離散数学 第 5 回
集合と論理 (5)：集合の演算など

岡本 吉央
okamotoy@uec.ac.jp

電気通信大学

2013 年 5 月 21 日

最終更新：2013 年 5 月 20 日　16:26

概要

今日の目標

- 部分集合について理解を深める
- 集合の直積と冪集合 (べき集合) を理解する

目次

例題 1

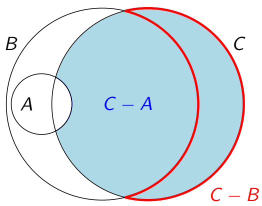
例題 1：次を証明せよ

任意の集合 A, B, C に対して

$$A \subseteq B \text{ ならば } C - B \subseteq C - A$$

が成立する．

オイラー図による直観

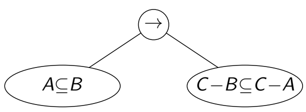


例題 1：構造を把握する

証明したいこと

$$A \subseteq B \text{ ならば } C - B \subseteq C - A$$

論理構造



証明する目標が「〇〇 → △△」の場合 (復習)

- 文章構造：「〇〇を仮定する」として，△△を証明する
- 論理操作：〇〇であることを仮定して，△△を証明する

例題 1：文章構造

$A \subseteq B$ であると仮定する．

〈 ここで「$C - B \subseteq C - A$」を結論として導く． 〉

したがって，$A \subseteq B$ ならば $C - B \subseteq C - A$ となる．　□

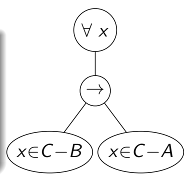
例題 1：論理操作

使える性質 (仮定)	導く性質 (目標)
$A \subseteq B$	$\cancel{C - B \subseteq C - A}$
	$\forall\, x\, (x \in C - B \rightarrow x \in C - A)$

部分集合の定義に基づいて目標を書き直してみる

証明する目標が「$\forall\, x \in D$ (〇〇)」の場合 (復習)

- 文章構造：「$x \in D$ を任意に選ぶ」として，〇〇を証明する
- 論理操作：「$x \in D$」であることを仮定して，〇〇を証明する



例題 1：論理操作

使える性質 (仮定)	導く性質 (目標)
$A \subseteq B$	$\cancel{C - B \subseteq C - A}$
$x \in C - B$	$\cancel{\forall\, x\, (x \in C - B \rightarrow x \in C - A)}$
	$\cancel{x \in C - B \rightarrow x \in C - A}$
	$x \in C - A$

x は任意

証明する目標が「〇〇 → △△」の場合 (復習)

- 文章構造：「〇〇を仮定する」として，△△を証明する
- 論理操作：〇〇であることを仮定して，△△を証明する

例題 1：文章構造

$A \subseteq B$ であると仮定する．
部分集合の定義より，任意の x に対して，$x \in C - B$ ならば $x \in C - A$ であることを証明すればよい．
x を任意に選び，$x \in C - B$ と仮定する．
〈 ここで「$x \in C - A$」を結論として導く．〉
したがって，$x \in C - B$ ならば $x \in C - A$ となる．
したがって，$C - B \subseteq C - A$ となる．
したがって，$A \subseteq B$ ならば $C - B \subseteq C - A$ となる． □

例題 1：論理操作 (整理)

使える性質 (仮定)	導く性質 (目標)
$A \subseteq B$	$x \in C - A$
$x \in C - B$	

x は任意

例題 1：論理操作 (続 1)

使える性質 (仮定)	導く性質 (目標)
$A \subseteq B$	$x \in C - A$
$x \in C - B$	
$x \in C$	
$x \notin B$	

x は任意

差集合の定義に基づいて，書き直す

例題 1：論理操作 (続 2)

使える性質 (仮定)	導く性質 (目標)
$A \subseteq B$	$x \in C - A$
$x \in C - B$	
$x \in C$	
$x \notin B$	
$\forall y\ (y \in A \to y \in B)$	

x は任意

部分集合の定義に基づいて，書き直す
(変数として，x とは違う y を使うと，紛らわしくない)

例題 1：論理操作 (続 3)

使える性質 (仮定)	導く性質 (目標)
$A \subseteq B$	$x \in C - A$
$x \in C - B$	
$x \in C$	
$x \notin B$	
$\forall y\ (y \in A \to y \in B)$	
$x \in A \to x \in B$	

x は任意

推論 (全称例化)
任意の $a \in D$ に対して
$$\forall x \in D\ (P(x)) \Rightarrow P(a)$$

例題 1：論理操作 (続 4)

