離散数学 第 3 回
集合と論理 (3)：論理を使った証明 (第 1 ステップ)

岡本 吉央
okamotoy@uec.ac.jp

電気通信大学

2013 年 4 月 30 日

最終更新：2013 年 5 月 2 日　02:06

今日の概要

今日の目標
- 命題の恒真性を証明する 2 つの方法を理解する
  - 真理値表による証明
  - 同値変形による証明
- 重要な恒真式を使って同値変形による証明ができるようになる

目次

恒真命題

恒真命題 (トートロジー) とは？
命題変数にどのような真理値が割り当てられても，
常に真となる命題論理式

例：「$P \to (Q \to P)$」は恒真命題

P	Q	$Q \to P$	$P \to (Q \to P)$
T	T	T	T
T	F	T	T
F	T	F	T
F	F	T	T

恒真命題に対する記法

含意を含む恒真命題
- 「$P \to Q$」が恒真であるとき，これを次のように書く

$$P \Rightarrow Q$$

- 「$P \Rightarrow Q$」において，次の用語を使うことがある
  - P は「Q が成り立つための**十分条件**」
  - Q は「P が成り立つための**必要条件**」

同値を含む恒真命題
- 「$P \leftrightarrow Q$」が恒真であるとき，これを次のように書く

$$P \Leftrightarrow Q$$

- 「$P \Leftrightarrow Q$」において，次の用語を使うことがある
  - P を「Q が成り立つための**必要十分条件**」
  - Q を「P が成り立つための**必要十分条件**」

重要な恒真命題：含意の書換

含意の書換
任意の命題変数 P, Q に対して，次が成り立つ

$$P \to Q \quad \Leftrightarrow \quad \neg P \vee Q$$

証明：次の真理値表の正しさによる．

P	Q	$\neg P$	$P \to Q$	$\neg P \vee Q$	$(P \to Q) \leftrightarrow (\neg P \vee Q)$
T	T	F	T	T	T
T	F	F	F	F	T
F	T	T	T	T	T
F	F	T	T	T	T

□

証明終了のしるし↑

重要な恒真命題：同値の書換

同値の書換
任意の命題変数 P, Q に対して，次が成り立つ

$$P \leftrightarrow Q \quad \Leftrightarrow \quad (P \to Q) \wedge (Q \to P)$$

証明：次の真理値表の正しさによる．

P	Q	$P \leftrightarrow Q$	$P \to Q$	$Q \to P$	$(P \to Q) \wedge (Q \to P)$	$(P \leftrightarrow Q) \leftrightarrow ((P \to Q) \wedge (Q \to P))$
T	T	T	T	T	T	T
T	F	F	F	T	F	T
F	T	F	T	F	F	T
F	F	T	T	T	T	T

□

重要な恒真命題：排中法則

排中法則
命題変数 P に対して，次の命題論理式は恒真命題

$$P \vee \neg P$$

証明：次の真理値表の正しさによる．

P	$\neg P$	$P \vee \neg P$
T	F	T
F	T	T

□

重要な恒真命題：ド・モルガンの法則

ド・モルガンの法則

命題変数 P, Q に対して，次が成り立つ

$$\neg(P \lor Q) \quad \Leftrightarrow \quad \neg P \land \neg Q$$
$$\neg(P \land Q) \quad \Leftrightarrow \quad \neg P \lor \neg Q$$

証明：次の真理値表の正しさによる．

P	Q	$\neg P$	$\neg Q$	$\neg P \land \neg Q$	$P \lor Q$	$\neg(P \lor Q)$	$(\neg(P \lor Q)) \leftrightarrow (\neg P \land \neg Q)$
T	T	F	F	F	T	F	T
T	F	F	T	F	T	F	T
F	T	T	F	F	T	F	T
F	F	T	T	T	F	T	T

P	Q	$\neg P$	$\neg Q$	$\neg P \lor \neg Q$	$P \land Q$	$\neg(P \land Q)$	$(\neg(P \land Q)) \leftrightarrow (\neg P \lor \neg Q)$
T	T	F	F	F	T	F	T
T	F	F	T	T	F	T	T
F	T	T	F	T	F	T	T
F	F	T	T	T	F	T	T

□

重要な恒真命題：モードゥス・ポネンス

モードゥス・ポネンス

任意の命題変数 P, Q に対して，次が成り立つ

$$P \land (P \to Q) \Rightarrow Q$$

証明：次の真理値表の正しさによる．

P	Q	$P \to Q$	$P \land (P \to Q)$	$(P \land (P \to Q)) \to Q$
T	T	T	T	T
T	F	F	F	T
F	T	T	F	T
F	F	T	F	T

