離散数学 第 6 回
関数 (1)：関数，像と逆像

岡本 吉央
okamotoy@uec.ac.jp

電気通信大学

2013 年 5 月 28 日

最終更新：2013 年 6 月 5 日　10:43

概要

今日の目標

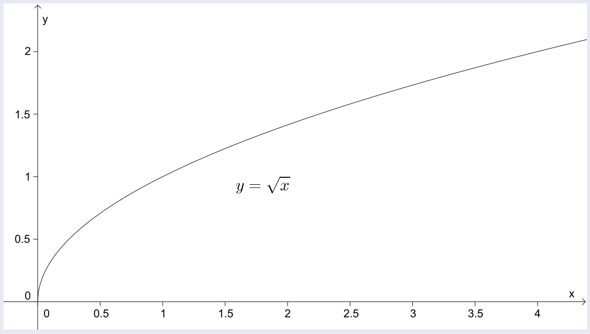
- 関数 (写像) の定義と記法を理解し，使えるようになる
- 関数の像と逆像，関数の合成を理解する

目次

関数と言って思い浮かべるものは？ (1)

数学 (?) の「関数」

関数 $y = \sqrt{x}$



関数と言って思い浮かべるものは？ (2)

プログラミングの「関数」

```
int sum(int a, int b) {
  return a + b;
}

int absolute_value(int a) {
  if (a < 0) {
    return -a;
  } else {
    return a;
  }
}
```


関数とは

関数とは？

- 集合が 2 つある (A と B とする)
- A の 1 つ 1 つの要素を B のある要素に「移す」

数学的に関数を定義すると？

- 任意の $a \in A$ に対して，ある $b \in B$ が一意に (ただ一つ) 存在して，a を b に移す

記法は？

- 関数 $f : A \to B$
- 任意の $a \in A$ に対して，ある $b \in B$ が一意に存在して，$f(a) = b$

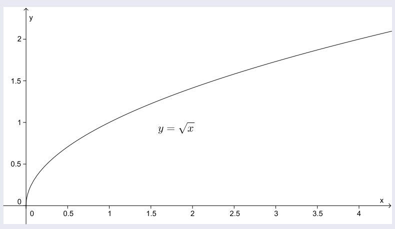
注：f によって a を移したものを $f(a)$ と書く

「関数」を「写像」とも呼ぶ

関数と言って思い浮かべるものは？ (1) 再掲

数学 (?) の「関数」

関数 $y = \sqrt{x}$



- $f : [0, +\infty) \to [0, +\infty)$
- すべての $x \in [0, +\infty)$ に対して $f(x) = \sqrt{x}$

関数と言って思い浮かべるものは？ (2) 再掲

プログラミングの「関数」

```
int sum(int a, int b) {
  return a + b;
}
```

- $\mathrm{sum} : \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$
- すべての $(a, b) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ に対して $\mathrm{sum}((a, b)) = a + b$

関数と言って思い浮かべるものは？ (2) 再掲 (続)

プログラミングの「関数」

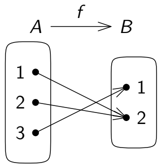
```
int absolute_value(int a) {
  if (a < 0) {
    return -a;
  } else {
    return a;
  }
}
```

- absolute_value: $\mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$
- すべての $a \in \mathbb{Z}$ に対して
  $a < 0$ のとき absolute_value$(a) = -a$
  そうでないとき absolute_value$(a) = a$

関数の例

- $A = \{1, 2, 3\}$, $B = \{1, 2\}$
- 関数 $f\colon A \to B$ を次のように定義
  - $f(1) = 2$, $f(2) = 2$, $f(3) = 1$

$f(1) = 2$
$f(2) = 2$
$f(3) = 1$



a	$f(a)$
1	2
2	2
3	1

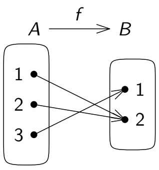
$1 \overset{f}{\mapsto} 2$
$2 \overset{f}{\mapsto} 2$
$3 \overset{f}{\mapsto} 1$

