

注意： 解答がどのように導かれるのか，すなわち証明，を必ず書き下すこと．

復習問題 12.1 任意の正の整数  $n$  に対して

$$8^n - 3^n \text{ が } 5 \text{ で割り切れる}$$

ことを数学的帰納法により証明せよ．

復習問題 12.2 任意の正の整数  $n$  に対して

$$2n \leq 2^n$$

となることを数学的帰納法により証明せよ．

復習問題 12.3 3以上の任意の正の整数  $n$  に対して

$$6n \leq 3^n$$

となることを数学的帰納法により証明せよ．

復習問題 12.4 任意の正の整数  $n$  に対して， $a_n$  を

$$a_n = \begin{cases} 1 & (n = 1 \text{ のとき}) \\ a_{n-1} + 2 & (n > 1 \text{ のとき}) \end{cases}$$

と定義する．このとき，

$$a_n = 2n - 1$$

となることを証明せよ．

復習問題 12.5 任意の正の整数  $n$  に対して，第  $n$  番  
フィボナッチ数  $F_n$  を

$$F_n = \begin{cases} 1 & (n = 1 \text{ のとき}) \\ 1 & (n = 2 \text{ のとき}) \\ F_{n-1} + F_{n-2} & (n > 2 \text{ のとき}) \end{cases}$$

で定義する．任意の正整数  $n$  に対して

$$F_{n+1}^2 - F_{n+2}F_n = (-1)^n$$

が成り立つことを証明せよ．

復習問題 12.6 第  $n$  番フィボナッチ数を  $F_n$  とする  
とき，任意の正の整数  $n$  に対して，

$$F_n = \frac{1}{\sqrt{5}} \left( \left( \frac{1 + \sqrt{5}}{2} \right)^n - \left( \frac{1 - \sqrt{5}}{2} \right)^n \right)$$

が成り立つことを証明せよ．

追加問題 12.7 任意の正の整数  $n$  に対して

$$11^n - 4^n \text{ が } 7 \text{ で割り切れる}$$

ことを数学的帰納法により証明せよ．

追加問題 12.8 3以上の任意の正の整数  $n$  に対して

$$3n^2 \leq 3^n$$

となることを数学的帰納法により証明せよ．(ヒント：  
問題 12.3 の結果を用いてもよい．)

追加問題 12.9 任意の正の整数  $n$  に対して， $C_n$  を  
次のように定義する

$$C_n = \begin{cases} 1 & (n = 1 \text{ のとき}) \\ \frac{4n-2}{n+1} C_{n-1} & (n > 1 \text{ のとき}). \end{cases}$$

このとき，

$$C_n = \frac{(2n)!}{n!(n+1)!}$$

となることを証明せよ．(補足：これはカタラン数と  
呼ばれ，よく研究されているものである．)

追加問題 12.10 任意の正の整数  $n$  に対して， $H_n$  を  
次のように定義する

$$H_n = \begin{cases} 1 & (n = 1 \text{ のとき}) \\ H_{n-1} + \frac{1}{n} & (n > 1 \text{ のとき}). \end{cases}$$

このとき，任意の正の整数  $n$  に対して

$$\sum_{k=1}^n H_k = (n+1)H_n - n$$

が成り立つことを証明せよ．(補足：これは調和数と  
呼ばれ，よく研究されているものである．)

発展追加問題 12.11 第  $n$  番フィボナッチ数を  $F_n$  と  
するとき，任意の正の整数  $n$  に対して，

$$F_{2n+1} = F_{n+1}^2 + F_n^2 \text{ および } F_{2n+2} = F_{n+2}^2 - F_n^2$$

が成り立つことを証明せよ．