□

重要な恒真命題：対偶法則

対偶法則

任意の命題変数 P, Q に対して，次が成り立つ

$$P \to Q \Leftrightarrow \neg Q \to \neg P$$

証明：次の真理値表の正しさによる．

P	Q	$P \to Q$	$\neg Q$	$\neg P$	$\neg Q \to \neg P$	$(P \to Q) \leftrightarrow (\neg Q \to \neg P)$
T	T	T	F	F	T	T
T	F	F	T	F	F	T
F	T	T	F	T	T	T
F	F	T	T	T	T	T

□

恒真命題いろいろ (1)

冪等法則

$$P \land P \Leftrightarrow P$$
$$P \lor P \Leftrightarrow P$$

吸収法則

$$(P \land Q) \lor P \Leftrightarrow P$$
$$(P \lor Q) \land P \Leftrightarrow P$$

交換法則

$$P \land Q \Leftrightarrow Q \land P$$
$$P \lor Q \Leftrightarrow Q \lor P$$

二重否定の除去

$$P \Leftrightarrow \neg(\neg P)$$

結合法則

$$(P \land Q) \land R \Leftrightarrow P \land (Q \land R)$$
$$(P \lor Q) \lor R \Leftrightarrow P \lor (Q \lor R)$$

恒真命題いろいろ (2)

分配法則

$$(P \lor Q) \land R \Leftrightarrow (P \land R) \lor (Q \land R)$$
$$(P \land Q) \lor R \Leftrightarrow (P \lor R) \land (Q \lor R)$$

定数の除去・導入

$$P \land \mathrm{T} \Leftrightarrow P$$
$$P \lor \mathrm{F} \Leftrightarrow P$$

変数の除去・導入

$$P \land \mathrm{F} \Leftrightarrow \mathrm{F}$$
$$P \lor \mathrm{T} \Leftrightarrow \mathrm{T}$$

含意の合成

$$(P \to Q) \land (P \to R) \Rightarrow P \to (Q \land R)$$

三段論法

$$(P \to Q) \land (Q \to R) \Rightarrow P \to R$$

恒真命題の利用法

- 恒真命題を使って，命題論理式を簡略化できる
  (見た目を単純にできる)
- 恒真命題を使って，数学的な証明ができる

これらについては次に扱う⋯

目次

論理式の恒真性

真理値表による恒真性の証明

- 命題論理式：できる
- 述語論理式：できないかもしれない (「無限」に対処できない)

同値変形による恒真性の証明

- 命題論理式：できるかもしれない
- 述語論理式：できるかもしれない

しかし，とても役に立つ

同値変形とは ?: 例

次が成り立つことを証明したい

$$P \wedge (Q \wedge R) \Leftrightarrow (P \wedge Q) \wedge (P \wedge R)$$

先ほどの「重要な恒真命題」と「恒真命題いろいろ」を見ながら

$$\begin{aligned} P \wedge (Q \wedge R) &\Leftrightarrow (P \wedge P) \wedge (Q \wedge R) && (\wedge \text{ の冪等法則}) \\ &\Leftrightarrow P \wedge (P \wedge (Q \wedge R)) && (\wedge \text{ の結合法則}) \\ &\Leftrightarrow P \wedge ((P \wedge Q) \wedge R) && (\wedge \text{ の結合法則}) \\ &\Leftrightarrow (P \wedge (P \wedge Q)) \wedge R && (\wedge \text{ の結合法則}) \\ &\Leftrightarrow ((P \wedge Q) \wedge P) \wedge R && (\wedge \text{ の交換法則}) \\ &\Leftrightarrow (P \wedge Q) \wedge (P \wedge R) && (\wedge \text{ の結合法則}) \end{aligned}$$

□

同値変形とは ?

同値変形とは ?

論理式の一部として現れる論理式をそれと同値な論理式で置き換えること

先ほどの「重要な恒真命題」と「恒真命題いろいろ」の同値性が使える！

- 含意の書換，同値の書換
- 排中法則
- ド・モルガンの法則
- 対偶法則
- 冪等法則
- 二重否定の除去
- (吸収法則)
- 交換法則，結合法則
- 分配法則
- 定数／変数の除去・導入