使える性質 (仮定)	導く性質 (目標)
$A \subseteq B$	$x \in C - A$
$x \in C - B$	
$x \in C$	
$x \notin B$	
$\forall y\ (y \in A \to y \in B)$	
$x \in A \to x \in B$	
$x \notin A$	

x は任意

推論 (モードゥス・トレンス) (演習問題)
$$((P \to Q) \land \neg Q) \Rightarrow \neg P$$

例題 1：論理操作 (続 5)

使える性質 (仮定)	導く性質 (目標)
$A \subseteq B$	$x \in C - A$
$x \in C - B$	
$x \in C$	
$x \notin B$	
$\forall y\ (y \in A \to y \in B)$	
$x \in A \to x \in B$	
$x \notin A$	
$x \in C - A$	

x は任意

差集合の定義に基づいて書き直した

例題 1：文章構造

…
差集合の定義より，$x \in C$ かつ $x \notin B$ となる．
部分集合の定義より，任意の y に対して $y \in A$ ならば $y \in B$ となる．
特に，$x \in A$ ならば $x \in B$ となる．
しかし，$x \notin B$ なので，$x \notin A$ となる．
$x \in C$ と $x \notin A$ より，$x \in C - A$ となる．
… □

例題 1：証明の清書

- $A \subseteq B$ であると仮定する．
- 部分集合の定義より，任意の x に対して，$x \in C - B$ ならば $x \in C - A$ であることを証明すればよい．
- x を任意に選び，$x \in C - B$ と仮定する．
- 差集合の定義より，$x \in C$ かつ $x \notin B$ となる．
- 部分集合の定義より，任意の y に対して $y \in A$ ならば $y \in B$ となる．
- 特に，$x \in A$ ならば $x \in B$ となる．
- しかし，$x \notin B$ なので，$x \notin A$ となる．
- $x \in C$ と $x \notin A$ より，$x \in C - A$ となる．
- したがって，$x \in C - B$ ならば $x \in C - A$ となる．
- したがって，$C - B \subseteq C - A$ となる．
- したがって，$A \subseteq B$ ならば $C - B \subseteq C - A$ となる． □

目次

空集合とは

空集合とは？（復習）

要素を持たない集合を空集合と呼び，「$\emptyset$」または「$\varnothing$」と表記する

空集合とは ?: 論理を用いて書くと

- $\neg \exists\, x\ (x \in \emptyset)$
- $\forall\, x\ (x \notin \emptyset)$

例題 2：空集合は任意の集合の部分集合

任意の集合 A に対して

$$\emptyset \subseteq A$$

部分集合の定義に基づいて書き直すと

任意の x に対して，$x \in \emptyset$ ならば $x \in A$

例題 2：論理操作

使える性質 (仮定)	導く性質 (目標)
$x \in \emptyset$	$x \in A$
$\forall\, y\ (y \notin \emptyset)$	
$x \notin \emptyset$	
矛盾 (F)	
$x \in A$	

推論 (空ゆえに真)

$$\mathrm{F} \Rightarrow P$$

例題 2：文章構造

部分集合の定義から，「$x \in \emptyset$ ならば $x \in A$」を証明すればよい．

x を任意に選び，$x \in \emptyset$ と仮定する．

空集合の定義より，任意の y に対して $y \notin \emptyset$ である．
特に，$x \notin \emptyset$ である．
これと $x \in \emptyset$ は矛盾する．
したがって，$x \in A$ となる．

したがって，$x \in \emptyset$ ならば $x \in A$ となる．

したがって，$\emptyset \subseteq A$ となる． □

例題 2：証明の清書

- 部分集合の定義から，「$x \in \emptyset$ ならば $x \in A$」を証明すればよい．
- x を任意に選び，$x \in \emptyset$ と仮定する．
- 空集合の定義より，任意の y に対して $y \notin \emptyset$ である．
- 特に，$x \notin \emptyset$ である．
- これと $x \in \emptyset$ は矛盾する．
- したがって，$x \in A$ となる．
- したがって，$x \in \emptyset$ ならば $x \in A$ となる．
- したがって，$\emptyset \subseteq A$ となる． □