関数にまつわる記法と用語

集合 A, B と関数 $f\colon A \to B$

- $A \overset{f}{\to} B$
- $b = f(a)$ のとき「$f\colon a \mapsto b$」や「$a \overset{f}{\mapsto} b$」
- $f(a)$ を a における f の**値**という
- A を f の**始域** (または**定義域**) という
- B を f の**終域** という

$f(1) = 2$
$f(2) = 2$
$f(3) = 1$



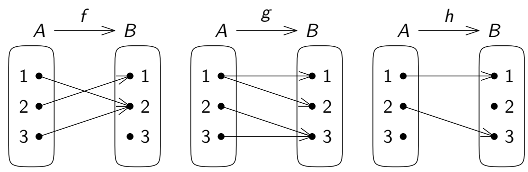
a	$f(a)$
1	2
2	2
3	1

$1 \overset{f}{\mapsto} 2$
$2 \overset{f}{\mapsto} 2$
$3 \overset{f}{\mapsto} 1$

格言

関数の始域と終域を常に意識　　(似たものに「行列のサイズ」がある)

問題：次の図の中で関数を表すものは？



2 つの関数が等しいということ

集合 A, B, C, D と関数 $f\colon A \to B$, $g\colon C \to D$

f と g が等しいとは？

関数 f と g が等しいことを「$f = g$」と書き，次の条件がすべて成り立つことと定義する

- $A = C$ 　　(f と g の始域が等しい)
- $B = D$ 　　(f と g の終域が等しい)
- すべての $a \in A$ に対して，$f(a) = g(a)$ 　　(関数の値が等しい)

恒等関数

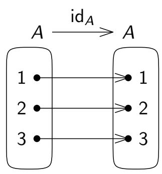
集合 A と関数 $f\colon A \to A$

恒等関数とは？

f が**恒等関数**であるとは，
任意の $a \in A$ に対して $a = f(a)$ であること

- $A \to A$ の恒等関数を id_A と書くこともある
- 例：$A = \{1, 2, 3\}$ のとき $f\colon A \to A$ で

$$f(1) = 1, \quad f(2) = 2, \quad f(3) = 3$$



目次

関数の像

$f\colon A \to B$ を関数とする

像とは？

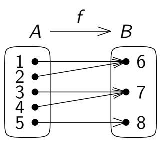
f による部分集合 $X \subseteq A$ の**像**を $f(X)$ と書き

$$f(X) = \{b \mid b \in B \text{ かつ，ある } a \in X \text{ が存在して } b = f(a)\}$$

注意

- X は A の**部分集合** (A の要素ではない)
- $f(X)$ は B の部分集合

例



- $f(\{1, 2\}) = \{6\}$
- $f(\{1, 2, 3\}) = \{6, 7\}$
- $f(\{1, 2, 3, 4\}) = \{6, 7\}$
- $f(\{1, 2, 3, 4, 5\}) = \{6, 7, 8\}$
- $f(\{2\}) = \{6\}$

関数の像：例をより詳細に

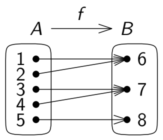
$f\colon A \to B$ を関数とする

像とは？

f による部分集合 $X \subseteq A$ の**像**を $f(X)$ と書き

$$f(X) = \{b \mid b \in B \text{ かつ，ある } a \in X \text{ が存在して } b = f(a)\}$$

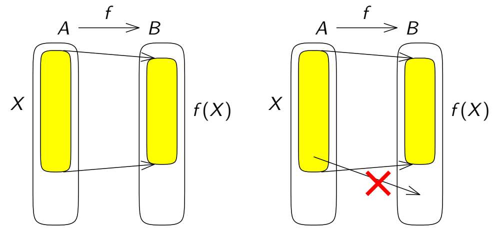
例：$f(\{1,2,3\})$ は？



- $6 \in f(\{1,2,3\})$ か？
  - $6 = f(1)$ なので YES
- $7 \in f(\{1,2,3\})$ か？
  - $7 = f(3)$ なので YES
- $8 \in f(\{1,2,3\})$ か？
  - $8 \neq f(1), 8 \neq f(2), 8 \neq f(3)$ なので NO

