離散数学 第 7 回
関数 (2)：全射と単射

岡本 吉央
okamotoy@uec.ac.jp

電気通信大学

2013 年 6 月 4 日

最終更新：2013 年 6 月 3 日　11:32

概要

今日の目標
- 特殊な関数「全射」,「単射」,「全単射」を理解する
- 全単射の逆関数を理解する

目次

マンツーマンディフェンス

全単射の例

新幹線の指定席

単射の例

目次

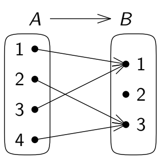
全射

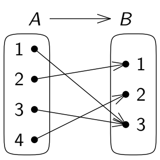
集合 A, B と関数 $f\colon A \to B$

全射とは？
f が**全射**であるとは，次を満たすこと

すべての $b \in B$ に対して，ある $a \in A$ が存在して $b = f(a)$

論理記号で書くと「$\forall\, b \in B\ (\exists\, a \in A\ (b = f(a)))$」

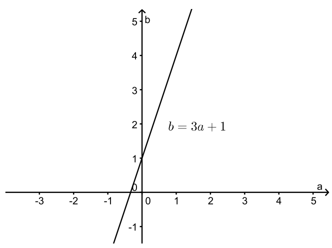




例題 1

例題 1
次の関数 $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ が全射であることを証明せよ．

任意の $a \in \mathbb{R}$ に対して $f(a) = 3a + 1$



例題 1：続き

例題 1

次の関数 $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ が全射であることを証明せよ．

任意の $a \in \mathbb{R}$ に対して $f(a) = 3a + 1$

定義に基づいて書き直す

すべての $b \in \mathbb{R}$ に対して，ある $a \in \mathbb{R}$ が存在して，$b = 3a + 1$

例題 1：論理操作

使える性質 (仮定)	導く性質 (目標)
	$\forall\, b \in \mathbb{R}\ (\exists\, a \in \mathbb{R}\ (b = 3a + 1))$

例題 1：論理操作

使える性質 (仮定)	導く性質 (目標)
$b \in \mathbb{R}$	$\cancel{\forall\, b \in \mathbb{R}\ (\exists\, a \in \mathbb{R}\ (b = 3a + 1))}$
	$\exists\, a \in \mathbb{R}\ (b = 3a + 1)$

$b \in \mathbb{R}$ **は任意に選ぶ**

導く性質が「$\forall$」で始まる構造

例題 1：論理操作

使える性質 (仮定)	導く性質 (目標)
$b \in \mathbb{R}$	$\cancel{\forall\, b \in \mathbb{R}\ (\exists\, a \in \mathbb{R}\ (b = 3a + 1))}$
$\frac{b-1}{3} \in \mathbb{R}$	$\exists\, a \in \mathbb{R}\ (b = 3a + 1)$

実数の性質から

例題 1：論理操作

使える性質 (仮定)	導く性質 (目標)
$b \in \mathbb{R}$	$\cancel{\forall\, b \in \mathbb{R}\ (\exists\, a \in \mathbb{R}\ (b = 3a + 1))}$
$\frac{b-1}{3} \in \mathbb{R}$	$\cancel{\exists\, a \in \mathbb{R}\ (b = 3a + 1)}$
	$b = 3(\frac{b-1}{3}) + 1$

$a = \frac{b-1}{3}$ **とする**

構成による証明 (導く性質が「$\exists$」で始まる構造)

例題 1：論理操作

使える性質 (仮定)	導く性質 (目標)
$b \in \mathbb{R}$	$\cancel{\forall\, b \in \mathbb{R}\ (\exists\, a \in \mathbb{R}\ (b = 3a + 1))}$
$\frac{b-1}{3} \in \mathbb{R}$	$\cancel{\exists\, a \in \mathbb{R}\ (b = 3a + 1)}$
	$\cancel{b = 3(\frac{b-1}{3}) + 1}$
	$b = b$

$a = \frac{b-1}{3}$ とする

式を整理

例題 1：文章構造

全射の定義から，「すべての $b \in \mathbb{R}$ に対して，ある $a \in \mathbb{R}$ が存在して，$b = 3a + 1$」となることを証明すればよい．