例題 3

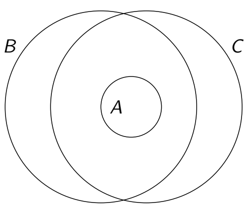
例題 3：次を証明せよ

任意の集合 A, B, C に対して

$$A \subseteq B \cap C \Leftrightarrow A \subseteq B \text{ かつ } A \subseteq C$$

が成立する．

図による直観



同値変形によって証明する

例題 3：同値変形による証明

$$
\begin{aligned}
& A \subseteq B \cap C \\
\Leftrightarrow\ & \forall\, x\ (x \in A \rightarrow x \in B \cap C) && \text{(部分集合の定義)} \\
\Leftrightarrow\ & \forall\, x\ (x \in A \rightarrow ((x \in B) \wedge (x \in C))) && \text{(共通部分の定義)} \\
\Leftrightarrow\ & \forall\, x\ ((x \in A \rightarrow x \in B) \wedge (x \in A \rightarrow x \in C)) && \text{(含意の合成)} \\
\Leftrightarrow\ & (\forall\, x\ (x \in A \rightarrow x \in B)) \wedge (\forall\, x\ (x \in A \rightarrow x \in C)) && \text{(分配法則)} \\
\Leftrightarrow\ & (A \subseteq B) \wedge (A \subseteq C) && \text{(部分集合の定義)}
\end{aligned}
$$

□

含意の合成

$$(P \rightarrow Q) \wedge (P \rightarrow R) \Leftrightarrow P \rightarrow (Q \wedge R)$$

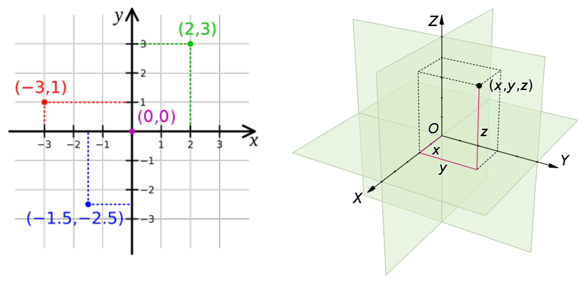
$\forall$ の分配法則

$$(\forall\, x \in D\ (P(x))) \wedge (\forall\, x \in D\ (Q(x))) \Leftrightarrow \forall\, x \in D\ (P(x) \wedge Q(x))$$

目次

座標

- 2 次元平面の点の座標は 2 つの実数を「対」にして表現する
- このように，集合の要素を「対」にすることは有用



http://en.wikipedia.org/wiki/Cartesian_coordinate_system

構造体

プログラミングの構造体

```
struct account {
  string name;
  int account_number;
  int balance;
};
```

数個のデータを組にして，一つの構造を表現する

順序対 (2 個組)

順序対とは？（常識に基づく定義）

順序対とは，ものを 2 つ並べたもののことである．
- a と a' をこの順で並べたものは「(a, a')」と表記する

「順序対」は単に「対」や「組」と呼ばれることもある

同じ順序対（常識に基づく定義）

2 つの順序対 (a, a') と (b, b') が**等しい**ことを $(a, a') = (b, b')$ と表記し，

$$a = b \text{ かつ } a' = b'$$

であることと定義する

注意：(a, a') と (a', a) は $a \neq a'$ ならば異なる

集合の直積 (1)

集合の直積

集合 A と集合 B の**直積**を $A \times B$ と表記して，

$$A \times B = \{(x, y) \mid x \in A \text{ かつ } y \in B\}$$

と定義する

「直積」は「デカルト積」とも呼ぶ

例

$A = \{a, b\}$, $B = \{c, d, e\}$ のとき，

$$A \times B = \{(a, c), (a, d), (a, e), (b, c), (b, d), (b, e)\}$$

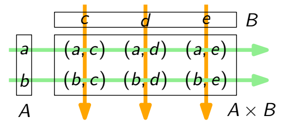
簡単な確認：$A \times B$ の要素数 $=$ (A の要素数) $\times$ (B の要素数)

