離散数学 (13) **2013 年 7 月 23 日**
演習問題 **岡本 吉央**

注意： 解答がどのように導かれるのか，すなわち証明，を必ず書き下すこと．

復習問題 13.1 集合 $A = \{1, 2, 3, 4\}$ に対して，関数 $f : A \to A$ を $f(1) = 2, f(2) = 1, f(3) = 4, f(4) = 1$ で定義する．

1. $f^2(1)$, $f^2(2)$, $f^2(3)$, $f^2(4)$ を定めよ．
2. $f^3(1)$, $f^3(2)$, $f^3(3)$, $f^3(4)$ を定めよ．

復習問題 13.2 関数 $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ を

$$f(x) = 2x^2$$

と定義する．このとき，任意の正の整数 n に対して

$$f^n(x) = 2^{2^n-1}x^{2^n}$$

が成り立つことを証明せよ．

復習問題 13.3 任意の集合 Σ を考える．文字列 $s \in \Sigma^*$ の長さ $\ell(s)$ を次のように定義する．

- $\ell(\epsilon) = 0$．(ただし，ϵ は空文字列を表す．)
- $s \in \Sigma^*$ かつ $x \in \Sigma$ ならば，$\ell(xs) = 1 + \ell(s)$．

ここで，$\Sigma = \{a, b\}$ のとき，以下の文字列の長さはそれぞれ何か？

1. ϵ.
2. a.
3. b.
4. aa.
5. abb.
6. $baabaabb$.

復習問題 13.4 任意の集合 Σ を考える．集合 Σ 上の任意の文字列 $s \in \Sigma^*$ と任意の文字 $x \in \Sigma$ に対して

$$sx \in \Sigma^*$$

となることを証明せよ

復習問題 13.5 任意の集合 Σ を考える．関数 $f : \Sigma^* \to \Sigma^*$ を次のように再帰的に定義する．

- $f(\epsilon) = \epsilon$
- $s \in \Sigma^*$ かつ $x \in \Sigma$ ならば，$f(xs) = xxf(s)$

以下の問いに答えよ．

1. $f(abbaa)$ は何であるか？
2. 関数 $f : \Sigma^* \to \Sigma^*$ がうまく定義できていること，すなわち，任意の $s \in \Sigma^*$ に対して $f(s) \in \Sigma^*$ となることを証明せよ．

追加問題 13.6 集合 $\Sigma = \{a, b, c\}$ を考え，関数 $f : \Sigma^* \to \Sigma^*$ を次のように定義する．

- $f(\epsilon) = \epsilon$.
- $s \in \Sigma^*$ ならば，$f(as) = f(s)$，$f(bs) = bf(s)$，$f(cs) = cf(s)$.

以下の問いに答えよ．

1. 次の文字列 s に対して $f(s)$ は何になるか？ 定めよ．
   (a) $s = \epsilon$.
   (b) $s = a$.
   (c) $s = b$.
   (d) $s = c$.
   (e) $s = abc$.
   (f) $s = bac$.
   (g) $s = abc$.
   (h) $s = cabaacab$.
2. 関数 $f : \Sigma^* \to \Sigma^*$ がうまく定義できていること，すなわち，任意の $s \in \Sigma^*$ に対して $f(s) \in \Sigma^*$ となることを証明せよ．

発展追加問題 13.7 集合 $\Sigma = \{a, b\}$ を考え，その文字列の集合 $P \subseteq \Sigma^*$ を次のように再帰的に定義する．

- $\epsilon \in P$ である．
- $s \in P$ ならば，$asb \in P$ である．
- $s \in P$ かつ $t \in P$ ならば，$st \in P$ である．

- 上のようにして生成される文字列のみが P の要素である．

以下の問いに答えよ．

1. 次に挙げる各文字列が P の要素であるかないか，答えよ．

   (a) ϵ.

   (b) ab.

   (c) ba.

   (d) $abab$.

   (e) $aabb$.

   (f) $aabaab$.

   (g) $abbaab$.

   (h) $aaabbb$.

2. 次のような関数 $f\colon \Sigma^* \to \mathbb{R}$ と $g\colon \Sigma^* \to \mathbb{R}$ を再帰的に定義する．(ただし，$\Sigma = \{a, b\}$．)

   - $f(\epsilon) = 0$，$g(\epsilon) = 0$.
   - 任意の $s \in \Sigma^*$ と任意の $x \in \Sigma$ に対して

   $$f(xs) = \begin{cases} 1 + f(s) & (x = a \text{ のとき}) \\ f(s) & (x = b \text{ のとき}). \end{cases}$$

   $$g(xs) = \begin{cases} g(s) & (x = a \text{ のとき}) \\ 1 + g(s) & (x = b \text{ のとき}). \end{cases}$$

   このとき，任意の $s \in P$ に対して，$f(s) = g(s)$ が成り立つことを証明せよ．