任意の $b \in \mathbb{R}$ を選ぶ．

このとき，$\frac{b-1}{3} \in \mathbb{R}$．
$a = \frac{b-1}{3}$ とすると，$a \in \mathbb{R}$ であり，$b = 3\frac{b-1}{3} + 1 = 3a + 1$．

したがって，「すべての $b \in \mathbb{R}$ に対して，ある $a \in \mathbb{R}$ が存在して，$b = 3a + 1$」となる．

したがって，f は全射である． □

注：これは「構成による証明」で，$\frac{b-1}{3}$ を構成した．
しかし，どうやって見つけたのかは証明に書かない．

例題 1：証明の清書

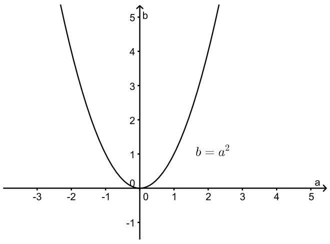
- 全射の定義から，「すべての $b \in \mathbb{R}$ に対して，ある $a \in \mathbb{R}$ が存在して，$b = 3a + 1$」となることを証明すればよい．
- 任意の $b \in \mathbb{R}$ を選ぶ．
- このとき，$\frac{b-1}{3} \in \mathbb{R}$．
- $a = \frac{b-1}{3}$ とすると，$a \in \mathbb{R}$ であり，$b = 3\frac{b-1}{3} + 1 = 3a + 1$．
- したがって，「すべての $b \in \mathbb{R}$ に対して，ある $a \in \mathbb{R}$ が存在して，$b = 3a + 1$」となる．
- したがって，f は全射である． □

例題 2

例題 2

次の関数 $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ が全射でないことを証明せよ．

任意の $a \in \mathbb{R}$ に対して $f(a) = a^2$



例題 2：続き

例題 2

次の関数 $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ が全射でないことを証明せよ．

任意の $a \in \mathbb{R}$ に対して $f(a) = a^2$

定義に基づいて書き直す

「すべての $b \in \mathbb{R}$ に対して，ある $a \in \mathbb{R}$ が存在して，$b = a^2$」ではない

同値変形によって書き直す

ある $b \in \mathbb{R}$ が存在して，どんな $a \in \mathbb{R}$ に対しても，$b \neq a^2$

復習（「$\forall$ の否定」と「$\exists$ の否定」）

$$\begin{aligned} \neg(\forall\, x\, (\exists\, y\, (P(x,y)))) &\Leftrightarrow \exists\, x\, (\neg(\exists\, y\, (P(x,y)))) \\ &\Leftrightarrow \exists\, x\, (\forall\, y\, (\neg P(x,y))) \end{aligned}$$

例題 2：論理操作

使える性質 (仮定)	導く性質 (目標)
	$\exists\, b \in \mathbb{R}\ (\forall\, a \in \mathbb{R}\ (b \neq a^2))$

例題 2：論理操作

使える性質 (仮定)	導く性質 (目標)
$-1 \in \mathbb{R}$	$\exists\, b \in \mathbb{R}\ (\forall\, a \in \mathbb{R}\ (b \neq a^2))$

実数の性質

例題 2：論理操作

使える性質 (仮定)	導く性質 (目標)
$-1 \in \mathbb{R}$	$\cancel{\exists\, b \in \mathbb{R}\ (\forall\, a \in \mathbb{R}\ (b \neq a^2))}$
	$\forall\, a \in \mathbb{R}\ (-1 \neq a^2)$

$b = -1$ とする

構成による証明 (導く性質が「$\exists$」で始まる構造)

例題 2：論理操作

使える性質 (仮定)	導く性質 (目標)
$-1 \in \mathbb{R}$	$\cancel{\exists\, b \in \mathbb{R}\ (\forall\, a \in \mathbb{R}\ (b \neq a^2))}$
$a \in \mathbb{R}$	$\cancel{\forall\, a \in \mathbb{R}\ (-1 \neq a^2)}$
	$-1 \neq a^2$