集合の直積：図示

例

$A = \{a, b\}$, $B = \{c, d, e\}$ のとき，

$$A \times B = \{(a, c), (a, d), (a, e), (b, c), (b, d), (b, e)\}$$



例 続き

$A = \{a, b\}$, $B = \{c, d, e\}$ のとき，

$$B \times A = \{(c, a), (c, b), (d, a), (d, b), (e, a), (e, b)\}$$

n 個組

n は自然数

n 個組とは？（常識に基づく定義）

n 個組とは，ものを n 個並べたもののことである．
- $a_1, a_2, \dots, a_n$ をこの順で並べたものは「$(a_1, a_2, \dots, a_n)$」と表記する

同じ n 個組（常識に基づく定義）

2 つの n 個組 $(a_1, a_2, \dots, a_n)$ と $(b_1, b_2, \dots, b_n)$ が**等しい**ことを $(a_1, a_2, \dots, a_n) = (b_1, b_2, \dots, b_n)$ と表記し，

$$\text{すべての } i \text{ に対して } a_i = b_i$$

であることと定義する

集合の直積 (2)

集合の直積

集合 $A_1, A_2, \dots, A_n$ の**直積**を $A_1 \times A_2 \times \cdots \times A_n$ と表記して，

$$A_1 \times A_2 \times \cdots \times A_n = \{(x_1, x_2, \dots, x_n) \mid \forall\, i \in \{1, 2, \dots, n\}\ (x_i \in A_i)\}$$

と定義する

「$A_1 \times A_2 \times \cdots \times A_n$」を「$\prod_{i=1}^{n} A_i$」と書くこともある

例

$A = \{a, b\}$, $B = \{c, d, e\}$, $C = \{f, g\}$ のとき，

$$\begin{aligned} A \times B \times C = \{&(a, c, f), (a, c, g), (a, d, f), (a, d, g), (a, e, f), (a, e, g), \\ &(b, c, f), (b, c, g), (b, d, f), (b, d, g), (b, e, f), (b, e, g)\} \end{aligned}$$

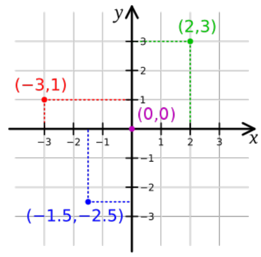
簡単な確認：$A_1 \times A_2 \times \cdots \times A_n$ の要素数 $=$ (A_1 の要素数) $\times$ (A_2 の要素数) $\times \cdots \times$ (A_n の要素数)

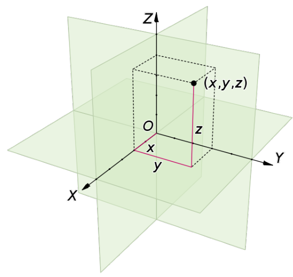
集合の直積 (関係する記法)

- $A \times A$ を A^2 と書く
- $A \times A \times A$ を A^3 と書く
- $\underbrace{A \times A \times \cdots \times A}_{n\ \text{個}}$ を A^n と書く

集合の直積：例 1 (デカルト座標系)

- $\mathbb{R}^2 = 2$ 次元平面
- $\mathbb{R}^3 = 3$ 次元空間
- …





http://en.wikipedia.org/wiki/Cartesian_coordinate_system

集合の直積：例 2 (IP アドレス)

(IPv4 における) IP アドレスは 1 バイトの数 4 つで表現される

- www.uec.ac.jp: 130.153.9.10
- www.kantei.go.jp: 202.232.146.151

つまり，

$$\text{可能な IP アドレス全体の集合} = \{0, \ldots, 255\}^4$$

集合の直積：例 3 (DNA (デオキシリボ核酸))

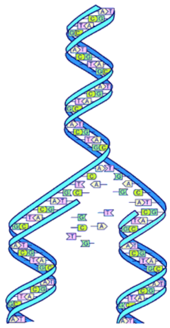
DNA は生物の遺伝情報を担う物質

- アデニン (A)，チミン (T)，シトシン (C)，グアニン (G) という塩基の並び方で遺伝情報はだいたい決められている

つまり，

- DNA が持つ遺伝情報全体の集合 $= \{\mathrm{A}, \mathrm{T}, \mathrm{C}, \mathrm{G}\}^n$

n は生物種によって異なる自然数



http://en.wikipedia.org/wiki/DNA_replication

集合の直積：補足

集合の直積 (再掲)