したがって，$f(\{1,2,3\}) = \{6,7\}$

関数の像：図による直感



関数の逆像

$f\colon A \to B$ を関数とする

逆像とは？

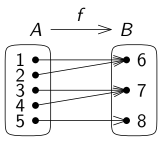
f による部分集合 $Y \subseteq B$ の**逆像** (または原像) を $f^{-1}(Y)$ と書き

$$f^{-1}(Y) = \{a \mid a \in A \text{ かつ，ある } b \in Y \text{ が存在して } b = f(a)\}$$

注意

- Y は B の**部分集合** (B の要素ではない)
- $f^{-1}(Y)$ は A の部分集合

例



- $f^{-1}(\{6\}) = \{1,2\}$
- $f^{-1}(\{6,7\}) = \{1,2,3,4\}$
- $f^{-1}(\{6,7,8\}) = \{1,2,3,4,5\}$
- $f^{-1}(\{7,8\}) = \{3,4,5\}$
- $f^{-1}(\{6,8\}) = \{1,2,5\}$

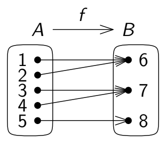
関数の逆像：例をより詳細に

逆像とは？

f による部分集合 $Y \subseteq B$ の**逆像** (または原像) を $f^{-1}(Y)$ と書き

$$f^{-1}(Y) = \{a \mid a \in A \text{ かつ，ある } b \in Y \text{ が存在して } b = f(a)\}$$

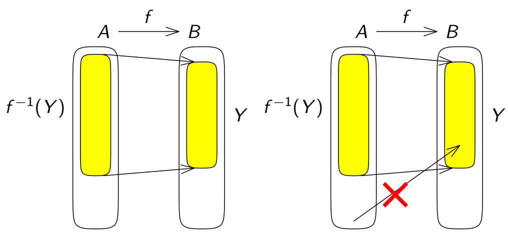
例：$f^{-1}(\{6,7\})$ は？



- $1 \in f^{-1}(\{6,7\})$ か？
  - $6 = f(1)$ なので YES
- $2 \in f^{-1}(\{6,7\})$ か？
  - $6 = f(2)$ なので YES
- $3 \in f^{-1}(\{6,7\})$ か？
  - $7 = f(3)$ なので YES
- $4 \in f^{-1}(\{6,7\})$ か？
  - $7 = f(4)$ なので YES
- $5 \in f^{-1}(\{6,7\})$ か？
  - $6 \neq f(5)$，$7 \neq f(5)$ なので NO

したがって，$f^{-1}(\{6,7\}) = \{1,2,3,4\}$

関数の逆像：図による直感



目次

関数の合成

集合 A, B, C と関数 $f\colon A \to B$, $g\colon B \to C$

関数の合成とは？

関数 f と g の合成を $g \circ f\colon A \to C$ と表記し，任意の $x \in A$ に対して

$$(g \circ f)(x) = g(f(x))$$

とすることで定義する

注意：f の終域と g の始域が同じでないといけない
(同じでないときは合成を定義できない)

関数の合成：例

- $A = \{1,2,3\}$, $B = \{4,5,6,7\}$, $C = \{8,9\}$
- 関数 $f\colon A \to B$ を次で定義
  - $f(1) = 5$, $f(2) = 4$, $f(3) = 7$
- 関数 $g\colon B \to C$ を次で定義
  - $g(4) = 8$, $g(5) = 9$, $g(6) = 9$, $g(7) = 8$

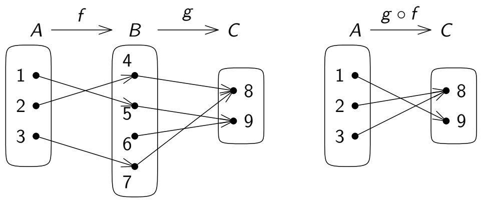
このとき，$g \circ f\colon A \to C$ を考えると，

$$(g \circ f)(3) = g(f(3)) = g(7) = 8$$

関数の合成：例 (続)