$b = -1$ とする
$a \in \mathbb{R}$ を任意に選ぶ

導く性質が「$\forall$」で始まる構造

例題 2：論理操作

使える性質 (仮定)	導く性質 (目標)
$-1 \in \mathbb{R}$	$\cancel{\exists\, b \in \mathbb{R}\ (\forall\, a \in \mathbb{R}\ (b \neq a^2))}$
$a \in \mathbb{R}$	$\cancel{\forall\, a \in \mathbb{R}\ (-1 \neq a^2)}$
$a^2 \geq 0$	$-1 \neq a^2$

$b = -1$ とする
$a \in \mathbb{R}$ を任意に選ぶ

実数の性質

例題 2：論理操作

使える性質 (仮定)	導く性質 (目標)
$-1 \in \mathbb{R}$	$\cancel{\exists\, b \in \mathbb{R}\ (\forall\, a \in \mathbb{R}\ (b \neq a^2))}$
$a \in \mathbb{R}$	$\cancel{\forall\, a \in \mathbb{R}\ (-1 \neq a^2)}$
$a^2 \geq 0$	$-1 \neq a^2$
$-1 \neq a^2$	

$b = -1$ とする
$a \in \mathbb{R}$ を任意に選ぶ

実数の性質

例題 2：文章構造

全射の定義から，「ある $b \in \mathbb{R}$ が存在して，どんな $a \in \mathbb{R}$ に対しても $b \neq a^2$」となることを証明すればよい．

$b = -1$ とすると，$b \in \mathbb{R}$．

$a \in \mathbb{R}$ を任意に選ぶ．

このとき，$a^2 \geq 0$．したがって，$-1 \neq a^2$．

したがって，「どんな $a \in \mathbb{R}$ に対しても $-1 \neq a^2$」．

したがって，「ある $b \in \mathbb{R}$ が存在して，どんな $a \in \mathbb{R}$ に対しても $b \neq a^2$」となる．

したがって，f は全射ではない． □

注：これも「構成による証明」で，-1 を構成した．
しかし，どうやって見つけたのかは証明に書かない．

例題 2：証明の清書

- 全射の定義から，「ある $b \in \mathbb{R}$ が存在して，どんな $a \in \mathbb{R}$ に対しても $b \neq a^2$」となることを証明すればよい．
- $b = -1$ とすると，$b \in \mathbb{R}$．
- $a \in \mathbb{R}$ を任意に選ぶ．
- このとき，$a^2 \geq 0$．したがって，$-1 \neq a^2$．
- したがって，「どんな $a \in \mathbb{R}$ に対しても $-1 \neq a^2$」．
- したがって，「ある $b \in \mathbb{R}$ が存在して，どんな $a \in \mathbb{R}$ に対しても $b \neq a^2$」となる．
- したがって，f は全射ではない． □

補足：反例

例題 2 (再掲)

次の関数 $f \colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ が全射でないことを証明せよ．

任意の $a \in \mathbb{R}$ に対して $f(a) = a^2$

定義と同値変形によって書き直した (再掲)

ある $b \in \mathbb{R}$ が存在して，どんな $a \in \mathbb{R}$ に対しても，$b \neq a^2$

- 証明は「$b = -1$」として，進んだ
- $b = -1$ は例題 2 の関数が全射であることの反例である
- 「$b = -1$」でなくても「$b = -2$」でもよかった

補足：始域・終域の違いと全射性の違い

見た目が同じでも，始域・終域が違うと全射かどうか変わるかも

次の 4 つの関数は全射か？

- $f_1 \colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$,　　$f_1(a) = a^2$
- $f_2 \colon \mathbb{R} \to [0, \infty)$,　　$f_2(a) = a^2$
- $f_3 \colon [0, \infty) \to [0, \infty)$,　　$f_3(a) = a^2$
- $f_4 \colon [0, 1] \to [0, \infty)$,　　$f_4(a) = a^2$

格言 (再掲)

関数の始域と終域を常に意識　　(似たものに「行列のサイズ」がある)

