

注意： 解答がどのように導かれるのか，すなわち証明，を必ず書き下すこと．

復習問題 11.1 次の半順序集合に対して，そのハッセ図を描け．

1.  $(\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}, |)$ ．ただし， $a | b$ であることを「 $a$ は $b$ の約数である」と定義する．
2.  $(2^{\{1, 2, 3\}}, \subseteq)$ ．
3.  $(\{1, 2, 3, 4\}, \leq)$ ．

復習問題 11.2 全順序集合  $(A, \preceq)$  を考える．このとき，任意の  $a, b \in A$  に対して

$$a \not\preceq b \Leftrightarrow a \succ b$$

が成り立つことを証明せよ．

復習問題 11.3 問題 11.1 の 1 に現れる半順序集合  $(\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}, |)$  に対して，次の問いに答えよ．ただし，該当するものが存在しない場合は「存在しない」と答えよ．

1.  $\{2, 3\}$  の上界をすべて挙げよ．
2.  $\{2\}$  の上界をすべて挙げよ．
3.  $\{2, 5\}$  の上界をすべて挙げよ．
4.  $\{2, 3\}$  の下界をすべて挙げよ．
5.  $\{2\}$  の下界をすべて挙げよ．
6.  $\{2, 6\}$  の下界をすべて挙げよ．
7.  $\{2, 3, 4\}$  の極大元をすべて挙げよ．
8.  $\{2, 3, 4\}$  の極小元をすべて挙げよ．
9.  $\{2, 3, 6\}$  の最大元をすべて挙げよ．
10.  $\{2, 3\}$  の最大元をすべて挙げよ．
11.  $\{1, 2, 3\}$  の最小元をすべて挙げよ．
12.  $\{2, 3\}$  の最小元をすべて挙げよ．
13.  $\{2, 3\}$  の上限をすべて挙げよ．
14.  $\{2\}$  の上限をすべて挙げよ．

15.  $\{2, 3\}$  の下限をすべて挙げよ．

16.  $\{2\}$  の下限をすべて挙げよ．

復習問題 11.4 半順序集合  $(\mathbb{R}, \leq)$  と  $B = (0, 1) = \{x \mid x \in \mathbb{R} \text{ かつ } 0 < x < 1\}$  を考える．このとき， $(\mathbb{R}, \leq)$  において  $B$  の極大元が存在しないことを証明せよ．

補足問題 11.5 任意の命題変数  $P$  に対して， $P \wedge \neg P \Leftrightarrow F$  が成り立つことを証明せよ．

補足問題 11.6 半順序集合  $(A, \preceq)$  と  $A$  の部分集合  $B \subseteq A$  を考える．

1.  $b_1$  と  $b_2$  が  $B$  の最大元であるならば， $b_1 = b_2$  となることを証明せよ．
2.  $a_1$  と  $a_2$  が  $B$  の上限であるならば， $a_1 = a_2$  となることを証明せよ．

追加問題 11.7  $(\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12\}, |)$  という半順序集合のハッセ図を描け．

追加問題 11.8 半順序集合  $(2^{\{1, 2, 3, 4\}}, \subseteq)$  のハッセ図を描け．

追加問題 11.9 問題 11.7 に現れる半順序集合に対して，次の問いに答えよ．ただし，該当するものが存在しない場合は「存在しない」と答えよ．

1.  $\{2, 3\}$  の上界をすべて挙げよ．
2.  $\{3, 5\}$  の上界をすべて挙げよ．
3.  $\{6, 10\}$  の下界をすべて挙げよ．
4.  $\{8, 10, 12\}$  の下界をすべて挙げよ．
5.  $\{2, 3, 4, 5\}$  の極大元をすべて挙げよ．
6.  $\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12\}$  の極大元をすべて挙げよ．
7.  $\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12\}$  の極小元をすべて挙げよ．

8.  $\{2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12\}$  の極小元をすべて挙げよ .
9.  $\{2, 4, 6\}$  の最大元をすべて挙げよ .
10.  $\{2, 5, 10\}$  の最大元をすべて挙げよ .
11.  $\{2, 4, 6\}$  の最小元をすべて挙げよ .
12.  $\{2, 5, 10\}$  の最小元をすべて挙げよ .
13.  $\{2, 4, 6\}$  の最小上界をすべて挙げよ .
14.  $\{2, 5, 10\}$  の最小上界をすべて挙げよ .
15.  $\{2, 5, 10\}$  の最大下界をすべて挙げよ .
16.  $\{6, 8, 12\}$  の最大下界をすべて挙げよ .

追加問題 11.10 半順序集合  $(A, \preceq)$  と  $B \subseteq A$  に対して,  $a \in A$  を  $B$  の最小上界であるとする . このとき,  $a \in B$  ならば,  $a$  は  $B$  の最大元であることを証明せよ .

発展追加問題 11.11 集合  $A$  に対して,  $(2^A, \subseteq)$  という半順序集合を考える . 以下の問いに答えよ .

1. 任意の  $X, Y \in 2^A$  に対して,  $\{X, Y\}$  の最小上界が  $X \cup Y$  となることを証明せよ .
2. 任意の  $X, Y \in 2^A$  に対して,  $\{X, Y\}$  の最大下界が  $X \cap Y$  となることを証明せよ .