

注意： 解答がどのように導かれるのか，すなわち証明，を必ず書き下すこと．

復習問題 9.1 次に挙げるそれぞれの集合 A とその上の関係 R に対して，その関係を表現するグラフを描け．また，それぞれの関係が反射性，完全性，対称性，反対称性，推移性を持つかどうか答えよ．(理由も述べること．)

1. 集合 $A = \{1, 2, 3, 6\}$ 上の関係 R で，任意の $x, y \in A$ に対して $x R y$ であることを x が y の約数であることと定義する．
2. 集合 $A = \{\emptyset, \{a\}, \{b\}, \{a, b\}\}$ 上の関係 R で，任意の $X, Y \in A$ に対して $X R Y$ であることを $X \subseteq Y$ と定義する．
3. 集合 $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ 上の関係 R で，任意の $x, y \in A$ に対して $x R y$ であることを $x < y$ と定義する．
4. 集合 $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ 上の関係 R で，任意の $x, y \in A$ に対して $x R y$ であることを $x = y$ と定義する．
5. 集合 $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ 上の関係 R で，任意の $x, y \in A$ に対して $x R y$ であることを $x \equiv y \pmod{3}$ と定義する．

復習問題 9.2 \mathbb{R} 上の大小関係 \leq が全順序であることを証明せよ．

復習問題 9.3 任意の集合 A に対して，その冪集合 2^A 上の関係 \subseteq が半順序であることを証明せよ．(ヒント：演習問題 5.10 と演習問題 9.7 を用いてもよい．)

復習問題 9.4 1 以上の整数全体の集合を \mathbb{Z}_+ と書くことにする． \mathbb{Z}_+ 上の関係 $|$ を次のように定義する．すなわち，任意の $a, b \in \mathbb{Z}_+$ に対して $a | b$ であることは a が b の約数であることとする．このとき， $|$ が半順序であることを証明せよ．

復習問題 9.5 \mathbb{R} 上の関係 $=$ が同値関係であることを証明せよ．

復習問題 9.6 p を 1 以上の整数として， \mathbb{N} を 0 以上の整数全体の集合とする． \mathbb{N} 上の関係 \equiv_p を次のように定義する．すなわち，任意の $m, n \in \mathbb{N}$ に対し

$m \equiv_p n$ であることは $m \equiv n \pmod{p}$ であることとする．このとき， \equiv_p が同値関係であることを証明せよ．

補足問題 9.7 任意の集合 X に対して， $X \subseteq X$ が成り立つことを証明せよ．

追加問題 9.8 集合 $A = \{-1, -2, 0, 1, 2\}$ 上の次の関係 R_1, R_2, R_3 が反射性，完全性，対称性，反対称性，推移性を持つか，答えよ．(その理由も述べよ．)

1. 任意の $x, y \in A$ に対して， $x R_1 y$ であることを $x - y \leq 1$ であることとする．
2. 任意の $x, y \in A$ に対して， $x R_2 y$ であることを $x - y \leq -1$ であることとする．
3. 任意の $x, y \in A$ に対して， $x R_3 y$ であることを $x^2 - y^2 = 0$ であることとする．

追加問題 9.9 \mathbb{R}^2 上の関係 \preceq を次のように定義する．すなわち，任意の $(x, x'), (y, y') \in \mathbb{R}^2$ に対して， $(x, x') \preceq (y, y')$ であることを $x \leq y$ かつ $x' \leq y'$ であることとする．このとき， \preceq が半順序となることを証明せよ．

発展追加問題 9.10 \mathbb{R}^2 上の関係 \preceq を次のように定義する．すなわち，任意の $(x, x'), (y, y') \in \mathbb{R}^2$ に対して， $(x, x') \preceq (y, y')$ であることを「 $x \geq y$ ならば『 $x = y$ かつ $x' \leq y'$ 』」であることとする．このとき， \preceq が全順序となることを証明せよ．(ヒント： \mathbb{R} 上の大小関係 \leq が完全性，すなわち，任意の $x, y \in \mathbb{R}$ に対して「 $x \leq y$ または $y \leq x$ 」を満たす，ということを使って，場合分けを行ってみよ．)

追加問題 9.11 任意の集合 A, B と任意の関数 $f: A \rightarrow B$ を考える． A 上の関係 R を次のように定義する．すなわち，任意の $x, y \in A$ に対して， $x R y$ であることを $f(x) = f(y)$ であることとする．このとき， R が同値関係となることを証明せよ．