目次

単射

集合 A, B と関数 $f \colon A \to B$

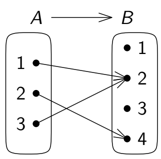
単射とは？

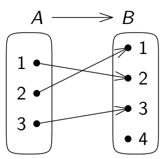
f が単射であるとは，次を満たすこと

すべての $a, a' \in A$ に対して，　$f(a) = f(a')$ ならば $a = a'$

論理記号で書くと「$\forall\, a, a' \in A\ ((f(a) = f(a')) \to (a = a'))$」

もっと正確に書くと「$\forall\, a \in A\ (\forall\, a' \in A\ (((f(a) = f(a')) \to (a = a')))$」





例題 3

例題 3

次の関数 $f \colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ が単射であることを証明せよ．

任意の $a \in \mathbb{R}$ に対して $f(a) = 3a + 1$

定義に基づいて書き直す

すべての $a, a' \in \mathbb{R}$ に対して，$3a + 1 = 3a' + 1$ ならば $a = a'$

例題 3：論理操作

使える性質 (仮定)	導く性質 (目標)
	$\forall\, a, a' \in \mathbb{R}\ ((3a + 1 = 3a' + 1) \to (a = a'))$

例題 3：論理操作

使える性質 (仮定)	導く性質 (目標)
$a, a' \in \mathbb{R}$	$\cancel{\forall\, a, a' \in \mathbb{R}\ ((3a+1 = 3a'+1) \to (a = a'))}$
	$(3a+1 = 3a'+1) \to (a = a')$

$a, a' \in \mathbb{R}$ は任意に選ぶ

導く性質が「$\forall$」で始まる構造

例題 3：論理操作

使える性質 (仮定)	導く性質 (目標)
$a, a' \in \mathbb{R}$	$\cancel{\forall\, a, a' \in \mathbb{R}\ ((3a+1 = 3a'+1) \to (a = a'))}$
$3a+1 = 3a'+1$	$\cancel{(3a+1 = 3a'+1) \to (a = a')}$
	$a = a'$

導く性質が「○○ $\to$ △△」の構造

例題 3：論理操作

使える性質 (仮定)	導く性質 (目標)
$a, a' \in \mathbb{R}$	$\cancel{\forall\, a, a' \in \mathbb{R}\ ((3a+1 = 3a'+1) \to (a = a'))}$
$3a+1 = 3a'+1$	$\cancel{(3a+1 = 3a'+1) \to (a = a')}$
$a = a'$	$a = a'$

実数の性質

例題 3：文章構造

単射の定義から，「すべての $a, a' \in \mathbb{R}$ に対して，$3a+1 = 3a'+1$ ならば $a = a'$」となることを証明すればよい．

> 任意の $a, a' \in \mathbb{R}$ を考える．
>
> > $3a+1 = 3a'+1$ であると仮定する．
> >
> > > このとき，$a = a'$．
> >
> > したがって，「$3a+1 = 3a'+1$ ならば $a = a'$」となる．
>
> したがって，「すべての $a, a' \in \mathbb{R}$ に対して，$3a+1 = 3a'+1$ ならば $a = a'$」となる．

したがって，f は単射である． □

清書は省略 (各自行う)

例題 4

例題 4

次の関数 $f \colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ が単射でないことを証明せよ．

任意の $a \in \mathbb{R}$ に対して $f(a) = a^2$

定義に基づいて書き直す

「すべての $a, a' \in \mathbb{R}$ に対して，$a^2 = a'^2$ ならば $a = a'$」ではない

例題 4：続き

定義に基づいて書き直す (再掲)

