

注意： 解答がどのように導かれるのか，すなわち証明，を必ず書き下すこと．

復習問題 11.1 次の半順序集合に対して，そのハッセ図を描け．

1. $(\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}, |)$ ．ただし， $a | b$ であることを「 a は b の約数である」と定義する．
2. $(2^{\{1, 2, 3\}}, \subseteq)$ ．
3. $(\{1, 2, 3, 4\}, \leq)$ ．

復習問題 11.2 全順序集合 (A, \preceq) を考える．このとき，任意の $a, b \in A$ に対して

$$a \not\preceq b \Leftrightarrow a \succ b$$

が成り立つことを証明せよ．

復習問題 11.3 問題 11.1 の 1 に現れる半順序集合 $(\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}, |)$ に対して，次の問いに答えよ．ただし，該当するものが存在しない場合は「存在しない」と答えよ．

1. $\{2, 3\}$ の上界をすべて挙げよ．
2. $\{2\}$ の上界をすべて挙げよ．
3. $\{2, 5\}$ の上界をすべて挙げよ．
4. $\{2, 3\}$ の下界をすべて挙げよ．
5. $\{2\}$ の下界をすべて挙げよ．
6. $\{2, 6\}$ の下界をすべて挙げよ．
7. $\{2, 3, 4\}$ の極大元をすべて挙げよ．
8. $\{2, 3, 4\}$ の極小元をすべて挙げよ．
9. $\{2, 3, 6\}$ の最大元をすべて挙げよ．
10. $\{2, 3\}$ の最大元をすべて挙げよ．
11. $\{1, 2, 3\}$ の最小元をすべて挙げよ．
12. $\{2, 3\}$ の最小元をすべて挙げよ．
13. $\{2, 3\}$ の上限をすべて挙げよ．
14. $\{2\}$ の上限をすべて挙げよ．

15. $\{2, 3\}$ の下限をすべて挙げよ．

16. $\{2\}$ の下限をすべて挙げよ．

復習問題 11.4 半順序集合 (\mathbb{R}, \leq) と $B = (0, 1) = \{x \mid x \in \mathbb{R} \text{ かつ } 0 < x < 1\}$ を考える．このとき， (\mathbb{R}, \leq) において B の極大元が存在しないことを証明せよ．

補足問題 11.5 任意の命題変数 P に対して， $P \wedge \neg P \Leftrightarrow F$ が成り立つことを証明せよ．

補足問題 11.6 半順序集合 (A, \preceq) と A の部分集合 $B \subseteq A$ を考える．

1. b_1 と b_2 が B の最大元であるならば， $b_1 = b_2$ となることを証明せよ．
2. a_1 と a_2 が B の上限であるならば， $a_1 = a_2$ となることを証明せよ．

追加問題 11.7 $(\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12\}, |)$ という半順序集合のハッセ図を描け．

追加問題 11.8 半順序集合 $(2^{\{1, 2, 3, 4\}}, \subseteq)$ のハッセ図を描け．

追加問題 11.9 問題 11.7 に現れる半順序集合に対して，次の問いに答えよ．ただし，該当するものが存在しない場合は「存在しない」と答えよ．

1. $\{2, 3\}$ の上界をすべて挙げよ．
2. $\{3, 5\}$ の上界をすべて挙げよ．
3. $\{6, 10\}$ の下界をすべて挙げよ．
4. $\{8, 10, 12\}$ の下界をすべて挙げよ．
5. $\{2, 3, 4, 5\}$ の極大元をすべて挙げよ．
6. $\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12\}$ の極大元をすべて挙げよ．
7. $\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12\}$ の極小元をすべて挙げよ．

8. $\{2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12\}$ の極小元をすべて挙げよ .
9. $\{2, 4, 6\}$ の最大元をすべて挙げよ .
10. $\{2, 5, 10\}$ の最大元をすべて挙げよ .
11. $\{2, 4, 6\}$ の最小元をすべて挙げよ .
12. $\{2, 5, 10\}$ の最小元をすべて挙げよ .
13. $\{2, 4, 6\}$ の最小上界をすべて挙げよ .
14. $\{2, 5, 10\}$ の最小上界をすべて挙げよ .
15. $\{2, 5, 10\}$ の最大下界をすべて挙げよ .
16. $\{6, 8, 12\}$ の最大下界をすべて挙げよ .

追加問題 11.10 半順序集合 (A, \preceq) と $B \subseteq A$ に対して, $a \in A$ を B の最小上界であるとする . このとき, $a \in B$ ならば, a は B の最大元であることを証明せよ .

発展追加問題 11.11 集合 A に対して, $(2^A, \subseteq)$ という半順序集合を考える . 以下の問いに答えよ .

1. 任意の $X, Y \in 2^A$ に対して, $\{X, Y\}$ の最小上界が $X \cup Y$ となることを証明せよ .
2. 任意の $X, Y \in 2^A$ に対して, $\{X, Y\}$ の最大下界が $X \cap Y$ となることを証明せよ .