重要な性質

同値変形によって恒真性は保たれる

同値変形とは ?: 例 2

次が成り立つことを証明したい

$$(P \wedge Q) \rightarrow R \Leftrightarrow P \rightarrow (Q \rightarrow R)$$

先ほどの「重要な恒真命題」と「恒真命題いろいろ」を見ながら

$$\begin{aligned} (P \wedge Q) \rightarrow R &\Leftrightarrow \neg(P \wedge Q) \vee R && (\text{含意の書換}) \\ &\Leftrightarrow (\neg P \vee \neg Q) \vee R && (\text{ド・モルガンの法則}) \\ &\Leftrightarrow \neg P \vee (\neg Q \vee R) && (\vee \text{ の結合法則}) \\ &\Leftrightarrow \neg P \vee (Q \rightarrow R) && (\text{含意の書換}) \\ &\Leftrightarrow P \rightarrow (Q \rightarrow R) && (\text{含意の書換}) \end{aligned}$$

□

目次

論理式の恒真性 (再掲)

真理値表による恒真性の証明

- 命題論理式：できる
- 述語論理式：できないかもしれない (「無限」に対処できない)

同値変形による恒真性の証明

- 命題論理式：できるかもしれない
- 述語論理式：できるかもしれない

しかし，とても役に立つ

述語論理式に対して同値変形を行うためには，
述語論理における「重要な恒真式」を知る必要がある

述語論理における重要な恒真式 (1)：否定

$\forall$ の否定，$\exists$ の否定 (重要！)

任意の議論領域 D と命題関数 $P(x)$ に対して，次が成り立つ

$$\neg(\forall\, x \in D\ (P(x))) \quad \Leftrightarrow \quad \exists\, x \in D\ (\neg P(x))$$
$$\neg(\exists\, x \in D\ (P(x))) \quad \Leftrightarrow \quad \forall\, x \in D\ (\neg P(x))$$

$D = \{a, b\}$ のときの証明：$\forall$ と $\exists$ の定義を思い出し，書き直すと

$$\neg(P(a) \wedge P(b)) \quad \Leftrightarrow \quad \neg P(a) \vee \neg P(b)$$
$$\neg(P(a) \vee P(b)) \quad \Leftrightarrow \quad \neg P(a) \wedge \neg P(b)$$

これらは命題論理におけるド・モルガンの法則と同じ

注意

D が無限集合の場合の証明は，この授業の範囲を越えるのでやらない

述語論理における重要な恒真式 (1)：否定 【重要なので補足 1】

「徳川将軍は全員男である」の否定は？

- ？ 徳川将軍は全員男でない (分かりにくい日本語)
- × 徳川将軍は誰も男でない
- ○ 徳川将軍の誰かは男でない

「すべての人は自転車に乗れる」の否定は？

- × すべての人は自転車に乗れない
- ○ ある人は自転車に乗れない
- ○ 自転車に乗れない人がいる

$\forall$ の否定

$$\neg(\forall\, x\ (P(x)) \Leftrightarrow \exists\, x\ (\neg P(x))$$

述語論理における重要な恒真式 (1)：否定 【重要なので補足 2】

「徳川将軍は誰か 70 年以上生きた」の否定は？

- × 徳川将軍は誰か 70 年以上生きていない
- ○ 徳川将軍は誰も 70 年以上生きていない

「ある人は UFO に乗った」の否定は？

- × ある人は UFO に乗っていない
- ？ すべての人は UFO に乗っていない (分かりにくい日本語)
- ○ どの人も UFO に乗っていない

$\exists$ の否定

$$\neg(\exists\, x\ (P(x)) \Leftrightarrow \forall\, x\ (\neg P(x))$$

述語論理における重要な恒真式 (2)：分配法則

∀ の分配法則，∃ の分配法則

任意の議論領域 D と命題関数 $P(x)$，$Q(x)$ に対して，次が成り立つ

$$
\begin{aligned}
(\forall x \in D\ (P(x))) \land (\forall x \in D\ (Q(x))) &\Leftrightarrow \forall x \in D\ (P(x) \land Q(x)) \\
(\exists x \in D\ (P(x))) \lor (\exists x \in D\ (Q(x))) &\Leftrightarrow \exists x \in D\ (P(x) \lor Q(x))
\end{aligned}
$$

$D = \{a, b\}$ のときの証明：演習問題

注意

次は恒真ではない

$$
\begin{aligned}
(\forall x \in D\ (P(x))) \lor (\forall x \in D\ (Q(x))) &\overset{?}{\Leftrightarrow} \forall x \in D\ (P(x) \lor Q(x)) \\
(\exists x \in D\ (P(x))) \land (\exists x \in D\ (Q(x))) &\overset{?}{\Leftrightarrow} \exists x \in D\ (P(x) \land Q(x))
\end{aligned}
$$

述語論理における重要な恒真式 (3)：交換法則

交換法則

任意の議論領域 D と命題関数 $P(x, y)$ に対して，次が成り立つ

$$
\begin{aligned}
\forall x \in D\ (\forall y \in D\ (P(x, y))) &\Leftrightarrow \forall y \in D\ (\forall x \in D\ (P(x, y))) \\
\exists x \in D\ (\exists y \in D\ (P(x, y))) &\Leftrightarrow \exists y \in D\ (\exists x \in D\ (P(x, y)))
\end{aligned}
$$