「すべての $a, a' \in \mathbb{R}$ に対して，$a^2 = a'^2$ ならば $a = a'$」ではない

同値変形によって書き直す

ある $a, a' \in \mathbb{R}$ に対して，$a^2 = a'^2$ かつ $a \neq a'$

復習 (「$\exists$ の否定」，「含意の書換」，「ド・モルガンの法則」，「二重否定」)

$$
\begin{aligned}
\neg(\forall\, x\ (\forall\, y\ (P(x,y) \to Q(x,y)))) &\Leftrightarrow \exists\, x\ (\neg(\forall\, y\ (P(x,y) \to Q(x,y)))) \\
&\Leftrightarrow \exists\, x\ (\exists\, y\ (\neg(P(x,y) \to Q(x,y)))) \\
&\Leftrightarrow \exists\, x\ (\exists\, y\ (\neg(\neg P(x,y) \lor Q(x,y)))) \\
&\Leftrightarrow \exists\, x\ (\exists\, y\ (\neg\neg P(x,y) \land \neg Q(x,y))) \\
&\Leftrightarrow \exists\, x\ (\exists\, y\ (P(x,y) \land \neg Q(x,y)))
\end{aligned}
$$

例題 4：論理操作

使える性質 (仮定)	導く性質 (目標)
	$\exists\, a, a' \in \mathbb{R}\ (a^2 = a'^2 \land a \neq a')$

例題 4：論理操作

使える性質 (仮定)	導く性質 (目標)
$1 \in \mathbb{R}$	$\exists\, a, a' \in \mathbb{R}\ (a^2 = a'^2 \land a \neq a')$
$-1 \in \mathbb{R}$	

実数の性質

例題 4：論理操作

使える性質 (仮定)	導く性質 (目標)
$1 \in \mathbb{R}$	$\cancel{\exists\, a, a' \in \mathbb{R}\ (a^2 = a'^2 \wedge a \neq a')}$
$-1 \in \mathbb{R}$	$a^2 = a'^2 \wedge a \neq a'$
$a = 1$	
$a' = -1$	

$a = 1$，$a' = -1$ とおく

導く性質が「∃」で始まる構造

証明する目標が「○○ ∧ △△」の場合

○○と△△を別々に証明する

例題 4：論理操作

使える性質 (仮定)	導く性質 (目標)
$1 \in \mathbb{R}$	$\cancel{\exists\, a, a' \in \mathbb{R}\ (a^2 = a'^2 \wedge a \neq a')}$
$-1 \in \mathbb{R}$	$\cancel{a^2 = a'^2 \wedge a \neq a'}$
$a = 1$	$a^2 = a'^2$
$a' = 1$	

使える性質 (仮定)	導く性質 (目標)
$1 \in \mathbb{R}$	$a \neq a'$
$-1 \in \mathbb{R}$	
$a = 1$	
$a' = -1$	

例題 4 (前半)：論理操作

使える性質 (仮定)	導く性質 (目標)
$1 \in \mathbb{R}$	$\cancel{\exists\, a, a' \in \mathbb{R}\ (a^2 = a'^2 \wedge a \neq a')}$
$-1 \in \mathbb{R}$	$\cancel{a^2 = a'^2 \wedge a \neq a'}$
$a = 1$	$a^2 = a'^2$
$a' = -1$	
$a^2 = 1$	

実数の性質

例題 4 (前半)：論理操作

使える性質 (仮定)	導く性質 (目標)
$1 \in \mathbb{R}$	$\cancel{\exists\, a, a' \in \mathbb{R}\ (a^2 = a'^2 \wedge a \neq a')}$
$-1 \in \mathbb{R}$	$\cancel{a^2 = a'^2 \wedge a \neq a'}$
$a = 1$	$a^2 = a'^2$
$a' = -1$	
$a^2 = 1$	
$a'^2 = 1$	

実数の性質

例題 4 (前半)：論理操作

使える性質 (仮定)	導く性質 (目標)
$1 \in \mathbb{R}$	$\cancel{\exists\, a, a' \in \mathbb{R}\ (a^2 = a'^2 \wedge a \neq a')}$
$-1 \in \mathbb{R}$	$\cancel{a^2 = a'^2 \wedge a \neq a'}$
$a = 1$	$a^2 = a'^2$
$a' = -1$	
$a^2 = 1$	
$a'^2 = 1$	
$a^2 = a'^2$	

等号の性質

例題 4 (後半)：論理操作

使える性質 (仮定)	導く性質 (目標)
$1 \in \mathbb{R}$	$a \neq a'$
$-1 \in \mathbb{R}$	
$a = 1$	
$a' = -1$	
$a \neq a'$	

