5

例 5
- $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$
- 任意の $x, y \in A$ に対して

$x = y$ であることを x は y と等しい

と定義する

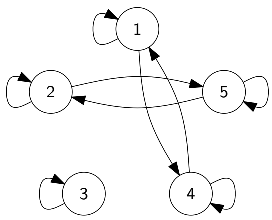


例 6

例 6
- $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$
- 任意の $x, y \in A$ に対して

$x \equiv_3 y$ であることを $x \equiv y \pmod 3$

と定義する



補足：合同な整数

合同な整数

0 以上の整数 m, n と 1 以上の整数 p を考える
- $m - n$ が p で割り切れるとき，すなわち，
  ある整数 q が存在して
  $$m - n = pq$$
  と書けるとき，$m \equiv n \pmod p$ と表記する
- $m \equiv n \pmod p$ であるとき
  「m と n は p を法として合同である」という

例：
- 5 と 11 は 3 を法として合同である
  - $\because 5 - 11 = -6 = 3 \cdot (-2)$
- 15869 と 6832 は 1291 を法として合同である
  - $\because 15869 - 6832 = 9037 = 1291 \cdot 7$

目次

反射性

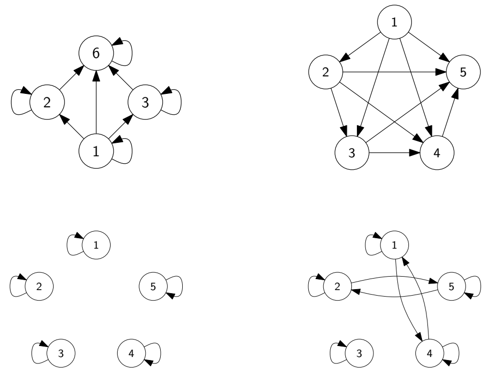
集合 A と A 上の関係 R

反射性とは？

R が**反射性**を持つとは，次を満たすこと

任意の $x \in A$ に対して $x\,R\,x$

反射性を持つのはどれ？



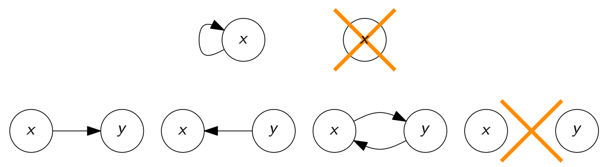
完全性

集合 A と A 上の関係 R

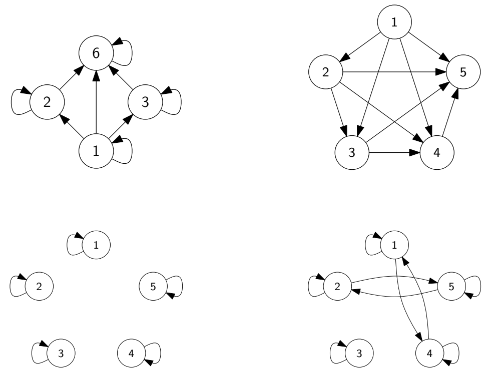
完全性とは？

R が**完全性**を持つとは，次を満たすこと

任意の $x, y \in A$ に対して $x\,R\,y$ または $y\,R\,x$



完全性を持つのはどれ？



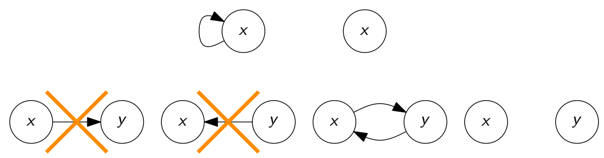
対称性

集合 A と A 上の関係 R

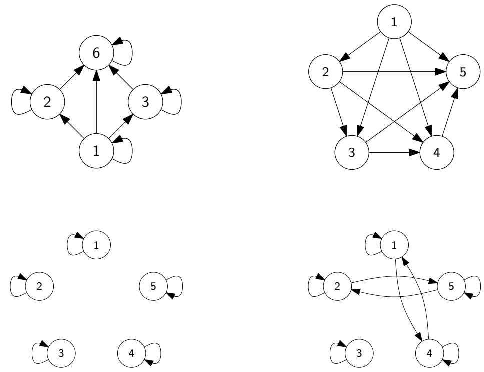
対称性とは？

R が**対称性**を持つとは，次を満たすこと

任意の $x, y \in A$ に対して $x\,R\,y$ ならば $y\,R\,x$



対称性を持つのはどれ？



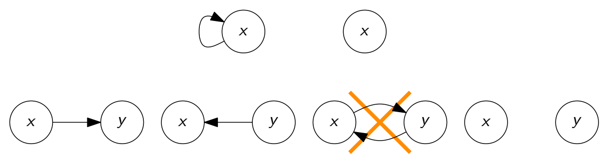
反対称性

集合 A と A 上の関係 R

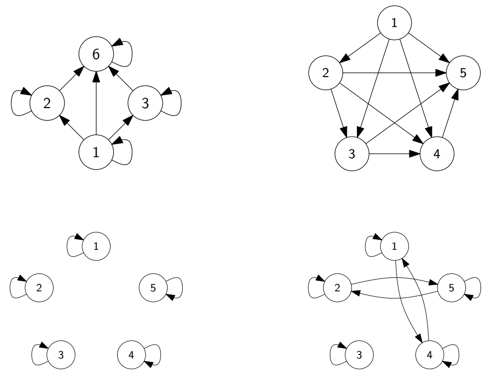
反対称性とは？

R が**反対称性**を持つとは，次を満たすこと

任意の $x, y \in A$ に対して $x\,R\,y$ かつ $y\,R\,x$ ならば $x = y$



反対称性を持つのはどれ？



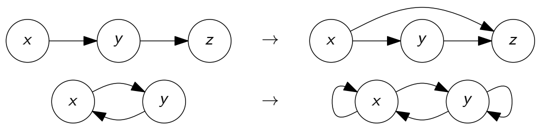
推移性

集合 A と A 上の関係 R

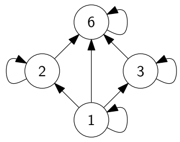
推移性とは？

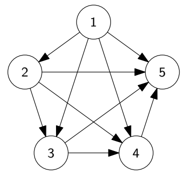