$D = \{a, b\}$ のときの証明：演習問題

述語論理における重要な恒真式 (4)：導入

∀ の導入，∃ の導入

任意の議論領域 D と命題 P に対して，次が成り立つ

$$
\begin{aligned}
P &\Leftrightarrow \forall x \in D\ (P) \\
P &\Leftrightarrow \exists x \in D\ (P)
\end{aligned}
$$

注：P の中に x は自由変数として現れない

$D = \{a, b\}$ のときの証明：演習問題

述語論理における重要な恒真式 (5)：分配法則

∀ の分配法則，∃ の分配法則

任意の議論領域 D と命題関数 $P(x)$，命題 Q に対して，次が成り立つ

$$
\begin{aligned}
\forall x \in D\ (P(x)) \lor Q &\Leftrightarrow \forall x \in D\ (P(x) \lor Q) \\
\exists x \in D\ (P(x)) \land Q &\Leftrightarrow \exists x \in D\ (P(x) \land Q)
\end{aligned}
$$

注：Q の中に x は自由変数として現れない

$D = \{a, b\}$ のときの証明：演習問題

3 ページ前の分配法則との違いに注意

述語論理における重要な恒真式 (6)：束縛変数の変更

束縛変数の変更

任意の議論領域 D と命題関数 $P(x)$ に対して，次が成り立つ

$$
\begin{aligned}
\forall x \in D\ (P(x)) &\Leftrightarrow \forall y \in D\ (P(y)) \\
\exists x \in D\ (P(x)) &\Leftrightarrow \exists y \in D\ (P(y))
\end{aligned}
$$

注：$P(x)$ の中に y は自由変数として現れず，
　　$P(y)$ の中に x は自由変数として現れない

この正しさはすぐに分かる

参考

積分 (など) でも同じような恒等式がある

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = \int_a^b f(y)\mathrm{d}y$$

同値変形による恒真性の証明：例 1

次が成り立つことを証明したい

$$\neg(\forall x\ (P(x) \to Q(x))) \Leftrightarrow \exists x\ (P(x) \land \neg Q(x))$$

$$
\begin{aligned}
\neg(\forall x\ (P(x) \to Q(x))) &\Leftrightarrow \neg(\forall x\ (\neg P(x) \lor Q(x))) && \text{(含意の書換)} \\
&\Leftrightarrow \exists x\ (\neg(\neg P(x) \lor Q(x))) && \text{($\forall$ の否定)} \\
&\Leftrightarrow \exists x\ (\neg\neg P(x) \land \neg Q(x)) && \text{(ド・モルガンの法則)} \\
&\Leftrightarrow \exists x\ (P(x) \land \neg Q(x)) && \text{(二重否定の除去)}
\end{aligned}
$$

□

同値変形による恒真性の証明：例 2

次が成り立つことを証明したい

任意の命題関数 $P(x)$ と命題変数 Q に対して

$$\forall x\ (P(x)) \to Q \Leftrightarrow \exists x\ (P(x) \to Q)$$

$$
\begin{aligned}
\forall x\ (P(x)) \to Q &\Leftrightarrow \neg(\forall x\ (P(x))) \lor Q && \text{(含意の書換)} \\
&\Leftrightarrow \exists x\ (\neg P(x)) \lor Q && \text{($\forall$ の否定)} \\
&\Leftrightarrow \exists x\ (\neg P(x) \lor Q) && \text{($\exists$ の分配法則)} \\
&\Leftrightarrow \exists x\ (P(x) \to Q) && \text{(含意の書換)}
\end{aligned}
$$

□

目次

今日のまとめ

今日の目標

- 命題の恒真性を証明する 2 つの方法を理解する
  - 真理値表による証明
  - 同値変形による証明
- 重要な恒真式を使って同値変形による証明ができるようになる

注意：「重要な恒真式」を覚える必要はない

証明：補足

疑問 ?: 恒真性の証明

なぜ述語論理の論理式は，その恒真性を真理値表で証明できないのか？

これにちゃんと答えるためには,「シンタックス」と「セマンティクス」など論理学の基盤・重要概念を学ぶ必要がある.

興味のある人は次のことばを調べてみる

- シンタックス (統語論) とセマンティクス (意味論)
- 述語論理における「解釈」
- 証明論とモデル理論

シンタックスとセマンティクスは自然言語処理，人工知能においても重要な概念

これは「論理学」の授業ではないので，これ以上深く立ち入らない