等号の性質

例題 4：文章構造

単射の定義から，「ある $a, a' \in \mathbb{R}$ に対して，$a^2 = a'^2$ かつ $a \neq a'$」となることを証明すればよい．

$a = 1, a' = -1$ とすると，$a, a' \in \mathbb{R}$．

このとき，$a^2 = 1$ かつ $a'^2 = 1$ なので，$a^2 = a'^2$．
そして，$a \neq a'$．

したがって，「ある $a, a' \in \mathbb{R}$ に対して，$a^2 = a'^2$ かつ $a \neq a'$」となる．

したがって，f は単射ではない． □

補足：始域・終域の違いと単射性の違い

見た目が同じでも，始域・終域が違うと単射かどうか変わるかも

次の 4 つの関数は単射か？

- $f_1 \colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$，　$f_1(a) = a^2$
- $f_2 \colon \mathbb{R} \to [0, \infty)$，　$f_2(a) = a^2$
- $f_3 \colon [0, \infty) \to [0, \infty)$，　$f_3(a) = a^2$
- $f_4 \colon [0, 1] \to [0, \infty)$，　$f_4(a) = a^2$

格言 (再々掲)

関数の始域と終域を常に意識　　(似たものに「行列のサイズ」がある)

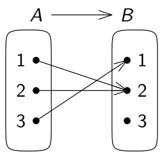
目次

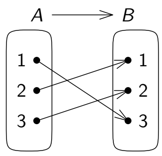
全単射

集合 A, B と関数 $f\colon A \to B$

全単射とは？

f が**全単射**であるとは，全射であり，かつ，単射であること





逆関数

集合 A, B と**全単射** $f\colon A \to B$

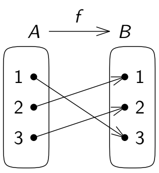
逆関数とは？

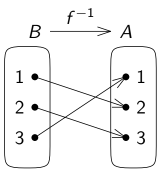
f の**逆関数**とは $f^{-1}\colon B \to A$ で，

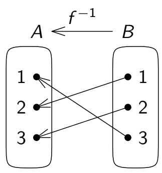
$$\text{任意の } a \in A,\ b \in B \text{ に対して } a = f^{-1}(b) \text{ と } b = f(a) \text{ が同値}$$

となるもののことである

論理記号で書くと「$\forall\, a \in A\ (\forall\, b \in B\ (a = f^{-1}(b) \leftrightarrow b = f(a)))$」







例題 5

例題 5

次の関数 $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

$$\text{任意の } a \in \mathbb{R} \text{ に対して } f(a) = 3a + 1$$

は全単射であるが (例題 1，3)，その逆関数 $f^{-1}\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ が

$$\text{任意の } b \in \mathbb{R} \text{ に対して } f^{-1}(b) = \frac{b-1}{3}$$

で与えられることを証明せよ．

証明：同値変形により証明する．

$$b = f(a) \Leftrightarrow b = 3a + 1 \Leftrightarrow a = \frac{b-1}{3} \Leftrightarrow a = f^{-1}(b).$$

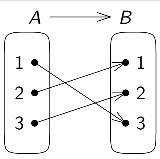
□

逆関数と逆像：注意

注意

関数 $f\colon A \to B$

- $Y \subseteq B$ のとき，$f^{-1}(Y)$ は Y の逆像
  - f が全単射であろうがなかろうが定義される
- $b \in B$ のとき，$f^{-1}(b)$ は f の逆関数 f^{-1} の b における値
  - f が全単射であるときのみ定義される



- $f^{-1}(\{1, 2\}) = \{2, 3\}$
- $f^{-1}(\{2\}) = \{3\}$
- $f^{-1}(2) = 3$

もう一つ注意

全単射の逆関数も全単射 (演習問題)

目次

今日のまとめ

関数とそれにまつわる概念

- 全射，単射，全単射
- 全単射の逆関数

証明の作り方

- 「ではない」ことの証明で使う 反例 (構成による証明)