R が**推移性**を持つとは，次を満たすこと

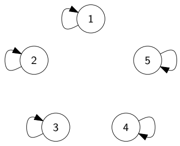
$$\text{任意の } x, y, z \in A \text{ に対して } x \mathrel{R} y \text{ かつ } y \mathrel{R} z \text{ ならば } x \mathrel{R} z$$

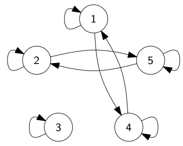


推移性を持つのはどれ？









目次

半順序

集合 A と A 上の関係 R

半順序とは？

R が**半順序**であるとは，次を満たすこと
- R は反射性を持つ
- R は反対称性を持つ
- R は推移性を持つ

例 1〜6 の中で，例 1，2，3 は半順序

代表的な半順序 (1)

代表的な半順序 (1)：実数の大小関係

$\mathbb{R}$ 上の関係 $\leq$ を，任意の $x, y \in \mathbb{R}$ に対して

$$x \leq y \text{ であることは } x \text{ が } y \text{ 以下であること}$$

として定義する

今からやること

この関係 $\leq$ が半順序であることを証明する

次の 3 つが成り立つことを確認すればよい
- 反射性
- 反対称性
- 推移性

代表的な半順序 (1) 続き

代表的な半順序 (1)：実数の大小関係

$\mathbb{R}$ 上の関係 $\leq$ を，任意の $x, y \in \mathbb{R}$ に対して

$$x \leq y \text{ であることは } x \text{ が } y \text{ 以下であること}$$

として定義する

反射性：確認

任意の $x \in \mathbb{R}$ に対して，$x \leq x$

反対称性：確認

任意の $x, y \in \mathbb{R}$ に対して，$x \leq y$ かつ $y \leq x$ ならば $x = y$

推移性：確認

任意の $x, y, z \in \mathbb{R}$ に対して，$x \leq y$ かつ $y \leq z$ ならば $x \leq z$

代表的な半順序 (2)

代表的な半順序 (2)：集合の包含関係

任意の集合 A の冪集合 2^A 上の関係 $\subseteq$ を，任意の $X, Y \in 2^A$ に対して

$$X \subseteq Y \text{ であることは } X \text{ が } Y \text{ の部分集合であること}$$

として定義する

今からやること

この関係 $\subseteq$ が半順序であることを証明する

次の 3 つが成り立つことを確認すればよい
- 反射性
- 反対称性
- 推移性

代表的な半順序 (2) 続き

代表的な半順序 (2)：集合の包含関係

任意の集合 A の冪集合 2^A 上の関係 $\subseteq$ を，任意の $X, Y \in 2^A$ に対して

$$X \subseteq Y \text{ であることは } X \text{ が } Y \text{ の部分集合であること}$$

として定義する

反射性：確認 (演習問題)

任意の $X \in 2^A$ に対して，$X \subseteq X$

反対称性：確認

任意の $X, Y \in 2^A$ に対して，$X \subseteq Y$ かつ $Y \subseteq X$ ならば $X = Y$

推移性：確認 (演習問題 5.10 参照)