- $A = \{1, 2, 3\}$, $B = \{4, 5, 6, 7\}$, $C = \{8, 9\}$
- 関数 $f : A \to B$ を次で定義
  - $f(1) = 5$, $f(2) = 4$, $f(3) = 7$
- 関数 $g : B \to C$ を次で定義
  - $g(4) = 8$, $g(5) = 9$, $g(6) = 9$, $g(7) = 8$

このとき，$g \circ f : A \to C$ を考えると，



目次

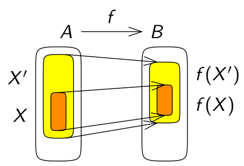
例題

次を証明したい

任意の集合 A, B，任意の関数 $f : A \to B$，任意の $X, X' \subseteq A$ に対して

$$X \subseteq X' \text{ ならば } f(X) \subseteq f(X')$$

図による直感



部分集合の定義に基づいて書き直す

$$\forall\, x\ (x \in X \to x \in X') \to \forall\, y\ (y \in f(X) \to y \in f(X'))$$

例題：論理操作

使える性質 (仮定)	導く性質 (目標)
$\forall\, x\ (x \in X \to x \in X')$	$\forall\, y\ (y \in f(X) \to y \in f(X'))$

例題：論理操作

使える性質 (仮定)	導く性質 (目標)
$\forall\, x\ (x \in X \to x \in X')$	$\cancel{\forall\, y\ (y \in f(X) \to y \in f(X'))}$
	$y \in f(X) \to y \in f(X')$

y は任意に固定

「目標」の構造を見る

例題：論理操作

使える性質 (仮定)	導く性質 (目標)
$\forall\, x\ (x \in X \to x \in X')$	$\cancel{\forall\, y\ (y \in f(X) \to y \in f(X'))}$
$y \in f(X)$	$\cancel{y \in f(X) \to y \in f(X')}$
	$y \in f(X')$

「目標」の構造を見る

例題：文章構造

部分集合の定義から「任意の x に対して『$x \in X$ ならば $x \in X'$』」ならば,「任意の y に対して『$y \in f(X)$ ならば $y \in f(X')$』」となることを証明すればよい．

任意の要素 y を選び，$y \in f(X)$ と仮定する．

⟨ ここで $y \in f(X')$ を結論として導く．⟩

したがって，$y \in f(X)$ ならば $y \in f(X')$ となる．

したがって，$X \subseteq X'$ ならば $f(X) \subseteq f(X')$ となる． □

例題：論理操作

使える性質 (仮定)	導く性質 (目標)
$\forall\, x\ (x \in X \to x \in X')$	$\cancel{\forall\, y\ (y \in f(X) \to y \in f(X'))}$
$y \in f(X)$	$\cancel{y \in f(X) \to y \in f(X')}$
$\exists\, z \in X\ (y = f(z))$	$y \in f(X')$

像の定義に基づいて書き直す

例題：論理操作

使える性質 (仮定)	導く性質 (目標)
$\forall x\ (x \in X \to x \in X')$	$\cancel{\forall y\ (y \in f(X) \to y \in f(X'))}$
$y \in f(X)$	$\cancel{y \in f(X) \to y \in f(X')}$
$\exists z \in X\ (y = f(z))$	$\cancel{y \in f(X')}$
	$\exists z' \in X'\ (y = f(z'))$

像の定義に基づいて書き直す

例題：文章構造

部分集合の定義から「任意の x に対して『$x \in X$ ならば $x \in X'$』ならば，「任意の y に対して『$y \in f(X)$ ならば $y \in f(X')$』となることを証明すればよい．

任意の要素 y を選び，$y \in f(X)$ と仮定する．

像の定義から，ある $z \in X$ が存在して $y = f(z)$ となる．
像の定義から，ある $z' \in X'$ が存在して $y = f(z')$ となることを証明すればよい．