集合 A と集合 B の**直積**を $A \times B$ と表記して，

$$A \times B = \{(x, y) \mid x \in A \text{ かつ } y \in B\}$$

と定義する

定義から，次が分かる

- $A \times \emptyset = \emptyset$
- $\emptyset \times B = \emptyset$

目次

冪集合

冪集合

集合 A の冪集合とは A の部分集合全体から成る集合であり，2^A と表記する．

$$2^A = \{B \mid B \subseteq A\}$$

- 「冪集合」の他に「巾集合」,「べき集合」,「ベキ集合」とも書く
- 「2^A」の他に「$\mathcal{P}(A)$」,「$\mathscr{P}(A)$」とも書く
- 冪集合の要素は集合 (冪集合は集合の集合)

例

$A = \{a, b, c\}$ のとき

$$2^A = \{\emptyset, \{a\}, \{b\}, \{c\}, \{a, b\}, \{a, c\}, \{b, c\}, \{a, b, c\}\}$$

簡単な確認：2^A の要素数 $= 2^{A\text{ の要素数}}$

冪集合：他の例

冪集合 (再掲)

集合 A の冪集合とは A の部分集合全体から成る集合であり，2^A と表記する．

$$2^A = \{B \mid B \subseteq A\}$$

- $2^{\{a\}} = \{\emptyset, \{a\}\}$
- $2^{\emptyset} = \{\emptyset\}$
- $2^{\{\emptyset\}} = \{\emptyset, \{\emptyset\}\}$

目次

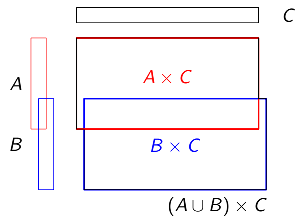
証明の例題 4

例題 4

任意の集合 A, B, C に対して，次が成り立つことを証明せよ．

$$(A \cup B) \times C = (A \times C) \cup (B \times C).$$

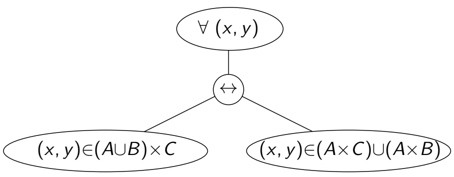
図の直観



例題 4：論理構造

「=」の定義に基づいて書き直す

$\forall\,(x,y)\ ((x,y) \in (A \cup B) \times C \leftrightarrow (x,y) \in (A \times C) \cup (B \times C))$



同値変形によって証明してみる

例題 4：同値変形による証明

$(x,y) \in (A \cup B) \times C$

$\Leftrightarrow (x \in A \cup B) \wedge (y \in C)$	(直積の定義)
$\Leftrightarrow ((x \in A) \vee (x \in B)) \wedge (y \in C)$	(合併の定義)
$\Leftrightarrow ((x \in A) \wedge (y \in C)) \vee ((x \in B) \wedge (y \in C))$	(分配法則)
$\Leftrightarrow ((x,y) \in A \times C) \vee ((x,y) \in B \times C)$	(直積の定義)
$\Leftrightarrow (x,y) \in (A \times C) \cup (B \times C)$	(合併の定義)

$\square$

分配法則

$$(P \vee Q) \wedge R \Leftrightarrow (P \wedge R) \vee (Q \wedge R)$$

証明の例題 5

例題 5

集合 A, B に対して，次が成り立つことを証明せよ．

$$2^{A \cap B} = 2^A \cap 2^B.$$

定義に基づいて書き直す

$$\forall\, X\ (X \in 2^{A \cap B} \leftrightarrow X \in 2^A \cap 2^B)$$

同値変形によって証明してみる

例題 5：同値変形による証明

$X \in 2^{A \cap B}$

$\Leftrightarrow X \subseteq A \cap B$	(冪集合の定義)
$\Leftrightarrow X \subseteq A$ かつ $X \subseteq B$	(例題 3)
$\Leftrightarrow X \in 2^A$ かつ $X \in 2^B$	(冪集合の定義)
$\Leftrightarrow X \in 2^A \cap 2^B$	(共通部分の定義)

$\square$

例題 3

$A \subseteq B \cap C \Leftrightarrow A \subseteq B$ かつ $A \subseteq C$

目次

今日のまとめ

今日の目標

- 部分集合について理解を深める
- 集合の直積と冪集合 (べき集合) を理解する

今後の予告

今までの部分を**基礎**として進める

- 2 つの集合がどのような関係を持っているか？
  - 対応，関数，関係
- 無限を取り扱う方法
  - 数学的帰納法，再帰的定義