任意の $X, Y, Z \in 2^A$ に対して，$X \subseteq Y$ かつ $Y \subseteq Z$ ならば $X \subseteq Z$

代表的な半順序 (3)

代表的な半順序 (3)：整数の整除関係

1 以上の整数全体の集合 $\mathbb{Z}_+$ 上の関係 $|$ を，任意の $a, b \in \mathbb{Z}_+$ に対して

$$a \mid b \text{ であることは } a \text{ が } b \text{ の約数であること}$$

として定義する

今からやること

この関係 $|$ が半順序であることを証明する

次の 3 つが成り立つことを確認すればよい
- 反射性
- 反対称性
- 推移性

代表的な半順序 (3) 続き

代表的な半順序 (3)：整数の整除関係

1 以上の整数全体の集合 $\mathbb{Z}_+$ 上の関係 $|$ を，任意の $a, b \in \mathbb{Z}_+$ に対して

$$a \mid b \text{ であることは } a \text{ が } b \text{ の約数であること}$$

として定義する

反射性：確認

任意の $a \in \mathbb{Z}_+$ に対して，$a \mid a$

反対称性：次のページで確認

任意の $a, b \in \mathbb{Z}_+$ に対して，$a \mid b$ かつ $b \mid a$ ならば $a = b$

推移性：後のページで確認

任意の $a, b, c \in \mathbb{Z}_+$ に対して，$a \mid b$ かつ $b \mid c$ ならば $a \mid c$

代表的な半順序 (3)：反対称性の証明

- $a, b \in \mathbb{Z}_+$ を任意に選ぶ．
- $a \mid b$ と $b \mid a$ を仮定する．
- $a \mid b$ から，ある $p \in \mathbb{Z}_+$ が存在して，$b = ap$
- $b \mid a$ から，ある $q \in \mathbb{Z}_+$ が存在して，$a = bq$
- したがって，$b = ap = (bq)p = bqp$
- $p, q \in \mathbb{Z}_+$ なので，$p = 1, q = 1$
- $a = bq$ なので，$a = b$ □

代表的な半順序 (3)：推移性の証明

- $a, b, c \in \mathbb{Z}_+$ を任意に選ぶ．
- $a \mid b$ と $b \mid c$ を仮定する．
- $a \mid b$ から，ある $p \in \mathbb{Z}_+$ が存在して，$b = ap$
- $b \mid c$ から，ある $q \in \mathbb{Z}_+$ が存在して，$c = bq$
- したがって，$c = bq = (ap)q = a(pq)$
- $p, q \in \mathbb{Z}_+$ なので，$pq \in \mathbb{Z}_+$
- $r' = pq$ とすると，$r' \in \mathbb{Z}_+$ かつ $c = ar'$
- したがって，ある $r \in \mathbb{Z}_+$ が存在して，$c = ar$
- したがって，$a|c$． □

全順序

集合 A と A 上の関係 R

全順序とは？

R が全順序であるとは，次を満たすこと
- R は反射性を持つ
- R は反対称性を持つ
- R は推移性を持つ
- R は完全性を持つ

例 1〜6 の中に，全順序はない
- 注：単に「順序」と言ったら，普通は「半順序」のことを指す
- 注：全順序のことを線形順序と呼ぶこともある

代表的な全順序

代表的な全順序：実数の大小関係

$\mathbb{R}$ 上の関係 $\leq$ を，任意の $x, y \in \mathbb{R}$ に対して

$$x \leq y \text{ であることは } x \text{ が } y \text{ 以下であること}$$

として定義する

今からやること

この関係 $\leq$ が全順序であることを証明する

次の 4 つが成り立つことを確認すればよい
- 反射性，反対称性，推移性，完全性

反射性，反対称性，推移性は既に確認した

完全性：確認

任意の $x, y \in \mathbb{R}$ に対して，$x \leq y$ か $y \leq x$

同値関係

集合 A と A 上の関係 R

同値関係とは？

R が同値関係であるとは，次を満たすこと
- R は反射性を持つ
- R は対称性を持つ
- R は推移性を持つ

例 1〜6 の中で，同値関係は例 5，6

代表的な同値関係 (1)

代表的な同値関係 (1)：実数の相等関係

$\mathbb{R}$ 上の関係 $=$ を，任意の $x, y \in \mathbb{R}$ に対して

$$x = y \text{ であることは } x \text{ が } y \text{ と等しいこと}$$

として定義する

今からやること

この関係 $=$ が同値関係であることを証明する

次の 3 つが成り立つことを確認すればよい
- 反射性
- 対称性
- 推移性

代表的な同値関係 (1) 続き

代表的な同値関係 (1)：実数の相等関係

$\mathbb{R}$ 上の関係 $=$ を，任意の $x, y \in \mathbb{R}$ に対して

$$x = y \text{ であることは } x \text{ が } y \text{ と等しいこと}$$

として定義する

反射性：確認

任意の $x \in \mathbb{R}$ に対して，$x = x$

対称性：確認

任意の $x, y \in \mathbb{R}$ に対して，$x = y$ ならば $y = x$

推移性：確認

任意の $x, y, z \in \mathbb{R}$ に対して，$x = y$ かつ $y = z$ ならば $x = z$

代表的な同値関係 (2)