〈 ここで「ある $z' \in X'$ が存在して $y = f(z')$」を導く．〉

したがって，$y \in f(X')$ となる．

したがって，$y \in f(X)$ ならば $y \in f(X')$ となる．

したがって，$X \subseteq X'$ ならば $f(X) \subseteq f(X')$ となる．□

例題：論理操作 — 目標の確認

使える性質 (仮定)	導く性質 (目標)
$\forall x\ (x \in X \to x \in X')$	$\cancel{\forall y\ (y \in f(X) \to y \in f(X'))}$
$y \in f(X)$	$\cancel{y \in f(X) \to y \in f(X')}$
$\exists z \in X\ (y = f(z))$	$\cancel{y \in f(X')}$
	$\exists z' \in X'\ (y = f(z'))$

- $y = f(z')$ となる $z' \in X$ が存在することを証明したい
- 方針：そのような z' を自分で見つける
- (構成による証明と呼ばれる)

例題：論理操作

使える性質 (仮定)	導く性質 (目標)
$\forall x\ (x \in X \to x \in X')$	$\cancel{\forall y\ (y \in f(X) \to y \in f(X'))}$
$y \in f(X)$	$\cancel{y \in f(X) \to y \in f(X')}$
$\exists z \in X\ (y = f(z))$	$\cancel{y \in f(X')}$
	$\exists z' \in X'\ (y = f(z'))$

仮定に ∃ があるときに使える推論

推論：存在例化

$P(a)$ が成り立つような任意の $a \in D$ に対して

$$\exists x \in D\ (P(x)) \Rightarrow P(a)$$

例題：論理操作

使える性質 (仮定)	導く性質 (目標)
$\forall x\ (x \in X \to x \in X')$	$\cancel{\forall y\ (y \in f(X) \to y \in f(X'))}$
$y \in f(X)$	$\cancel{y \in f(X) \to y \in f(X')}$
$\exists z \in X\ (y = f(z))$	$\cancel{y \in f(X')}$
$y = f(a)$	$\exists z' \in X'\ (y = f(z'))$
$a \in X$	

$y = f(a)$ を満たす $a \in X$ が存在するので，それを考える

例題：文章構造

…

任意の要素 y を選び，$y \in f(X)$ と仮定する．

像の定義から，ある $z \in X$ が存在して $y = f(z)$ となる．
像の定義から，ある $z' \in X'$ が存在して $y = f(z')$ となることを証明すればよい．

$y = f(a)$ となる $a \in X$ を考える．
〈 ここで「ある $z' \in X'$ が存在して $y = f(z')$」を導く．〉

したがって，$y \in f(X')$ となる．

したがって，$y \in f(X)$ ならば $y \in f(X')$ となる．

したがって，$X \subseteq X'$ ならば $f(X) \subseteq f(X')$ となる．□

例題：論理操作

使える性質 (仮定)	導く性質 (目標)
$\forall x\ (x \in X \to x \in X')$	$\cancel{\forall y\ (y \in f(X) \to y \in f(X'))}$
$y \in f(X)$	$\cancel{y \in f(X) \to y \in f(X')}$
$\exists z \in X\ (y = f(z))$	$\cancel{y \in f(X')}$
$y = f(a)$	$\exists z' \in X'\ (y = f(z'))$
$a \in X$	
$a \in X \to a \in X'$	

全称例化：任意の $a \in D$ に対して「$\forall x \in D\ (P(x)) \Rightarrow P(a)$」

例題：文章構造

使える性質 (仮定)	導く性質 (目標)
$\forall x\ (x \in X \to x \in X')$	$\cancel{\forall y\ (y \in f(X) \to y \in f(X'))}$
$y \in f(X)$	$\cancel{y \in f(X) \to y \in f(X')}$
$\exists z \in X\ (y = f(z))$	$\cancel{y \in f(X')}$
$y = f(a)$	$\exists z' \in X'\ (y = f(z'))$
$a \in X$	
$a \in X \to a \in X'$	
$a \in X'$	

モードゥス・ポネンス：$P \wedge (P \to Q) \Rightarrow Q$

例題：文章構造

…

任意の要素 y を選び，$y \in f(X)$ と仮定する．

…

$y = f(a)$ となる $a \in X$ を考える．
$a \in X$ と「任意の x に対して『$x \in X$ ならば $x \in X'$』」から，
$a \in X'$ となる．
ここで「ある $z' \in X'$ が存在して $y = f(z')$」を結論として導く．

