

注意： 解答がどのように導かれるのか，すなわち証明，を必ず書き下すこと．

復習問題 10.1 集合  $A$  の分割  $P$  を考える．このとき，集合  $A$  上の関係  $R$  を次のように定義する．すなわち， $x R y$  であることをある  $X \in P$  が存在して， $x \in X$  かつ  $y \in X$  であることとする．このとき， $R$  が  $A$  上の同値関係となることを証明せよ．

復習問題 10.2 集合  $A$  上の同値関係  $R$  に対して

$$P = \{[a]_R \mid a \in A\}$$

という集合を考える．ただし， $[a]_R$  は  $R$  による  $a$  の同値類を表す．このとき， $P$  が  $A$  の分割であることを証明せよ．

補足問題 10.3 集合  $A$  上の同値関係  $R$  と，任意の要素  $a, a' \in A$  を考える．このとき， $a R a'$  ならば， $[a]_R = [a']_R$  となることを証明せよ．

追加問題 10.4 0 以上の整数全体の集合  $\mathbb{N}$  上の同値関係  $\equiv_2$  を考える ( $\equiv_2$  の定義は復習問題 9.6 を参照のこと)．このとき，商集合  $\mathbb{N} / \equiv_2$  はどうなるか？

追加問題 10.5 集合  $A$  上の同値関係  $R$  に対して，関数  $f: A \rightarrow A / R$  を次のように定義する．すなわち，任意の  $a \in A$  に対して， $f(a) = [a]_R$  とする．このとき， $f$  が全射となることを証明せよ．

発展追加問題 10.6 集合  $A$  上の関係  $R_1$ ，集合  $B$  上の関係  $R_2$  に対して，直積  $A \times B$  上の関係  $R$  を次のように定義する．すなわち，任意の  $(a, b), (a', b') \in A \times B$  に対して， $(a, b) R (a', b')$  であることを， $a R_1 a'$  かつ  $b R_2 b'$  であることとする．

1. 関係  $R_1, R_2$  がともに同値関係であるとき， $R$  も同値関係であることを証明せよ．
2. 商集合に関して

$$(A \times B) / R = (A / R_1) \times (B / R_2)$$

が成り立つことを証明せよ．