代表的な同値関係 (2)：整数の合同関係

1 以上の任意の整数 p に対して，
0 以上の整数全体の集合 $\mathbb{N}$ 上の関係 $\equiv_p$ を，任意の $m, n \in \mathbb{N}$ に対して

$$m \equiv_p n \text{ であることは } m \equiv n \pmod{p} \text{ が成り立つこと}$$

として定義する

今からやること

この関係 $\equiv_p$ が同値関係であることを証明する

次の 3 つが成り立つことを確認すればよい

- 反射性
- 対称性
- 推移性

代表的な同値関係 (2) 続き

代表的な同値関係 (2)：整数の合同関係

1 以上の任意の整数 p に対して，
0 以上の整数全体の集合 $\mathbb{N}$ 上の関係 $\equiv_p$ を，任意の $m, n \in \mathbb{N}$ に対して

$$m \equiv_p n \text{ であることは } m \equiv n \pmod{p} \text{ が成り立つこと}$$

として定義する

反射性：次のページで確認

任意の $n \in \mathbb{N}$ に対して，$n \equiv_p n$

対称性：後のページで確認

任意の $m, n \in \mathbb{N}$ に対して，$m \equiv_p n$ ならば $n \equiv_p m$

推移性：後のページで確認

任意の $\ell, m, n \in \mathbb{N}$ に対して，$\ell \equiv_p m$ かつ $m \equiv_p n$ ならば $\ell \equiv_p n$

代表的な同値関係 (2)：反射性の証明

- 任意に $n \in \mathbb{N}$ を選ぶ
- このとき，$n - n = 0 = p \cdot 0$
- したがって，$n \equiv n \pmod{p}$ $\square$

$m \equiv n \pmod{p}$ の定義 (再掲)

ある $q \in \mathbb{Z}$ が存在して，$m - n = pq$

代表的な同値関係 (2)：対称性の証明

- 任意に $m, n \in \mathbb{N}$ を選ぶ
- $m \equiv n \pmod{p}$ と仮定する
- このとき，ある $q \in \mathbb{Z}$ が存在して，$m - n = pq$
- したがって，$n - m = p \cdot (-q)$
- したがって，$n \equiv m \pmod{p}$ $\square$

$m \equiv n \pmod{p}$ の定義 (再掲)

ある $q \in \mathbb{Z}$ が存在して，$m - n = pq$

代表的な同値関係 (2)：推移性の証明

- 任意に $\ell, m, n \in \mathbb{N}$ を選ぶ
- $\ell \equiv m \pmod{p}$ および $m \equiv n \pmod{p}$ と仮定する
- $\ell \equiv m \pmod{p}$ から，ある $q_1 \in \mathbb{Z}$ が存在して，$\ell - m = pq_1$
- $m \equiv n \pmod{p}$ から，ある $q_2 \in \mathbb{Z}$ が存在して，$m - n = pq_2$
- したがって，$\ell - n = (\ell - m) + (m - n) = pq_1 + pq_2 = p(q_1 + q_2)$
- $q_1, q_2 \in \mathbb{Z}$ より，$q_1 + q_2 \in \mathbb{Z}$
- したがって，$\ell \equiv n \pmod{p}$ $\square$

$m \equiv n \pmod{p}$ の定義 (再掲)

ある $q \in \mathbb{Z}$ が存在して，$m - n = pq$

目次

今日のまとめ

関係とそれにまつわる概念

- 関係を理解する
- 関係の性質を理解する
  - 反射性，完全性，対称性，反対称性，推移性
- 特殊な関係を理解する
  - 順序 (半順序)，全順序，同値関係

- 登場した「関係」は「2 つのものの間の関係」だけだった
- 3 つのものの間の関係は？
- それ以上のものの間の関係は？

n 項関係とは？

n 項関係とは？（常識に基づく定義）

A 上の n 項関係は次のように定められるもの

- 関係を表す関数「$A^n \to \{ \bigcirc, \times \}$」がある
- 任意の $(x_1, \ldots, x_n) \in A^n$ に対して
  その関数の値が「○」か「×」のどちらかに決まる

この一般化の下で，講義で扱った「関係」は「二項関係」と呼ばれる．