したがって，$y \in f(X')$ となる．

したがって，$y \in f(X)$ ならば $y \in f(X')$ となる．

したがって，$X \subseteq X'$ ならば $f(X) \subseteq f(X')$ となる．□

例題：論理操作

使える性質（仮定）	導く性質（目標）
$\forall\, x\ (x \in X \to x \in X')$	$\cancel{\forall\, y\ (y \in f(X) \to y \in f(X'))}$
$y \in f(X)$	$\cancel{y \in f(X) \to y \in f(X')}$
$\exists\, z \in X\ (y = f(z))$	$\cancel{y \in f(X')}$
$y = f(a)$	$\cancel{\exists\, z' \in X'\ (y = f(z'))}$
$a \in X$	$y = f(a)$
$a \in X \to a \in X'$	
$a \in X'$	

z' として a を選んだ

構成

例題：論理操作

使える性質（仮定）	導く性質（目標）
$\forall\, x\ (x \in X \to x \in X')$	$\cancel{\forall\, y\ (y \in f(X) \to y \in f(X'))}$
$y \in f(X)$	$\cancel{y \in f(X) \to y \in f(X')}$
$\exists\, z \in X\ (y = f(z))$	$\cancel{y \in f(X')}$
$y = f(a)$	$\cancel{\exists\, z' \in X'\ (y = f(z'))}$
$a \in X$	$y = f(a)$
$a \in X \to a \in X'$	
$a \in X'$	

例題：文章構造

…

任意の要素 y を選び，$y \in f(X)$ と仮定する．

…

$y = f(a)$ となる $a \in X$ を考える．
$a \in X$ と「任意の x に対して『$x \in X$ ならば $x \in X'$』」から，
$a \in X'$ となる．
$a \in X'$ なので，$z' = a$ とすると，$y = f(z')$ となる．
したがって，「ある $z' \in X'$ が存在して $y = f(z')$」となる．

したがって，$y \in f(X')$ となる．

したがって，$y \in f(X)$ ならば $y \in f(X')$ となる．

したがって，$X \subseteq X'$ ならば $f(X) \subseteq f(X')$ となる．□

例題：証明の清書

- 部分集合の定義から「任意の x に対して『$x \in X$ ならば $x \in X'$』ならば，「任意の y に対して『$y \in f(X)$ ならば $y \in f(X')$』」となることを証明すればよい．
- 任意の要素 y を選び，$y \in f(X)$ と仮定する．
- 像の定義から，ある $z \in X$ が存在して $y = f(z)$ となる．
- 像の定義から，ある $z' \in X'$ が存在して $y = f(z')$ となることを証明すればよい．
- $y = f(a)$ となる $a \in X$ を考える．
- $a \in X$ と「任意の x に対して『$x \in X$ ならば $x \in X'$』」から，$a \in X'$ となる．
- $a \in X'$ なので，$z' = a$ とすると，$y = f(z')$ となる．
- したがって，「ある $z' \in X'$ が存在して $y = f(z')$」となる．
- したがって，$y \in f(X')$ となる．
- したがって，$y \in f(X)$ ならば $y \in f(X')$ となる．
- したがって，$X \subseteq X'$ ならば $f(X) \subseteq f(X')$ となる．□

目次

今日のまとめ

関数とそれにまつわる概念
- 関数（写像）の定義と記法
- 関数の像と逆像，関数の合成

証明法
- 構成による証明

余談：「関数」という用語

『数学の言葉づかい 100』（日本評論社，1999 年）58 ページより

関数の用語 functio は 17 世紀末ライプニッツにより初めて用いられた．

（中略）

関数がよく f で表されるのはこれにちなむもので，各国語でもこのラテン語の直訳として function, Funktion, fonction,（中略）などが用いられている．わが国へは中国で音訳された函数が輸入され，現在では代用漢字による関数があてられて，初等教育の段階でほぼ定着した．